04.02.2014

A. 49)

Bestimmen Sie für gegebene $z \in \mathbb{C}$:

$z = a + ib$

$\bar{z} = a - ib$

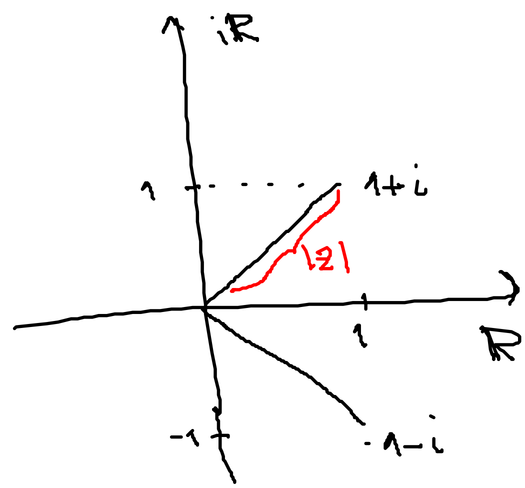
$|z|$

a) $z = \frac{2i}{1+i} = \frac{2i}{1+i} \cdot \frac{(1-i)}{(1-i)} = \frac{2i - 2i^2}{\underbrace{1-(i^2)}_{1+1=2}} = \frac{2(+1+i)}{2}$

$= 1 + i$

$\bar{z} = 1 - i = a + ib$

$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$



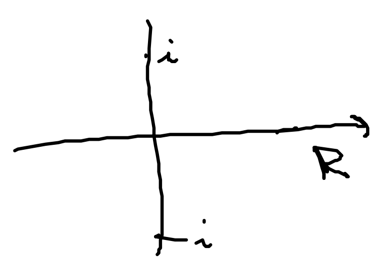
b) $z = \frac{10-5i}{1+2i}$

$= \frac{10-5i}{1+2i} \cdot \frac{(1-2i)}{(1-2i)}$

$= \frac{\cancel{10} - 20i - 5i + \cancel{10}i^2}{\underbrace{1-(4i^2)}_{1+4=5}} = -\frac{25i}{5} = -5i$

$\bar{z} = 5i$, $|z| = \sqrt{25+0} = 5$

c) $z = \sum_{k=0}^{26} i^k$ < $i^0 + i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{26}$

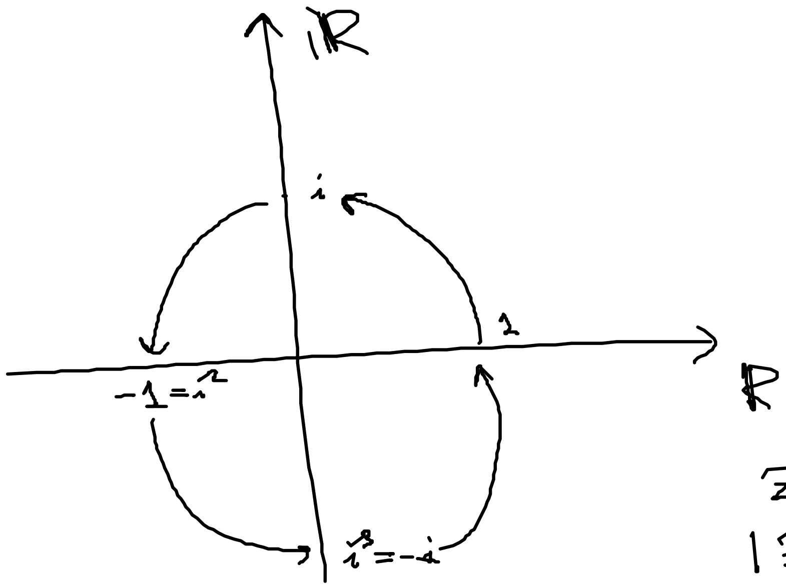


Idee: $i^0 + i + i^2 + i^3 = 1 + i - 1 - i = 0$

$$z = \underbrace{i^0 + i^1 + i^2 + i^3}_{=0} + \underbrace{i^4 + i^5 + i^6 + i^7}_{i^4(i^0+i^1+i^2+i^3)=0} + \ldots$$

$$\ldots\ \underbrace{i^{20} + i^{21} + i^{22} + i^{23}}_{=0} + i^{24} + i^{25} + i^{26}$$

$$= \underbrace{(i^4)^6}_{1} + \underbrace{(i^4)^6}_{1} \cdot i + \underbrace{(i^4)^6}_{1}\, \underbrace{i^2}_{-1} = 1 + i - 1 = i$$



$z = i$

$|z| = 1$

$\bar{z} = -i$

A. 50 (Aufgabe 5 Probeklausur)

$\alpha \in \mathbb{R}$ gegeben

1) Bestimmen $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$
mit $f(\alpha) = 0$

2) · Zeigen daß $\alpha \notin \mathbb{Q}$

a) $\alpha = \sqrt[4]{5-\sqrt{6}}$

① $\alpha^4 = 5-\sqrt{6}$

$\Rightarrow \alpha^4 - 5 = -\sqrt{6}$

$\Rightarrow (\alpha^4-5)^2 = 6 \Rightarrow \alpha^8 - 10\alpha^4 + 25 = 6$

$\Rightarrow \alpha^8 - 10\alpha^4 + 19 = 0$

$f(x) = 19 - 10x^4 + x^8 \Rightarrow f(\alpha) = 0$!

② $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,,\, p,q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$

Beispiel $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
$\left(\sqrt{2}, \pi, e, \sqrt{3}, \ldots \right)$

$f(x) \in \mathbb{Z}$

$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$

$\frac{p}{q}$ Nullstelle von $f(x)$ $\Rightarrow$ p teilt a_0, q teilt a_n

Falls es eine Nullstelle $\frac{p}{q}$ gibt

$\Rightarrow p \mid 19$ und $q \mid 1$ $\Rightarrow$ p kann nur $\pm 19, \pm 1$, q kann nur ± 1

(p teilt 19)

$\Rightarrow$ mögliche rationale Nullstelle: $\pm 19, \pm 1$

Überprüfen ob $\pm 1, \pm 19$ Nullstelle sind:

$$f(1) = 19 - 10 + 1 = 10 \neq 0$$

Hornerschema $\qquad f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_8 x^8$

$$b_8 = a_8 = 1$$

$$b_{n-1} = a_{n-1} + x\, b_n \qquad [x = 19]$$

$$b_7 = a_7 + 19 \cdot 1 = 19$$

$$b_6 = a_6 + 19 \cdot 19 = 361$$

$$b_5 = a_5 + 19 \cdot b_6 = 0 + 19 \cdot 361$$

b_4

b_3

b_2

b_1

$$f(19) = b_0 = a_0 + 19 \cdot b_1$$

Herleitung

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

$$= a_0 + x\left(a_1 + x a_2 + x^2 a_3 + \dots + a_n x^{n-1}\right)$$

$$= a_0 + x\left(a_1 + x\left(a_2 + x a_3 + \dots + a_n x^{n-2}\right)\right)$$

$$= \underbrace{a_0 + x\underbrace{\left(a_1 + x\underbrace{\left(a_2 + x\underbrace{\left(a_3 + \dots \underbrace{\left(a_{n-1} + a_n x\right)}_{b_{n-1}}\right)\right)}_{b_{n-2}}}_{b_2}\dots\right)}_{b_1 = a_1 + x b_2}}_{b_0}$$

zu Aufgabe:

$$f(1) \neq 0 \quad , \quad f(19) \neq 0$$

Beachte: $f(x) = 19 - 10x^4 + x^8$ ist gerade $\quad f(x) = f(-x)$

$$\Longrightarrow \quad f(-1) \neq 0 \quad , \quad f(-19) \neq 0$$

$\Longrightarrow$ f hat keine rationale Nullstelle

aber α ist Nullstelle von f!

$\Longrightarrow$ α irrational!

Aufgabe 2 (Probeklausur)

$$\frac{4\,|x-2|}{(2x-1)} < 1$$

zuerst $x \neq 1/2$

$x > 1/2$	$2 \leq x < 7/2$	$\frac{3}{2} < x < 2$
$x < 1/2$	$x < 2$ $\Rightarrow$ $x < 3/2$ $x < 3/2$	

a) $x > 1/2 \Rightarrow 2x - 1 > 0$

$\Rightarrow 4|x-2| < 2x - 1$

$\Rightarrow$ $\boxed{x \geq 2} \Rightarrow |x-2| = x-2$

$\boxed{x < 2} \Rightarrow |x-2| = 2-x$

$$|-1| = 1$$

$4(x-2) < 2x - 1 \Rightarrow 2x < 7 \Rightarrow \boxed{x < 7/2}$

$4(2-x) < 2x - 1 \Rightarrow -6x < -9 \Rightarrow \boxed{x > 3/2}$

b) $x < 1/2 \Rightarrow 2x-1 < 0$

$$\Rightarrow 4\cdot|x-2| > 2x-1$$

$x \geq 2$ — unmöglich weil $x < 1/2$!

$\boxed{x<2} \Rightarrow |x-2| = 2-x$

$\Rightarrow 4(2-x) > 2x-1$

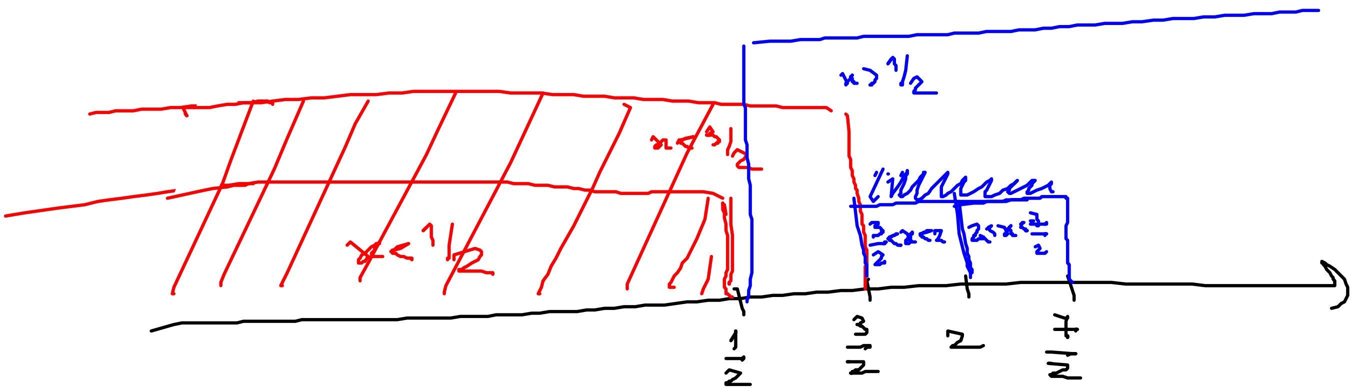
$\Rightarrow \boxed{x < 3/2}$

Tabelle

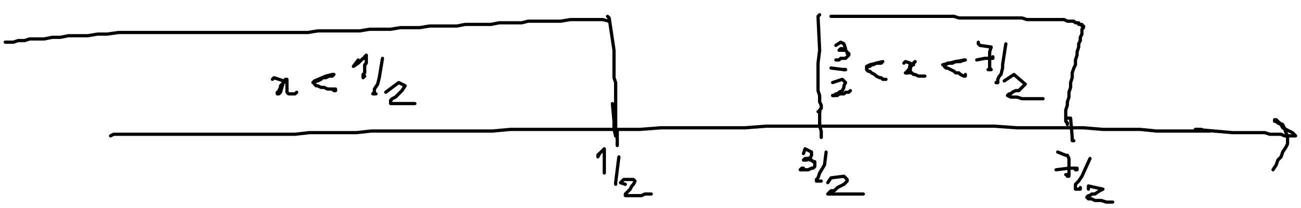
$x > 1/2$ und $\left(2 \leq x < 7/2 \text{ oder } 3/2 < x < 2\right)$

oder

$x < 1/2$ und $\left(x < 3/2\right)$



$\Downarrow$



$$L = \{x \in \mathbb{R} : x < 1/2 \vee \tfrac{3}{2} < x < 7/2\}$$

$$= \underbrace{\{x \in \mathbb{R} : x < 1/2\}}_{\text{Lösungsmenge falls } x < 1/2} \cup \underbrace{\{x \in \mathbb{R} : \tfrac{3}{2} < x < 7/2\}}_{\text{Lösungsmenge falls } x > 1/2}$$