

# Differentialgleichungen für Ingenieure

Andreas Unterreiter

October 8, 2003

## **Abstract**

Manuskript zur gleichnamigen LV, gehalten im SS 03 an der TU Berlin

# 1 Funktionen, Modellierung und Differentialgleichungen

Wir beginnen mit einer Wiederholung:

Jede **Funktion**  $f \dots$

- $\dots$  hat einen **Definitionsbereich**  $\text{dom } f$ ,
- $\dots$  hat einen **Wertebereich**  $\text{ran } f$ ,
- $\dots$  besteht aus einer Vorschrift, die jedem  $x$  aus dem Definitionsbereich  $\text{dom } f$  genau einen Wert  $f(x)$  aus dem Wertebereich  $\text{ran } f$  zuordnet.

Im Englischen wird der Definitionsbereich als “domain” und der Wertebereich wird als “range” bezeichnet. Dies erklärt die Abkürzungen “ $\text{dom } f$ ” und “ $\text{ran } f$ ”.

Im Folgenden interessieren uns vor allen Dingen Funktionen  $f$ , für die

$\text{dom } f$  eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$  (oder von  $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$ ) ist

und

$\text{ran } f$  eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$  (oder von  $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ ) ist.

Die genaue Kenntnis von  $\text{dom } f$  ist allgemein von sehr grosser Bedeutung. Im Gegensatz dazu genügt es zumeist, an Stelle von  $\text{ran } f$  eine vernünftigerweise, grössere Menge anzugeben. Zum Beispiel dürften die Schreibweisen

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x)$$

und

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sin(x)$$

allgemein bekannt sein, mit denen ausgedrückt wird, dass

- $\dots \text{dom } f = \mathbb{R}$  ist,
- $\dots \text{ran } f$  eine Teilmenge von  $\mathbb{R}$  ist,
- $\dots$  die Vorschrift von  $f$  darin besteht, für jedes reelle  $x$  die Sinusfunktion an der Stelle  $x$  auszuwerten.

In dieser Schreibweise ist das Wichtigste über  $f$  gesagt - obwohl  $\text{ran } f = [-1, +1]$ , also  $\text{ran } f \neq \mathbb{R}$ , ist.

Funktionen spielen (in mehr oder weniger direkt sichtbarer Form) in vielen Lebensbereichen eine grosse Rolle.

- Betrachten wir eine Aktie, die an der Frankfurter Börse gehandelt wird. Diese Aktie hat zu jedem Zeitpunkt  $t$  eines Handeltages einen bestimmten Wert  $c(t)$ . Der Wert dieser Aktie ist die Funktion  $c$ . Der Definitionsbereich  $\text{dom } c$  ist die Menge  $H$  der Zeiten, an denen die Aktie an der Frankfurter Börse gehandelt wird, dh  $H$  ist die Vereinigung von Zeitintervallen<sup>1</sup>, wobei jedes Zeitintervall einem Handelstag entspricht. Der Wertebereich  $\text{ran } c$  ist in der Menge  $\mathbb{Q}^+$  der positiven, rationalen Zahlen enthalten, da der Wert einer Aktie nicht Null oder negativ werden kann und höchstens zwei Nachkommastellen hat. Wir erhalten

$$c : H \rightarrow \mathbb{Q}^+, \quad t \mapsto c(t).$$

Die Kenntnis von  $c(t)$  für ein Zeitintervall  $[T_1, T_2]$  spielt eine sehr grosse Rolle, wenn es um die Entscheidung geht, die Aktie zur Zeit  $T_2$  zu kaufen oder zu verkaufen.

Hier fungiert die Funktion  $c$  als

### Entscheidungshilfe in Geldgeschäften.

- In ähnlicher Weise ist der deutsche Aktienindex

$$\text{DAX} : H \rightarrow \mathbb{N}, \quad t \mapsto \text{DAX}(t),$$

eine Funktion mit dem Definitionsbereich  $H$ , deren Wertebereich - der DAX wird "in Punkten" angegeben - in der Menge der natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  enthalten ist. Der Graph der Funktion DAX - "des DAXes" - ist tagesweise auf Anzeigentafeln der Frankfurter Börse zu sehen.

Wie beim vorhergehenden Beispiel ist DAX eine Entscheidungshilfe in Geldgeschäften und dient darüber hinaus gehend der

### Beurteilung des Handelsaufkommens der Börse.

- **Altersbestimmung organischer Substanzen.**

*Die Radiokarbonmethode beruht darauf, dass in der Atmosphäre durch die kosmische Strahlung Neutronen erzeugt werden, die durch eine Kernreaktion mit dem Stickstoffisotop  $^{14}\text{N}$  der Luft  $^{14}\text{C}$  bilden.*

*Dieses ist radioaktiv und zerfällt mit einer Halbwertszeit von  $5730 \pm 40$  Jahren. Da Erzeugung und Zerfall im Gleichgewicht stehen, ist der  $^{14}\text{C}$ -Anteil im Kohlenstoffgehalt der Atmosphäre konstant. ...*

*Wird bei einem organ. Aufbauprozess Kohlenstoff eingebaut, so befindet sich darunter ständig ein bestimmter, wenn auch kleiner Prozentsatz  $^{14}\text{C}$ , der entsprechend einer Halbwertszeit zerfällt. Da nach dem Absterben des Organismus kein  $^{14}\text{C}$  mehr eingebaut werden wird, kann aus dem heute noch vorhandenen Anteil an  $^{14}\text{C}$  in einem solchen Objekt auf dessen Alter geschlossen werden. ...*

---

<sup>1</sup>Hier und im Folgenden bestehen Intervalle immer aus unendlich vielen Punkten.

Zitat "Brockhaus. Naturwissenschaft und Technik. Band 4."  
Wiesbaden, Brockhaus. 1983.

Nach dieser Darstellung gibt es eine Funktion  $A$  - "A" wie "Alter" - die es erlaubt, der Konzentration  $C$  von  $^{14}\text{C}$  in der organischen Substanz das Alter zuzuordnen:

$$A : [\underline{C}, C_0] \rightarrow [0, +\infty[, \quad C \mapsto A(C),$$

wobei  $C_0$  die konstante Konzentration von  $^{14}\text{C}$  in der Atmosphäre ist und wir realistischer Weise annehmen können, dass es eine minimale, gerade noch nachweisbare Konzentration  $\underline{C} > 0$  gibt.

- Qualitativ höchstwertige optische Linsen werden typischer Weise in drei Arbeitsschritten hergestellt.
  - .1 Erzeugung einer Glasschmelze von ca 800 Grad Celcius.
  - .2 Giessen der Linse.
  - .3 Abkühlen der Linse auf Raumtemperatur.

Im Arbeitsschritt .3 sind zwei einander konkurrierende Aspekte zu beachten.

Einerseits soll die Linse nicht durch Wärmespannungen zerstört werden (wie zB ein erhitztes Trinkglas zerspringt, wenn es plötzlich in kaltes Wasser getaucht wird). Dies kann durch hinreichend langsames Abkühlen erreicht werden.

Andererseits ist langsames Abkühlen sehr kostenintensiv, da der Ofen, in dem sich die Linse befindet, sehr lange Zeit auf hoher Temperatur gehalten werden muss.

Damit der Abkühlvorgang sowohl

#### **qualitätssichernd als auch kostendämpfend**

gesteuert werden kann, muss der zeitliche und räumliche Verlauf des (räumlichen) Temperaturgradienten  $\nabla_{\vec{x}}\theta$  bekannt sein. Je grösser der Betrag dieses Gradienten, desto grösser sind die unerwünschten Wärmespannungen.

Hier ist

$$\theta : [T_0, T_1] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad (t, \vec{x}) \mapsto \theta(t, \vec{x})$$

die Temperatur**funktion** der Linse, dh  $\theta(t, \vec{x})$  ist die Temperatur zur Zeit  $t$  an der Stelle  $\vec{x}$  der Linse.  $T_0$  ist der Zeitpunkt der Beendigung des Gussvorgangs und  $T_1$  ist der Zeitpunkt, zu dem die Linse aus dem Ofen geholt wird.  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  ist das räumliche Gebiet, das von der Linse eingenommen wird, etwa ein Zylinder mit konvex oder konkav gekrümmten Deckflächen. Wir nehmen an, dass die Temperatur in Kelvin gemessen wird. Damit ist der Wertebereich eine Teilmenge der positiven, reellen Zahlen  $\mathbb{R}^+$ .

Der räumliche Temperaturgradient ist die Funktion

$$\nabla_{\vec{x}}\theta : [T_0, T_1] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (t, \vec{x}) \mapsto \begin{pmatrix} \partial_x \theta \\ \partial_y \theta \\ \partial_z \theta \end{pmatrix} (t, \vec{x}),$$

wobei hier und im Folgenden

$$\partial_x \theta = \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \partial_y \theta = \frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad \partial_z \theta = \frac{\partial \theta}{\partial z}.$$

- Im Rahmen der

### klassischen Physik

ist ein System, das aus  $N$  Teilchen besteht, vollständig durch die  $N$  Ortsfunktionen

$$\vec{p}_1 : [T_0, T_1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \dots, \quad \vec{p}_N : [T_0, T_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

beschrieben. Hierbei ist  $[T_0, T_1]$  das zeitliche Beobachtungsintervall des Systems und  $\vec{p}_1(t), \dots, \vec{p}_N(t)$  ist die Position des 1sten,  $\dots$ ,  $N$ ten Teilchens zur Zeit  $t \in [T_0, T_1]$ .

In einfachsten Fall - etwa beim ebenen mathematischen Pendel, bei dem ein Massepunkt der Masse  $m$  an einem schwerelosen Stab der Länge  $l$  reibungsfrei im Erdschwerefeld in einer Ebene hin und her schwingt - besteht das System nur aus einem einzigen Teilchen, dh  $N = 1$ .

Bei all diesen Beispielen können wir getrost annehmen, dass es die angegebenen Funktionen  $f$  in Wirklichkeit gibt.

Allerdings kennen wir deswegen noch lange nicht die Vorschrift, die es erlaubt, bei gegebenem  $x$  den Funktionswert  $f(x)$  zu berechnen.

An dieser Stelle kommt die Modellierung ins Spiel.

**Modellierung** = Erfassung all jener Eigenschaften einer interessierenden Funktion  $f$ , so dass es möglich ist,  $f(x)$  bei gegebenem  $x \in \text{dom } f$  zumindest näherungsweise zu berechnen.

**Frage:** Mit welchen Funktionen  $f$  ist bei Modellierungen in der Praxis zu rechnen ?

**Antwort:**

- I) "Standardfunktionen", i.e. Funktionen, die wir explizit (oder, was wir im Rahmen dieser VL aber nur am Rande betrachten wollen: rekursiv) mit Hilfe elementarer Funktionen schreiben können.

II) Funktionen, die uns noch nicht begegnet sind.

Vergegenwärtigen wir uns die Standardfunktionen. Ohne Angabe von Definitions- und Wertebereich sind dies ...

1. ... die Polynome, etwa  $x \mapsto x$ ,  $t \mapsto 1 + t^2$ ,  $(x, y, z) \mapsto x + y + z$ ,  $(u, v) \mapsto u^2 + uv - v^2$ , usw.,
2. ... die "elementaren Funktionen"  $x \mapsto e^x$ ,  $t \mapsto |t|$ ,  $z \mapsto \cos(z)$ ,  $x \mapsto \log(x)$ ,  $u \mapsto u^{3/2}$ , usw.
3. ... Funktionen, die sich mit den Funktionen aus 1., 2. durch Hintereinanderschalten ("Verknüpfung von Funktionen") und mit den Grundrechnungsarten konstruieren lassen, etwa  $x \mapsto \frac{1+x^2}{2+x^4}$ ,  $t \mapsto (1+t) \cdot e^{t^2} + t$ ,  $(u, v) \mapsto \sin(u+v) \cdot \cos(v) + u^2$ ,  $(x, y, z) \mapsto e^x - 2^z \cdot (1 + xyz)$ ,  $x \mapsto e^{x \cdot \sin(|x|)}$ ,  $(u, v, w, t) \mapsto e^{-(u^2+v^2+w^2)/(4t)}$ , usw.
4. ... Funktionen, die stückweise durch Funktionen von 1., 2. oder 3. definiert sind, etwa stückweise lineare (affine) Funktionen.

**Frage:** Wie kann - ausser durch explizites Hinschreiben wie in 1.-4. - eine Funktion beschrieben werden, so dass sie berechenbar wird ?

**Antwort:** Zum Beispiel mit Hilfe von Differentialgleichungen.

Eine **skalare Differentialgleichung** ist eine Gleichung, die ausser einer unbekanntem Funktion auch Ableitungen dieser Funktion enthält.

**Beispiele.**

- Die "Pendelgleichung"  $y'' + \omega^2 \cdot \sin(y) = 0$ ,  
wobei  $\omega^2 \in \mathbb{R}^+$  gegeben ist.  
Unbekannte Funktion:  $y$ .
- Eine "Wärmeleitungsgleichung"  $\partial_t u = \Delta_{\vec{x}} u$ ,  
wobei  $\Delta_{\vec{x}} u = \partial_{xx} u + \partial_{yy} u + \partial_{zz} u$  und  $\partial_{xx} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  etc.  
Unbekannte Funktion:  $u$ .

Eine **vektorwertige Differentialgleichung** ist eine Gleichung, die ausser mehreren unbekanntem Funktionen auch Ableitungen dieser Funktionen enthält.

**Beispiel.**

- $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$ , wobei  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  und  $\operatorname{div}(\vec{v}) = \partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3$ .  
Unbekannte Funktionen:  $v_1, v_2, v_3$ .

Ein **Differentialgleichungssystem** sind mehrere Gleichungen, die ausser einer oder mehrerer Funktionen auch Ableitungen dieser Funktionen enthalten.

**Beispiel.** Die Pendelgleichung mit  $\omega^2 = 4$  als System geschrieben.

$$\begin{aligned}y_1' &= y_2 \\ y_2' &= 4 \sin(y_1)\end{aligned}$$

Dies sind zwei Gleichungen in den zwei unbekannt Funktionen  $y_1, y_2$ .

Eine **gewöhnliche Differentialgleichung, ODE** ist eine Differentialgleichung, in der nur Ableitungen nach einer Variablen vorkommt.

**Beispiele.**

- Eine “Schwingungsgleichung mit Dämpfung und äusserer Kraft”,  
 $\ddot{u} + \dot{u}|\dot{u}| + \omega^2 u = \cos(t)$ , wobei  $\omega^2 \in \mathbb{R}^+$  gegeben ist und  $\dot{u} = \frac{du}{dt}$ ,  
 $\ddot{u} = \frac{d^2 u}{dt^2}$ .
- Die Pendelgleichung mit  $\omega^2 = 1$ ,  $y'' + \sin(y) = 0$ .

Die Abkürzung “ODE” kommt von der englischen Bezeichnung “**O**rdinary **D**ifferential **E**quation” für “gewöhnliche Differentialgleichung”.

Ein **gewöhnliches Differentialgleichungssystem, ODE-System** ist ein Differentialgleichungssystem, in dem nur Ableitungen nach einer Variablen vorkommt.

**Beispiel.** Die Pendelgleichung mit  $\omega^2 = 4$  als System geschrieben.

$$\begin{aligned}y_1' &= y_2 \\ y_2' &= 4 \sin(y_1)\end{aligned}$$

Eine **partielle Differentialgleichung, PDE**, ist eine Differentialgleichung, in der Ableitungen nach mehreren Variablen vorkommen.

**Beispiel.**  $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$ .

Die Abkürzung “PDE” kommt von der englischen Bezeichnung “**P**artial **D**ifferential **E**quation” für partielle Differentialgleichung”.

Die **Ordnung einer Differentialgleichung** ist die in dieser Gleichung höchstvorkommende Ordnung von (partiellen) Ableitungen.

**Beispiele.**

- Die Ordnung von  $y'' + \sin(y) = 0$  ist 2.
- Die Ordnung von  $\operatorname{div}(\vec{v}) = 0$  ist 1.
- Die Ordnung von  $\ddot{u} + (\dot{u})^2 + u = \cos(t)$  ist 2.
- Die Ordnung von  $\partial_t u = \Delta_{\vec{x}} u$  ist 2.

**Ziel der Vorlesung:** Vermittlung modernen Basiswissens über Differentialgleichungen.

**Methodik der Vorlesung:**

- Anhand von Modellierungsfragen werden ausgewählte Differentialgleichungen vorgestellt.
- Die Mathematik liefert uns Methoden, wie die Lösung der jeweiligen Differentialgleichung zumindest näherungsweise berechnet werden kann.
- Qualitative, mathematische Aussagen runden die Diskussion ab.

### 1.1 $y' + a(x)y = f(x)$

**Ein Beispiel: Die Radiokarbonmethode.** Wir greifen das Problem auf, aus der Konzentration  $C$  von  $^{14}\text{C}$  in einer organischen Probe auf das Alter dieser Probe rückschliessen zu wollen.

Dafür müssen wir ein Modell für den radioaktiven Zerfall von  $^{14}\text{C}$  - oder, allgemeiner: einer beliebigen radioaktive Substanz - herleiten.

Bekannt ist: Nach einer bestimmten Halbwertszeit  $\tau$  - bei  $^{14}\text{C}$  ist  $\tau = 5730 \pm 40$  Jahre - ist die Hälfte des vorhandenen  $^{14}\text{C}$  zerfallen.

Also gilt für alle Zeiten  $t \in [T_0, T_1]$  - zum Zeitpunkt  $T_0$  stoppte die Aufnahme von  $^{14}\text{C}$ , und  $T_1$  sei der Zeitpunkt, zu dem die Konzentration von  $^{14}\text{C}$  bestimmt wird - das Gesetz

$$C(t + \tau) = \frac{1}{2}C(t), \quad (1)$$

dh nach Ablauf der Zeit  $\tau$  sind 50% der noch vorhandenen  $^{14}\text{C}$  Atome zerfallen.

Nach einem Zeitintervall  $0 < \Delta t \leq \tau$  gilt

$$C(t + \Delta t) = C(t) \cdot (1 - p(t, \Delta t, C(t))),$$

wobei  $0 \leq p \leq 1$  jener Anteil von  $^{14}\text{C}$  Atomen ist, der im Zeitintervall  $[t, t + \Delta t]$  zerfallen ist.

Aufgrund von Beobachtungen (dies ist also KEIN mathematisches, sondern eine technologisches Argument) ist bekannt, dass

$$p(t, \Delta t, C(t)) = \mu \Delta t + R(t, \Delta t, C(t)) \quad \text{für } \Delta t \downarrow 0,$$

wobei  $\mu \in \mathbb{R}^+$  weder von  $t$  noch von  $C(t)$  abhängt und ausserdem gilt:

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{R(t, \Delta t, C(t))}{\Delta t} = 0. \quad (2)$$

Damit haben wir für alle  $0 < \Delta t \leq \tau$ ,

$$\frac{C(t + \Delta t) - C(t)}{\Delta t} = -\frac{p(t, \Delta t, C(t))}{\Delta t} C(t) = -\mu C(t) - \frac{R(t, \Delta t, C(t))}{\Delta t} C(t).$$

Gemäss (2) berechnen wir

$$\dot{C}(t) = \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{C(t + \Delta t) - C(t)}{\Delta t} = -\mu C(t),$$

dh wir erhalten die skalare ODE der Ordnung 1,

$$\dot{C} + \mu C = 0. \quad (3)$$

Bezüglich der Lösbarkeit dieser ODE gilt der **mathematische**

**Satz 1.** Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$  und sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall. Wir betrachten die ODE

$$y' + \alpha y = 0. \quad (4)$$

Dann gilt:

a1) Ist  $K \in \mathbb{R}$ , so ist

$$y : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(x) = K e^{-\alpha x}$$

eine Lösung von (4),

dh  $y$  ist differenzierbar und  $y'(x) + \alpha y(x) = 0$ ,  $x \in I$ .

a2) Ist  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung von (4), so gibt genau ein  $K \in \mathbb{R}$ , so dass

$$y(x) = K e^{-\alpha x}, \quad x \in I.$$

b) Ist  $x_0 \in I$  und ist  $y_0 \in \mathbb{R}$ , so ist

$$y : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(x) = y_0 e^{-\alpha \cdot (x - x_0)}$$

die einzige Lösung von (4), deren Definitionsbereich gleich  $I$  ist und für die  $y(x_0) = y_0$  gilt.

Wir wissen: Zur Zeit  $t = T_0$  war  $C = C_0$ ,  $C_0$  gleich der konstanten Konzentration von  $^{14}\text{C}$  in der Atmosphäre.

Wir wenden Teil b) von Satz 1 an und erhalten

$$C(t) = C_0 \cdot e^{-\mu \cdot (t - T_0)}, \quad t \in [T_0, T_1], \quad (5)$$

dh die Konzentration von  $^{14}\text{C}$  nimmt in der organischen Probe exponentiell mit der Zeit ab.

Um  $\mu$  angeben zu können, werten wir (5) an  $t$  und  $t + \tau$  aus und wir verwenden (1):

$$C_0 \cdot e^{-\mu(t+\tau-T_0)} = C(t+\tau) = \frac{1}{2}C(t) = \frac{1}{2}C_0 \cdot e^{-\mu(t-T_0)},$$

woraus wir nach elementaren Umformungen erhalten:

$$\mu = \frac{\log(2)}{\tau} = \frac{0,6931\dots}{\tau}.$$

**Frage:** Wie bestimmen wir nun das Alter  $A = T_1 - T_0$ , wenn wir zur Zeit  $T_1$  die Konzentration  $C = C(T_1)$  messen ?

**Antwort:** Aus (5) ergibt sich mit  $C = C(T_1)$ ,  $T_1 - T_0 = -\frac{\log(C/C_0)}{\mu}$ , also

$$A : [\underline{C}, C_0] \rightarrow [0, +\infty[, \quad A(C) = \tau \frac{\log(C_0/C)}{\log(2)} = \tau \frac{\log(C_0/C)}{0,6931\dots}.$$

Die gesuchte Funktion  $A$  ist also eine Standardfunktion.

Das ist nicht der Normalfall.

Beispiele dazu in den Übungen.

Satz 1 ist ein Spezialfall des allgemeineren

**Satz 2.** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und seien  $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Wir betrachten die ODE

$$y' + a(x)y = f(x). \quad (6)$$

Dann gilt:

a1) Ist  $A : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Stammfunktion von  $a$  und ist  $\Gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Stammfunktion von  $f.e^A$ , so ist für jedes  $K \in \mathbb{R}$ , die Funktion

$$y : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(x) = e^{-A(x)} \cdot (K + \Gamma(x))$$

eine Lösung von (6),

dh  $y$  ist differenzierbar und  $y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$ ,  $x \in I$ .

a2) Ist  $A : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Stammfunktion von  $a$ , ist  $\Gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Stammfunktion von  $f.e^A$  und ist  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung von (6), so gibt es genau ein  $K \in \mathbb{R}$ , so dass

$$y(x) = e^{-A(x)} \cdot (K + \Gamma(x)), \quad x \in I.$$

b) Ist  $x_0 \in I$  und ist  $y_0 \in \mathbb{R}$ , so ist

$$y : I \rightarrow \mathbb{R},$$

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^x a(s) ds} \cdot \left( y_0 + \int_{x_0}^x f(\sigma) \cdot e^{\int_{x_0}^{\sigma} a(s) ds} d\sigma \right)$$

die einzige Lösung von (6), deren Definitionsbereich gleich  $I$  ist und für die  $y(x_0) = y_0$  gilt.

**Bemerkung.** In den Lösungsformel von Satz 2 müssen zwei Stammfunktionen bestimmt werden. Dies führt bereits in sehr harmlosen Fällen dazu, dass  $y$  **keine Standardfunktion ist!** MaW: Bereits bei der ODE der Ordnung 1 - (6) - müssen wir damit rechnen, die Lösung nicht mit Standardfunktionen hinschreiben zu können. Beispiele dazu in den Übungen.

## 1. Übung “Differentialgleichungen für Ingenieure”

Ausgabe: 15.04.03

Bearbeitung: 21.04.03-25.04.03

Abgabe: 28.04.03-02.05.03

### 1. Definitionsbereich. Stetige (partielle) Differenzierbarkeit.

Bestimmen Sie den Definitionsbereich folgender Funktionen. Wo sind die Funktionen stetig (partiell) differenzierbar ?

Üa.  $y(x) = xe^x + \cos(x)$ .

Üb.  $u(t) = \frac{1}{c-t}$ ,  $c \in \mathbb{R}$  ist gegeben.

Üc.  $\theta(t, x) = e^{-x^2/t}$ .

Üd.  $f(x, y) = \sqrt{y}$ .

Üe.  $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Ha.  $y(x) = (1+x)e^{-x} \sin(4x)$ .

Hb.  $u(t) = t \log(1+t) - t$ .

Hc.  $\theta(t, x, y) = \frac{x}{\sqrt{t}} e^{-(x^2+y^2)/(4t)}$ .

Hd.  $f(x, y) = \sqrt{|y|}$ .

He.  $z(x) = x|x|$ .

**5 Punkte**

### 2. Funktionen aus definierenden Eigenschaften konstruieren.

Bestimmen Sie Funktionen aus den angegebenen Eigenschaften:

Üa.  $y : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig differenzierbar und

$$y(0) = 0, y'(0) = -3, \quad y(1) = y'(1) = 0, \quad y(2) = 0, y'(2) = 1.$$

Üb.  $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  ist ein Intervall,  $\text{ran } x = \text{ran } y = [0, 1]$ ,

$$x^2(t) + y^4(t) = 4.$$

Ha.  $y : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig, auf jedem Teilintervall  $[0, 1]$ ,  $[1, 2]$ ,  $[2, 3]$  ist  $y$  (affin) linear und

$$y(0) = 1, \quad y(1) = -1, \quad y(2) = 1, \quad y(3) = -1.$$

Hb.  $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  ist ein Intervall,  $\text{ran } x, \text{ran } y \subseteq [0, +\infty[$ ,

$$x^3(t) - y^5(t) = 9.$$

(Hinweis: für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt  $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$ , wobei  $\cosh(t) = (e^t + e^{-t})/2$  und  $\sinh(t) = (e^t - e^{-t})/2$ .)

**6 Punkte**

**3. Partielles Differenzieren. Einsetzen in Differentialgleichungen. Graphen.**

Wir betrachten die "eindimensionale Wellengleichung"

$$\partial_{tt}u = c^2 \partial_{xx}u, \quad u = u(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad (7)$$

wobei  $c \in \mathbb{R}^+$  gegeben ist.

$u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine "Lösung von (7)", wenn  $u$  zweimal partiell differenzierbar ist und  $(\partial_{tt}u)(t, x) = c^2(\partial_{xx}u)(t, x)$ ,  $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ , gilt.

Üa. Zeigen Sie: Sind  $u, v$  Lösungen von (7) und sind  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , so ist auch  $\alpha u + \beta v$  eine Lösung von (7).

Üb. Zeigen Sie: Ist  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und definieren wir

$$u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(t, x) = \phi(x + ct),$$

$$v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad v(t, x) = \phi(x - ct),$$

so sind  $u, v$  Lösungen von (7).

Üc. Zeigen Sie: Ist  $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal differenzierbar, ist  $v_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar, ist  $V_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Stammfunktion von  $v_0$ , so ist  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$u(t, x) = \frac{1}{2}(u_0(x + ct) + u_0(x - ct)) + \frac{1}{2c}(V_0(x + ct) - V_0(x - ct)),$$

eine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung

$$\partial_{tt}u = c^2 \partial_{xx}u, \quad u = u(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2,$$

die folgende "Anfangsbedingungen" erfüllt:

$$u(0, x) = u_0(x), \quad (\partial_t u)(0, x) = v_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

H. Wir setzen

$$u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad u_0(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -\infty < x < -1 \\ (x + 1)^2 \cdot (1 - 2x) & , \quad -1 \leq x \leq 0 \\ (x - 1)^2 \cdot (1 + 2x) & , \quad 0 < x \leq +1 \\ 0 & , \quad +1 < x < +\infty \end{cases}$$

Bestimmen Sie mit Hilfe von Üc. eine Lösung von

$$\partial_{tt}u = \partial_{xx}u, \quad u = u(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2,$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad (\partial_t u)(0, x) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

und skizzieren Sie  $u(t, x)$  für  $t = 0$ ,  $t = 1$ ,  $t = 2$ ,  $t = 3$  und  $t = 4$ . Halten Sie auf Grund dieser Skizzen die Bezeichnung "Wellengleichung" für gerechtfertigt ?

**5 Punkte**

4. **Lösungsformel für  $y' + a(x)y = f(x)$ .**

Finden Sie alle Lösungen  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  folgender ODEs. Welche der ODEs besitzen wenigstens eine Standardfunktion als Lösung ?

Üa.  $y' - xy = 1$ .

Üb.  $y' - xy = x$ .

Ha.  $y' + xy = 1 + x$ .

Hb.  $y' + xy = 1 + x^2$ .

(Hinweis: Keine der vier Funktionen  $x \mapsto e^{\pm x^2}$ ,  $x \mapsto x^2 e^{\pm x^2}$  hat eine Stammfunktion, die eine Standardfunktion ist.)

**4 Punkte**

## 2 Lineare ODE Systeme 1. Ordnung

**Ein Kompartimentmodell für die Medikamentenkonzentration in Blut und Gewebe.** (vgl. H. Heuser, “Gewöhnliche Differentialgleichungen”, BG Teubner Stuttgart, 1989.)

Bei der medikamentösen Behandlung defekter Organe werden Patienten in vorgegebener zeitlicher Abfolge gewisse Dosen eines Pharmakons verabreicht.

Die gewählte Verabreichungsform wird durch eine Funktion  $F$  beschrieben.  $F(t)$  ist die zur Zeit  $t$  zugeführte Masse des Pharmakons pro Volumen und Zeiteinheit. Als Einheit wählen wir Gramm pro (Kubikzentimeter mal Sekunden).

Ziel der Behandlung ist es, in dem defekten Organ das Vorhandensein des Medikaments in bestimmter, zeitabhängiger Konzentration  $c$  (Dimension: Masse pro Volumen, etwa Milligramm pro Kubikzentimeter) sicher zu stellen.  $c(t)$  ist die Konzentration des Medikaments zur Zeit  $t$  in dem defekten Organ.

Wir betrachten orale Dargeichungsformen und nehmen an, dass die Behandlung während eines Zeitintervalls  $[0, T]$  (Zeiteinheiten in Sekunden, bei Beginn der Behandlung drehen wir die Stoppuhr auf Null) erfolgt.

Wir wollen ein Modell für den Zusammenhang von  $F$  und  $c$  entwickeln. Im Rahmen dieser Vorlesung können wir nur ein Prototypmodell vorstellen, i.e. ein Modell, das die wichtigsten Prozesse im Wesentlichen berücksichtigt und genügend Spielraum für Verfeinerungen und Verbesserungen lässt.

Wir lassen uns von den folgenden Vorstellungen leiten.

Durch die orale Dargeichungsform wird das Pharmakon zunächst dem Magen/Darm Trakt zugeführt. Dort wird es verdaut und gelangt in den Blutkreislauf. Ein Teil des Medikaments wird ausgeschieden, ein anderer Teil gelangt in das Gewebe ungleich dem defekten Organ, ein weiterer Teil gelangt tatsächlich in das defekte Organ. Aus dem gesamten Gewebe wird das vorhandene Medikament teilweise wieder ans Blut zurück gegeben.

Wir verwenden die folgenden Notationen:

Funktion	Bezeichnung	Einheit
$F$	Dargeichungskonzentration pro Zeit	$\text{g cm}^{-3} \text{s}^{-1}$
$m$	Konzentration im Magen/Darm Trakt	$\text{g cm}^{-3}$
$b$	Konzentration im Blut	$\text{g cm}^{-3}$
$G$	Konzentration im anderen Gewebe	$\text{g cm}^{-3}$
$c$	Konzentration im defekten Organ	$\text{g cm}^{-3}$

Alle Funktionen haben denselben Definitionsbereich und bilden in die selbe Menge ab:

$$F, m, b, G, c : [0, T] \rightarrow [0, +\infty[.$$

Zur Formulierung eines Prototypmodells des Medikamentenabbaus lassen wir uns von ähnlichen Modellannahmen wie bei der Radiokarbonmethode leiten und nehmen an, dass es positive Konstanten

$$\mu_{mb}, \mu_{b-}, \mu_{bG}, \mu_{bc}, \mu_{Gb}, \mu_{cb}$$

gibt, so dass z.B. für den Abbau des Medikaments im Magen/Darm Trakt gilt:

$$m(t + \Delta t) \approx m(t) - \mu_{mb} \Delta t m(t), \quad \Delta t \downarrow 0,$$

genauer,

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{m(t + \Delta t) - m(t) + \mu_{mb} \Delta t m(t)}{\Delta t} = 0.$$

Für die anderen Abbau- und Aufnahmeprozesse nehmen wir Ähnliches an. Wenn wir ausserdem davon ausgehen, dass sich Abbau und Aufbau des Pharmakons in Blut und Gewebe einfach additiv überlagern, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot{m} &= -\mu_{mb} m + F \\ \dot{b} &= \mu_{mb} m - (\mu_{-b} + \mu_{bG} + \mu_{bc}) b + \mu_{Gb} G + \mu_{cb} c \\ \dot{G} &= \mu_{bG} b - \mu_{Gb} G \\ \dot{c} &= \mu_{bc} b - \mu_{cb} c \end{aligned}$$

Dieses ODE System können wir mit

$$\mu_b = \mu_{-b} + \mu_{bG} + \mu_{bc}$$

unter Verwendung der Matrixnotation wesentlich gefälliger schreiben.

$$\begin{pmatrix} \dot{m} \\ \dot{b} \\ \dot{G} \\ \dot{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu_{mb} & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{mb} & -\mu_b & \mu_{Gb} & \mu_{cb} \\ 0 & \mu_{bG} & -\mu_{Gb} & 0 \\ 0 & \mu_{bc} & 0 & -\mu_{cb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \\ G \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Setzen wir

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} m \\ b \\ G \\ c \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} -\mu_{mb} & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{mb} & -\mu_b & \mu_{Gb} & \mu_{cb} \\ 0 & \mu_{bG} & -\mu_{Gb} & 0 \\ 0 & \mu_{bc} & 0 & -\mu_{cb} \end{pmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

so machen sich diese Abkürzungen insofern bezahlt, als damit (8) *noch* kompakter geschrieben werden kann.

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \mathbf{M} \cdot \vec{u} + \vec{f}(t).$$

Damit beenden wir die prototypische Modellierung.

Es erheben sich nun mehrere Fragen:

1. Ist (8) lösbar ?  
Wenn (8) lösbar ist: Wieviele Lösungen besitzt (8) ?
2. Wenn (8) mehrere Lösungen besitzt: Welche dieser Lösungen ist die “richtige” Lösung ?
3. Die Koeffizienten der Matrix von (8) sind nicht ganz genau bekannt - muss befürchtet werden, dass sich die “richtige” Lösung von (8) bei kleinen Änderungen der Koeffizienten dramatisch ändert oder bleibt diese ungefähr gleich ?
4. Wie kann der Zusammenhang von  $F$  und  $c$  mit Hilfe von (8) berechnet werden ?
5. Wie schnell wird das Medikament nach Beendigung der Behandlung im gesamten Gewebe abgebaut (wird es überhaupt abgebaut) ?

Die Beantwortung dieser Fragen wird uns im Folgenden - in allgemeinerem Rahmen - beschäftigen.

Einige, teilweise Antworten können wir aber schon jetzt geben.

1. Wie wir in Satz 3 im Abschnitt “ $\vec{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \vec{y} + \vec{f}(x)$ ” sehen werden, besitzt (8) für stetiges  $F$  unendlich viele Lösungen.
2. Unter den unendlich vielen Lösungen von (8) gibt es genau eine Lösung, die zu einem vorgegebenen Zeitpunkt  $t_0$  - etwa  $t_0 = 0$  - einen bestimmten Wert - etwa  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  - annimmt. Genauer dazu im Abschnitt “ $\vec{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \vec{y} + \vec{f}(x)$ ”.
3. Die Lösung hängt gutartig von kleinen Störungen der Koeffizienten ab. Dies wird im Abschnitt “Kleine Störungen von  $\vec{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \vec{y} + \vec{f}(x)$ ” genauer behandelt.
4. Die Funktion  $F$  können wir als Standardfunktion - stetig, stückweise linear - modellieren. Dennoch ist die uns interessierende Lösung von (8) kein Vektor bestehend aus Standardfunktionen. Die Berechnung erfolgt numerisch. Genauer dazu im Abschnitt “Numerische Verfahren zur Lösung von ODE Systemen 1. Ordnung”.
5. Der Abbau erfolgt exponentiell schnell. Dies werden wir im Abschnitt “Stabilität von  $\vec{z}' = \mathbf{A} \cdot \vec{z}$ ” sehen.

## 2.1 $\vec{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \vec{y} + \vec{f}(x)$

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit Linearen ODE Systemen der Ordnung 1 mit variablen Koeffizienten.

**Beispiel.** Ein derartiges System lernten wir bereits im vorigen Abschnitt kennen:

$$\begin{pmatrix} \dot{m} \\ \dot{b} \\ \dot{G} \\ \dot{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu_{mb} & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{mb} & -\mu_b & \mu_{Gb} & \mu_{cb} \\ 0 & \mu_{bG} & -\mu_{Gb} & 0 \\ 0 & \mu_{bc} & 0 & -\mu_{cb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \\ G \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

wobei  $\mu_{mb}, \dots, \mu_{cb} \in \mathbb{R}^+$  und  $F : [0, T] \rightarrow [0, +\infty[$  (mit vorgeschriebenem  $T \in \mathbb{R}^+$ ) gegeben sind.

Um Systeme wie (9) adäquat beschreiben zu können, benötigen wir den Begriff der “ $p \times q$  wertigen Funktion”.

Eine  $p \times q$  **wertige Funktion** ist eine Abbildung  $\mathbf{A} : I \rightarrow \mathbb{R}^{p \times q}$ , bei der jedem  $x$  aus einem Intervall  $I$  eine  $p \times q$ -Matrix

$$\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(x) & \dots & a_{1,q}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p,1}(x) & \dots & a_{p,q}(x) \end{pmatrix}$$

zugeordnet wird, dh  $\mathbf{A}$  besteht aus einer matrixartigen Anordnung der  $p \cdot q$  Funktionen

$$a_{1,1}, \dots, a_{p,q} : I \rightarrow \mathbb{R}.$$

### Beispiele.

- Eine Illustration:

$$\mathbf{A} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}, \mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} \sin(x) & \cos(x) \\ 1 & x \end{pmatrix}.$$

- Der Definitionsbereich ist ein Intervall, die  $p \times q$  Funktion kann anders als mit “ $\mathbf{A}$ ” bezeichnet werden und die unabhängige Variable kann mit einem anderen Buchstaben als “ $x$ ”, zB mit “ $t$ ” bezeichnet werden.

$$\mathbf{B} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{4 \times 2}, \mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} \log(1+t^2) & \sqrt{1-t} \\ 1 & e^t \\ \cos(t^2) & \cos^2(t) \\ 3-4t & 1/(2-t) \end{pmatrix}.$$

- In dieser Vorlesung haben wir es hauptsächlich mit quadratischen Matrizen zu tun. Entsprechend sind  $p \times p$  wertige Funktionen besonders wichtig.

$$\mathbf{W} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}, \mathbf{W}(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Mitunter kommt es vor, dass die  $p \times q$  wertige Funktion nur aus konstanten Einträgen besteht. Dann hängt die  $p \times q$  wertige Funktion nicht von der Variablen - zB "t" - ab. Ein Beispiel hierfür lernten wir beim Kompartimentmodell kennen.

$$\mathbf{M} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{4 \times 4}, \mathbf{M}(t) = \begin{pmatrix} -\mu_{mb} & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{mb} & -\mu_b & \mu_{Gb} & \mu_{cb} \\ 0 & \mu_{bG} & -\mu_{Gb} & 0 \\ 0 & \mu_{bc} & 0 & -\mu_{cb} \end{pmatrix},$$

wobei  $\mu_{mb}, \dots, \mu_{cb} \in \mathbb{R}$  gegeben sind.

Im Folgenden nehmen wir an, dass gegeben ist:

- Ein Intervall  $I$ , etwa  $I = \mathbb{R}$  oder  $I = [0, +\infty[$  oder  $I = [0, 1]$ .
- Eine natürliche Zahl  $n \geq 1$ , etwa  $n = 2$  oder  $n = 4$ .
- Eine  $n \times n$  wertige Funktion  $\mathbf{A} : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ,

$$\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(x) & \dots & a_{1,n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}(x) & \dots & a_{n,n}(x) \end{pmatrix}$$

bestehend aus  $n^2$  Funktionen

$$a_{1,1}, \dots, a_{n,n} : I \rightarrow \mathbb{R}.$$

- Eine "Inhomogenität"

$$\vec{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \vec{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix},$$

bestehend aus  $n$  Funktionen

$$f_1, \dots, f_n : I \rightarrow \mathbb{R}.$$

Wir betrachten

$$\vec{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \vec{y} + \vec{f}(x), \quad \vec{y} = \vec{y}(x), \quad x \in I. \quad (10)$$

**Ziel:** Wir wollen uns einen Überblick über die Lösungsmenge von (10) verschaffen.

Dazu benötigen wir den Begriff "Lösung von (10)".



**Satz 3.** Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall. Die  $n \times n$  wertige Funktion  $\mathbf{A} : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  sei stetig (dh die  $n^2$  Funktionen  $a_{1,1}, \dots, a_{n,n} : I \rightarrow \mathbb{R}$  seien stetig) und die Funktion  $\vec{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei stetig (dh die  $n$  Funktionen  $f_1, \dots, f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$  seien stetig). Dann gilt:

a) Das lineare ODE System 1. Ordnung

$$\vec{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \vec{y} + \vec{f}(x), \quad \vec{y} = \vec{y}(x), \quad x \in I \quad (11)$$

besitzt unendlich viele Lösungen.

b1) Das homogene System von (11), das aus (11) durch Weglassen der Inhomogenität  $\vec{f}$  entsteht,

$$\vec{z}' = \mathbf{A}(x) \cdot \vec{z}, \quad \vec{z} = \vec{z}(x), \quad x \in I \quad (12)$$

besitzt unendlich viele Lösungen.

b2) Es gibt  $n$  linear unabhängige Lösungen  $\vec{z}(1), \dots, \vec{z}(n)$  des homogenen Systems (12).

b3) Sind  $\vec{z}(1), \dots, \vec{z}(n)$  linear unabhängige Lösungen des homogenen Systems (12), so ist die Lösungsmenge von (12) gegeben durch

$$\vec{z} = c_1 \vec{z}(1) + \dots + c_n \vec{z}(n), \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}.$$

c1) Ist  $\vec{y}_p$  eine Lösung des inhomogenen Systems (11) und ist  $\vec{z}$  eine Lösung des homogenen Systems (12), so ist für jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$  auch

$$\vec{y}_p + \lambda \vec{z}$$

eine Lösung des inhomogenen Systems (11), im Speziellen sind  $\vec{y}_p \pm \vec{z}$  Lösungen des inhomogenen Systems (11).

c2) Ist  $\vec{y}_p$  eine Lösung des inhomogenen Systems (11) und sind  $\vec{z}(1), \dots, \vec{z}(n)$  linear unabhängige Lösungen des homogenen Systems (12), so ist die Lösungsmenge des inhomogenen Systems (11) gegeben durch

$$\vec{y}_p + c_1 \vec{z}(1) + \dots + c_n \vec{z}(n), \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}.$$

d) Ist  $x_0 \in I$  und ist  $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$ , so hat das Anfangswertproblem

$$\vec{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \vec{y} + \vec{f}(x), \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0, \quad x \in I \quad (13)$$

genau eine Lösung, dh es gibt genau eine Lösung von (11) mit  $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$ .

### Bemerkungen zu Satz 3.

- Die gute Nachricht von Satz 3 ist: Das lineare ODE System 1. Ordnung ist lösbar, es besitzt sogar unendlich viele Lösungen und wenn wir an einer Stelle  $x_0 \in I$  den Funktionswert  $\vec{y}_0$  vorschreiben, so gibt es genau eine Lösung von (13), i.e. es gibt genau eine Lösung von (11), die diese Zusatzbedingung erfüllt.
- Die weniger gute Nachricht ist: Es ist aus Satz 3 kein Rechenverfahren zur Bestimmung der Lösung von (13) extrahierbar. Das ist kein Zufall, denn nur in ganz speziellen Fällen ist die Lösung von (13) ein Vektor von Standardfunktionen.
- Kehren wir zu dem Kompartimentmodell (8) zurück. Es folgt aus Satz 3, dass die Modellgleichungen (8) unendlich viele Lösungen besitzen. Welche ist nun die richtige Lösung? Wir gehen davon aus, dass zum Zeitpunkt  $t = 0$  die Behandlung erstmalig eingesetzt wird. Zu diesem Zeitpunkt befindet sich noch kein Medikament im Organismus des Patienten, dh wir haben

$$m(0) = b(0) = G(0) = c(0) = 0.$$

Damit wird aus (8) das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} \dot{m} \\ \dot{b} \\ \dot{G} \\ \dot{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu_{mb} & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{mb} & -\mu_b & \mu_{Gb} & \mu_{cb} \\ 0 & \mu_{bG} & -\mu_{Gb} & 0 \\ 0 & \mu_{bc} & 0 & -\mu_{cb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \\ G \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} m(0) \\ b(0) \\ G(0) \\ c(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, T], \quad (14)$$

wobei  $\mu_{mb}, \dots, \mu_{cb} \in \mathbb{R}^+$  und  $F$  (mit vorgeschriebenem  $T \in \mathbb{R}^+$ ) gegeben sind.

- Das Kompartimentmodell (8) hat eine sehr spezielle Eigenschaft: Die Koeffizientenmatrix  $\mathbf{M}$  ist konstant. In diesem Fall gibt es ein Verfahren, das es zumindest theoretisch erlaubt,  $n$  linear unabhängige Lösungen des homogenen Systems zu ermitteln. Dieses Verfahren wollen wir im nächsten Abschnitt kennen lernen.

## 2.2 $\vec{z}' = \mathbf{A} \cdot \vec{z}$

In diesem Abschnitt betrachten wir homogene ODE Systeme mit konstanten Koeffizienten. In diese Klasse von ODE Systemen fallen beispielsweise die Systeme

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix},$$

dh nachdem dieses Kapitel gelernt wurde, sollte Einiges über derartige Systeme gewusst werden.

Im Folgenden nehmen wir an, dass gegeben ist:

- Ein Intervall  $I$ , etwa  $I = \mathbb{R}$  oder  $I = [0, +\infty[$  oder  $I = [0, 1]$ .
- Eine natürliche Zahl  $n \geq 1$ , etwa  $n = 2$  oder  $n = 4$ .
- Eine  $n \times n$  Matrix  $\mathbf{A}$ ,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-2,1} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

wobei die  $n^2$  Zahlen  $a_{1,1}, \dots, a_{n,n}$  reell sind.

Wir betrachten

$$\vec{z}' = \mathbf{A} \cdot \vec{z}, \quad \vec{z} = \vec{z}(x), \quad x \in I. \quad (15)$$

**Ziel:** Wir wollen die **Eigenwertmethode** zur Lösung von (15) kennen lernen. Dabei handelt es sich um ein Verfahren, mit dem alle Lösungen von (15) - zumindest theoretisch - gefunden werden können.

Wir wiederholen:



### 2.2.1 Eigenwertmethode für $\vec{z}' = \mathbf{A} \cdot \vec{z}$ . Beispiel.

**1.Schritt Eigenwertmethode:** Wir bestimmen von  $\mathbf{A}$  alle Eigenwerte und deren Vielfachheiten. Dies geschieht durch Faktorisierung oder durch Nullsetzen des charakteristischen Polynoms.

**Beispiel.** Wir betrachten die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Charakteristisches Polynom:

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -1 - \lambda & -7 & 5 \\ 0 & 1 - \lambda & -1 \\ 0 & 1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (-1 - \lambda) \cdot [(1 - \lambda) \cdot (3 - \lambda) + 1] = (-\lambda - 1) \cdot (4 - 4\lambda + \lambda^2) \\ &= (-\lambda - 1) \cdot (2 - \lambda)^2 = -(\lambda + 1) \cdot (\lambda - 2)^2 \\ &= -(\lambda - (-1)) \cdot (\lambda - 2)^2. \end{aligned}$$

Also hat  $\mathbf{A}$  zwei Eigenwerte, nämlich  $\lambda_1 = -1$  und  $\lambda_2 = 2$ .  
 $-1$  ist ein 1-facher Eigenwert,  $2$  ist ein 2-facher Eigenwert.

**2.Schritt Eigenwertmethode:** Wir treffen einen Ansatz für die Lösung von (15). Dieser Ansatz enthält  $n^2$  Variable und hängt von den Eigenwerten von  $\mathbf{A}$  und von deren Vielfachheiten ab.

**Beispiel.** Der Ansatz lautet

$$\begin{aligned} \vec{z}(x) &= \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ z_3(x) \end{pmatrix} = e^{\lambda_1 x} \begin{pmatrix} p_{1,1}(x) \\ p_{1,2}(x) \\ p_{1,3}(x) \end{pmatrix} + e^{\lambda_2 x} \begin{pmatrix} p_{2,1}(x) \\ p_{2,2}(x) \\ p_{2,3}(x) \end{pmatrix} \\ &= e^{(-1) \cdot x} \begin{pmatrix} p_{1,1}(x) \\ p_{1,2}(x) \\ p_{1,3}(x) \end{pmatrix} + e^{2x} \begin{pmatrix} p_{2,1}(x) \\ p_{2,2}(x) \\ p_{2,3}(x) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei  $p_{1,1}, p_{1,2}, p_{1,3}, p_{2,1}, p_{2,2}, p_{2,3}$  Polynome sind. Der maximale Grad der Polynome hängt von der Vielfachheit der Eigenwerte ab.

- $-1$  ist ein 1-facher Eigenwert. Also ist der maximale Grad der Polynome  $p_{1,1}, p_{1,2}, p_{1,3}$  gleich  $1 - 1 = 0$ , dh  $p_{1,1}, p_{1,2}, p_{1,3}$  sind Konstante:

$$p_{1,1} = A_1, \quad p_{1,2} = A_2, \quad p_{1,3} = A_3.$$

- $2$  ist ein 2-facher Eigenwert. Also ist der maximale Grad der Polynome  $p_{2,1}, p_{2,2}, p_{2,3}$  gleich  $2 - 1 = 1$ , dh

$$p_{2,1} = B_1 + D_1 x, \quad p_{2,2} = B_2 + D_2 x, \quad p_{2,3} = B_3 + D_3 x.$$

Wir erhalten somit den Ansatz in den  $9 = 3^2$  Unbekannten  $A_j, B_j, D_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ :

$$\vec{z}(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \\ z_3(x) \end{pmatrix} = e^{-x} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} + e^{2x} \begin{pmatrix} B_1 + D_1x \\ B_2 + D_2x \\ B_3 + D_3x \end{pmatrix}. \quad (16)$$

**3.Schritt Eigenwertmethode:**  $\vec{z}$  vom 2.Schritt wird in (15) eingesetzt und die entstehenden Terme werden in übersichtlicher Form zusammengefasst.

**Beispiel.** Wir berechnen  $\vec{z}'(x)$ ,

$$\vec{z}'(x) = e^{-x} \begin{pmatrix} -A_1 \\ -A_2 \\ -A_3 \end{pmatrix} + e^{2x} \begin{pmatrix} 2B_1 + D_1 + 2D_1x \\ 2B_2 + D_2 + 2D_2x \\ 2B_3 + D_3 + 2D_3x \end{pmatrix}, \quad (17)$$

dann berechnen wir  $\mathbf{A} \cdot \vec{z}(x)$ , wobei wir die Rechenregeln der Matrixmultiplikation und die Abkürzungen

$$\vec{p}_1(x) = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2(x) = \begin{pmatrix} B_1 + D_1x \\ B_2 + D_2x \\ B_3 + D_3x \end{pmatrix}$$

verwenden. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \vec{z}(x) &= \mathbf{A} \cdot (e^{-x}\vec{p}_1(x) + e^{2x}\vec{p}_2(x)) = e^{-x} \mathbf{A} \cdot \vec{p}_1(x) + e^{2x} \mathbf{A} \cdot \vec{p}_2(x) \\ &= e^{-x} \begin{pmatrix} -1 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \\ &+ e^{2x} \begin{pmatrix} -1 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 + D_1x \\ B_2 + D_2x \\ B_3 + D_3x \end{pmatrix} \\ &= e^{-x} \begin{pmatrix} -A_1 - 7A_2 + 5A_3 \\ A_2 - A_3 \\ A_2 + 3A_3 \end{pmatrix} \\ &+ e^{2x} \begin{pmatrix} -B_1 - 7B_2 + 5B_3 + (-D_1 - 7D_2 + 5D_3)x \\ B_2 - B_3 + (D_2 - D_3)x \\ B_2 + 3B_3 + (D_2 + 3D_3)x \end{pmatrix}. \quad (18) \end{aligned}$$

Wegen  $\vec{z}'(x) = \mathbf{A} \cdot \vec{z}(x)$  ergibt sich aus (17) und (18) die durchaus

beeindruckende Gleichung

$$\begin{aligned}
 e^{-x} \begin{pmatrix} -A_1 \\ -A_2 \\ -A_3 \end{pmatrix} + e^{2x} \begin{pmatrix} 2B_1 + D_1 + 2D_1x \\ 2B_2 + D_2 + 2D_2x \\ 2B_3 + D_3 + 2D_3x \end{pmatrix} \\
 = e^{-x} \begin{pmatrix} -A_1 - 7A_2 + 5A_3 \\ A_2 - A_3 \\ A_2 + 3A_3 \end{pmatrix} \\
 + e^{2x} \begin{pmatrix} -B_1 - 7B_2 + 5B_3 + (-D_1 - 7D_2 + 5D_3)x \\ B_2 - B_3 + (D_2 - D_3)x \\ B_2 + 3B_3 + (D_2 + 3D_3)x \end{pmatrix}. \quad (19)
 \end{aligned}$$

**4.Schritt Eigenwertmethode:** Aus der im 3.Schritt erhaltenen Gleichung extrahieren wir durch Koeffizientenvergleich  $n^2$  Gleichungen in den  $n^2$  Unbekannten des Ansatzes. Es ergibt sich ein *homogenes, lineares Gleichungssystem mit  $n^2$  Variablen*.

**Beispiel.** Die Vektoren, deren Koeffizienten gleiche Exponentialterme aufweisen, müssen gleich sein. Wir erhalten

$$\begin{pmatrix} -A_1 \\ -A_2 \\ -A_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_1 - 7A_2 + 5A_3 \\ A_2 - A_3 \\ A_2 + 3A_3 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 2B_1 + D_1 + 2D_1x \\ 2B_2 + D_2 + 2D_2x \\ 2B_3 + D_3 + 2D_3x \end{pmatrix} \\
 & = \begin{pmatrix} -B_1 - 7B_2 + 5B_3 + (-D_1 - 7D_2 + 5D_3)x \\ B_2 - B_3 + (D_2 - D_3)x \\ B_2 + 3B_3 + (D_2 + 3D_3)x \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich ergeben sich 9 Gleichungen in  $A_1, \dots, D_3$ :

$$\begin{aligned}
 -A_1 &= -A_1 - 7A_2 + 5A_3 \\
 -A_2 &= A_2 - A_3 \\
 -A_3 &= A_2 + 3A_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2B_1 + D_1 &= -B_1 - 7B_2 + 5B_3 \\
 2B_2 + D_2 &= B_2 - B_3 \\
 2B_3 + D_3 &= B_2 + 3B_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2D_1 &= -D_1 - 7D_2 + 5D_3 \\
 2D_2 &= D_2 - D_3 \\
 2D_3 &= D_2 + 3D_3
 \end{aligned}$$

Wir erhalten durch Umordnung

$$\begin{aligned} 7A_2 - 5A_3 &= 0 \\ 2A_2 - A_3 &= 0 \\ A_2 + 4A_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3D_1 + 7D_2 - 5D_3 &= 0 \\ D_2 + D_3 &= 0 \\ D_2 + D_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3B_1 + 7B_2 - 5B_3 + D_1 &= 0 \\ B_2 + B_3 + D_2 &= 0 \\ B_2 + B_3 - D_3 &= 0 \end{aligned}$$

**5.Schritt Eigenwertmethode:** Wir bestimmen die allgemeine Lösung des homogenen, linearen Gleichungssystems vom 4.Schritt. Die allgemeine Lösung enthält  $n$  freie Parameter  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ . Wir setzen die nunmehr identifizierten Koeffizienten in den Ansatz ein und schreiben  $\vec{z}$  als

$$\vec{z} = c_1 \vec{z}(1) + \dots + c_n \vec{z}(n), \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R},$$

wobei  $\vec{z}(1), \dots, \vec{z}(n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  linear unabhängige Lösungen von (15) sind, also ein **Fundamentalsystem** von (15) bilden.

**Beispiel.** Wir sehen sofort

$$\begin{aligned} A_1 \in \mathbb{R}, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = 0, \\ D_1 = 4D_3, \quad D_2 = -D_3, \quad D_3 \in \mathbb{R}, \\ B_1 = 4B_3 - \frac{11}{3}D_3, \quad B_2 = -B_3 + D_3, \quad B_3, D_3 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Wir definieren

$$c_1 = A_1, \quad c_2 = B_3, \quad c_3 = \frac{1}{3}D_3,$$

so dass

$$\begin{aligned} A_1 &= c_1 \\ A_2 &= 0 \\ A_3 &= 0 \\ B_1 &= 4c_2 - 11c_3 \\ B_2 &= -c_2 + 3c_3 \\ B_3 &= c_2 \\ D_1 &= 12c_3 \\ D_2 &= -3c_3 \\ D_3 &= 3c_3 \end{aligned}$$

und schliesslich

$$\vec{z}(x) = c_1 e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{2x} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{2x} \begin{pmatrix} -11 + 12x \\ 3 - 3x \\ 3x \end{pmatrix},$$

$c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$

Wir erkennen das Fundamentalsystem

$$\text{FS} = \left\{ \begin{pmatrix} e^{-x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4e^{2x} \\ -e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (-11 + 12x)e^{2x} \\ (3 - 3x)e^{2x} \\ 3xe^{2x} \end{pmatrix} \right\}.$$

### 6.Schritt Eigenwertmethode (nur bei Anfangswertproblemen).

Seien  $x_0 \in I$  und  $\vec{z}_0 \in \mathbb{R}^n$  gegeben. Unter den unendlich vielen Lösungen von  $\vec{z}' = \mathbf{A} \cdot \vec{z}$  gibt es genau eine, die  $\vec{z}(x_0) = \vec{z}_0$  erfüllt. Diese Lösung finden wir durch Anpassung der freien Parameter  $c_1, \dots, c_n$  vom 5.Schritt. Wir erhalten ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem zur Bestimmung von  $c_1, \dots, c_n$ . Berechnen dieser eindeutigen Lösung und Einsetzen in die allgemeine Form vom 5.Schritt ergibt die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems.

**Beispiel.** Wir suchen die Lösung von

$$\vec{z}' = \begin{pmatrix} -1 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \vec{z}, \quad \vec{z}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Gemäss des 5.Schrittes wissen wir

$$\begin{aligned} \vec{z}(0) &= c_1 e^{-0} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{2 \cdot 0} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 e^{2 \cdot 0} \begin{pmatrix} -11 + 12 \cdot 0 \\ 3 - 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -11 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 + 4c_2 - 11c_3 \\ -c_2 + 3c_3 \\ c_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (20)$$

Andrerseits soll gelten

$$\vec{z}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad (21)$$

Wir erhalten aus (20), (21) das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_1 + 4c_2 - 11c_3 &= 2 \\ -c_2 + 3c_3 &= 0, \\ c_2 &= 3 \end{aligned}$$

dessen eindeutige Lösung offenbar  $c_1 = 1, c_2 = 3, c_3 = 1$  ist.

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\vec{z}(x) &= 1 \cdot e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3e^{2x} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot e^{2x} \begin{pmatrix} -11 + 12x \\ 3 - 3x \\ 3x \end{pmatrix} \\ &= e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{2x} \begin{pmatrix} 1 + 12x \\ -3x \\ 3 + 3x \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

## 2.2.2 Eigenwertmethode für $\vec{z}' = \mathbf{A} \cdot \vec{z}$ . Allgemein.

**1.Schritt Eigenwertmethode:** Wir bestimmen von  $\mathbf{A}$  alle Eigenwerte und deren Vielfachheiten. Dies geschieht durch Faktorisierung oder durch Nullsetzen des charakteristischen Polynoms.

$$P(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}_n) = \pm(\lambda - \lambda_1)^{K_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{K_r} \\ \cdot (\lambda - (\kappa_1 + i.\omega_1))^{K_{r+1}} (\lambda - (\kappa_1 - i.\omega_1))^{K_{r+1}} \dots \\ \cdot (\lambda - (\kappa_s + i.\omega_s))^{K_{r+s}} (\lambda - (\kappa_s - i.\omega_s))^{K_{r+s}},$$

wobei

- $1 \leq K_1, \dots, K_{r+s}$  die Vielfachheiten der jeweiligen Eigenwerte sind,
- $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  reelle und paarweise verschiedene Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  mit den Vielfachheiten  $K_1, \dots, K_r$  sind,
- $\mu_1, \dots, \mu_s \in \mathbb{R}$  die Realteile der nicht-reellen Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  sind,
- $0 < \omega_1, \dots, \omega_s \in \mathbb{R}$  die positiv gewählten Imaginärteile der nicht-reellen Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  sind,
- die komplexen Zahlen  $\mu_1 \pm i.\omega_1, \dots, \mu_s \pm i.\omega_s$  die paarweise verschiedenen nicht-reellen Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  mit den Vielfachheiten  $K_{r+1}, \dots, K_{r+s}$  sind.

**Achtung:**

- $\mathbf{A}$  kann auch gar keine reellen Eigenwerte haben. Dann ist  $r = 0$ .
- $\mathbf{A}$  kann auch nur reelle Eigenwerte haben (siehe Beispiel). Dann ist  $s = 0$ .

**2.Schritt Eigenwertmethode:** Wir treffen einen Ansatz für die Lösung von (15). Dieser Ansatz enthält  $n^2$  Variable und hängt von den Eigenwerten von  $\mathbf{A}$  und von deren Vielfachheiten ab.

Der Ansatz ist

$$\vec{z}(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ \vdots \\ z_n(x) \end{pmatrix} = e^{\lambda_1 x} \begin{pmatrix} p_{1,1}(x) \\ \vdots \\ p_{1,n}(x) \end{pmatrix} + \dots + e^{\lambda_r x} \begin{pmatrix} p_{r,1}(x) \\ \vdots \\ p_{r,n}(x) \end{pmatrix} \\ + e^{\mu_1 x} \cos(\omega_1 x) \begin{pmatrix} Q_{1,1}(x) \\ \vdots \\ Q_{1,n}(x) \end{pmatrix} + \dots + e^{\mu_s x} \cos(\omega_s x) \begin{pmatrix} Q_{s,1}(x) \\ \vdots \\ Q_{s,n}(x) \end{pmatrix} \\ + e^{\mu_1 x} \sin(\omega_1 x) \begin{pmatrix} R_{1,1}(x) \\ \vdots \\ R_{1,n}(x) \end{pmatrix} + \dots + e^{\mu_s x} \sin(\omega_s x) \begin{pmatrix} R_{s,1}(x) \\ \vdots \\ R_{s,n}(x) \end{pmatrix},$$

wobei  $p_{1,1}, \dots, p_{r,n}, Q_{1,1}, \dots, Q_{s,n}, R_{1,1}, \dots, R_{s,n}$  Polynome sind. Der maximale Grad dieser Polynome hängt von den Vielfachheiten der Eigenwerte ab:

- Maximalgrad von  $p_{1,1}, \dots, p_{1,n}$  gleich  $K_1 - 1$ .  $K_1$  ist Vielfachheit vom Eigenwert  $\lambda_1$ .
- $\vdots$
- Maximalgrad von  $p_{r,1}, \dots, p_{r,n}$  gleich  $K_r - 1$ .  $K_r$  ist Vielfachheit vom Eigenwert  $\lambda_r$ .
- Maximalgrad von  $Q_{1,1}, \dots, Q_{1,n}$  gleich  $K_{r+1} - 1$ .  $K_{r+1}$  ist Vielfachheit vom Eigenwert  $\mu_1 + i\omega_1$ .
- $\vdots$
- Maximalgrad von  $Q_{s,1}, \dots, Q_{s,n}$  gleich  $K_{r+s} - 1$ .  $K_{r+s}$  ist Vielfachheit vom Eigenwert  $\mu_s + i\omega_s$ .
- Maximalgrad von  $R_{1,1}, \dots, R_{1,n}$  gleich  $K_{r+1} - 1$ .  $K_{r+1}$  ist Vielfachheit vom Eigenwert  $\mu_1 + i\omega_1$ .
- $\vdots$
- Maximalgrad von  $R_{s,1}, \dots, R_{s,n}$  gleich  $K_{r+s} - 1$ .  $K_{r+s}$  ist Vielfachheit vom Eigenwert  $\mu_s + i\omega_s$ .

Damit enthält der Ansatz ...

- ... für  $p_{1,1}, \dots, p_{1,n}$  genau  $K_1$  Unbekannte.
- $\vdots$
- ... für  $p_{r,1}, \dots, p_{r,n}$  genau  $K_r$  Unbekannte.
- ... für  $Q_{1,1}, \dots, Q_{1,n}$  genau  $K_{r+1}$  Unbekannte.
- $\vdots$
- ... für  $Q_{s,1}, \dots, Q_{s,n}$  genau  $K_{r+s}$  Unbekannte.
- ... für  $R_{1,1}, \dots, R_{1,n}$  genau  $K_{r+1}$  Unbekannte.
- $\vdots$
- ... für  $R_{s,1}, \dots, R_{s,n}$  genau  $K_{r+s}$  Unbekannte.

**3.Schritt Eigenwertmethode:**  $\vec{z}$  vom 2.Schritt wird in (15) eingesetzt und die entstehenden Terme werden in übersichtlicher Form zusammengefasst.

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
& e^{\lambda_1 x} \begin{pmatrix} p_{1,1}^*(x) \\ \vdots \\ p_{1,n}^*(x) \end{pmatrix} + \dots + e^{\lambda_r x} \begin{pmatrix} p_{r,1}^*(x) \\ \vdots \\ p_{r,n}^*(x) \end{pmatrix} \\
& + e^{\mu_1 x} \cos(\omega_1 x) \begin{pmatrix} Q_{1,1}^*(x) \\ \vdots \\ Q_{1,n}^*(x) \end{pmatrix} + \dots + e^{\mu_s x} \cos(\omega_s x) \begin{pmatrix} Q_{s,1}^*(x) \\ \vdots \\ Q_{s,n}^*(x) \end{pmatrix} \\
& + e^{\mu_1 x} \sin(\omega_1 x) \begin{pmatrix} R_{1,1}^*(x) \\ \vdots \\ R_{1,n}^*(x) \end{pmatrix} + \dots + e^{\mu_s x} \sin(\omega_s x) \begin{pmatrix} R_{s,1}^*(x) \\ \vdots \\ R_{s,n}^*(x) \end{pmatrix} \\
& = e^{\lambda_1 x} \begin{pmatrix} p_{1,1}^\circ(x) \\ \vdots \\ p_{1,n}^\circ(x) \end{pmatrix} + \dots + e^{\lambda_r x} \begin{pmatrix} p_{r,1}^\circ(x) \\ \vdots \\ p_{r,n}^\circ(x) \end{pmatrix} \\
& + e^{\mu_1 x} \cos(\omega_1 x) \begin{pmatrix} Q_{1,1}^\circ(x) \\ \vdots \\ Q_{1,n}^\circ(x) \end{pmatrix} + \dots + e^{\mu_s x} \cos(\omega_s x) \begin{pmatrix} Q_{s,1}^\circ(x) \\ \vdots \\ Q_{s,n}^\circ(x) \end{pmatrix} \\
& + e^{\mu_1 x} \sin(\omega_1 x) \begin{pmatrix} R_{1,1}^\circ(x) \\ \vdots \\ R_{1,n}^\circ(x) \end{pmatrix} + \dots + e^{\mu_s x} \sin(\omega_s x) \begin{pmatrix} R_{s,1}^\circ(x) \\ \vdots \\ R_{s,n}^\circ(x) \end{pmatrix}, \quad (22)
\end{aligned}$$

wobei die Polynome  $p_{1,1}^*, \dots, R_{s,n}^*$  und  $p_{1,1}^\circ, \dots, R_{s,n}^\circ$  den gleichen Grad wie  $p_{1,1}, \dots, R_{s,n}$  haben.

**4.Schritt Eigenwertmethode:** Aus der im 3.Schritt erhaltenen Gleichung extrahieren wir durch Koeffizientenvergleich  $n^2$  Gleichungen in den  $n^2$  Unbekannten des Ansatzes. Es ergibt sich ein *homogenes, lineares Gleichungssystem mit  $n^2$  Variablen*.

Die Vektoren von (22), deren Koeffizienten gleiche Exponentialterme aufweisen, müssen gleich sein. Wir erhalten

$$\begin{array}{ll}
p_{1,1}^*(x) = p_{1,1}^\circ(x) & p_{r,1}^*(x) = p_{r,1}^\circ(x) \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
p_{1,n}^*(x) = p_{1,n}^\circ(x) & p_{r,n}^*(x) = p_{r,n}^\circ(x) \\
Q_{1,1}^*(x) = Q_{1,1}^\circ(x) & Q_{s,1}^*(x) = Q_{s,1}^\circ(x) \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
Q_{1,n}^*(x) = Q_{1,n}^\circ(x) & Q_{s,n}^*(x) = Q_{s,n}^\circ(x)
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
R_{1,1}^*(x) & = & R_{1,1}^\circ(x) & & R_{s,1}^*(x) & = & R_{s,1}^\circ(x) \\
\vdots & \vdots & \vdots & , & \dots & , & \vdots & \vdots & \vdots \\
R_{1,n}^*(x) & = & R_{1,n}^\circ(x) & & R_{s,n}^*(x) & = & R_{s,n}^\circ(x)
\end{array}$$

Aus diesen  $(r + 2s) \cdot n$  Gleichungen zwischen Polynomen extrahieren wir durch Koeffizientenvergleich  $n^2$  lineare, homogene Gleichungen in  $n^2$  Variablen.

**5.Schritt Eigenwertmethode:** Wir bestimmen die allgemeine Lösung des homogenen, linearen Gleichungssystems vom 4.Schritt. Die allgemeine Lösung enthält  $n$  freie Parameter  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ . Wir setzen die nunmehr identifizierten Koeffizienten in den Ansatz ein und schreiben  $\vec{z}$  als

$$\vec{z} = c_1 \vec{z}(1) + \dots + c_n \vec{z}(n), \quad c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R},$$

wobei  $\vec{z}(1), \dots, \vec{z}(n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein **Fundamentalsystem von** (15) bilden.

**6.Schritt Eigenwertmethode (nur bei Anfangswertproblemen).**

Seien  $x_0 \in I$  und  $\vec{z}_0 \in \mathbb{R}^n$  gegeben. Unter den unendlich vielen Lösungen von  $\vec{z}' = \mathbf{A} \cdot \vec{z}$  gibt es genau eine, die  $\vec{z}(x_0) = \vec{z}_0$  erfüllt. Diese Lösung finden wir durch Anpassung der freien Parameter  $c_1, \dots, c_n$  vom 5.Schritt. Wir erhalten ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem zur Bestimmung von  $c_1, \dots, c_n$ . Berechnen dieser eindeutigen Lösung und Einsetzen in die allgemeine Form vom 5.Schritt ergibt die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems.

## 2. Übung “Differentialgleichungen für Ingenieure”

Ausgabe: 22.04.03

Bearbeitung: 28.04.03-02.05.03

Abgabe: 05.05.03-09.05.03

### 5. Bestimmung Fundamentalsystem $\vec{z}' = \mathbf{A} \cdot \vec{z}$ .

Bestimmen Sie mit der Eigenwertmethode ein Fundamentalsystem von  $\vec{z}' = \mathbf{A} \cdot \vec{z}$ , wobei die Matrix  $\mathbf{A}$  gegeben ist.

$$\text{Üa. } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Üb. } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8 & 12 & -2 \\ -3 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Üc. } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ha. } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

5 Punkte

$$\text{Hb. } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

5 Punkte

$$\text{Hc. } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5 Punkte

6. **Lösung Anfangswertproblem**  $\vec{z}' = \mathbf{A} \cdot \vec{z}$ ,  $\vec{z}(0) = \vec{z}_0$ .

Bestimmen Sie die Lösung von  $\vec{z}' = \mathbf{A} \cdot \vec{z}$ ,  $\vec{z}(0) = \vec{z}_0$ , wobei die Matrix  $\mathbf{A}$  und der Vektor  $\vec{z}_0$  gegeben sind.

Üa.  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{z}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

Üb.  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{z}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Ha.  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{z}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**6 Punkte**

Hb.  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{z}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ .

**6 Punkte**

## 2.3 Stabilität von $\vec{z}' = \mathbf{A} \cdot \vec{z}$

**Nochmals das Kompartimentmodell: Wird das Pharmakon nach Beendigung der Therapie abgebaut ?** Wir nehmen an, dass die Verabreichung des Medikaments während eines Zeitintervalls  $[0, T]$ ,  $T \in \mathbb{R}^+$ , erfolgt. Zum Zeitpunkt  $t = T$  wird die Therapie eingestellt, dh ab diesem Zeitpunkt werden keine weiteren Dosen zugeführt:

$$F(t) = 0 \quad \text{für } t \geq T.$$

Zu diesem Zeitpunkt haben die Konzentrationen des Pharmakons im Magen/Darm Trakt, im Blut, im Gewebe und im defekten Organ bestimmte Werte:

$$m(T) = m_T, \quad b(T) = b_T, \quad G(T) = G_T, \quad c(T) = c_T. \quad (23)$$

Wir nehmen an: Die Abbauprozesse im Organismus des Patienten laufen auch nach Beendigung der Therapie in der Art und Weise ab, wie wir diese von Anfang an modelliert haben. Das entsprechende Modell erhalten wir dadurch, indem wir in unseren Modellgleichungen (8) ...

- ... " $F(t)$ " gleich Null setzen,
- ... eine Lösung auf dem Zeitintervall  $[T, +\infty[$  suchen,
- ... die neuen Anfangswerte (23) verwenden.

Wir erhalten das AWP (=Anfangswertproblem)

$$\begin{pmatrix} \dot{m} \\ \dot{b} \\ \dot{G} \\ \dot{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu_{mb} & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{mb} & -\mu_b & \mu_{Gb} & \mu_{cb} \\ 0 & \mu_{bG} & -\mu_{Gb} & 0 \\ 0 & \mu_{bc} & 0 & -\mu_{cb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \\ G \\ c \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} m(T) \\ b(T) \\ G(T) \\ c(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_T \\ b_T \\ G_T \\ c_T \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m \\ b \\ G \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m(t) \\ b(t) \\ G(t) \\ c(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [T, +\infty[. \quad (24)$$

Wir erinnern daran, dass  $\mu_{mb}, \dots, \mu_{cb} > 0$  und dass wegen  $\mu_b = \mu_{-b} + \mu_{bG} + \mu_{bc}$  und  $\mu_{-b} > 0$  folgt

$$\boxed{\mu_b > \mu_{bG} + \mu_{bc}} \quad (25)$$

Zur Verbesserung der Lesbarkeit setzen wir nun

$$A = \mu_{mb}, \quad B = \mu_b, \quad C = \mu_{Gb}, \quad D = \mu_{cb}, \quad E = \mu_{bG}, \quad F = \mu_{bc},$$

wobei  $A, B, C, D, E, F > 0$ . Wir erhalten aus (25)

$$\boxed{B > E + F} \quad (26)$$

Mit dieser neuen Notation geht (24) über in

$$\begin{pmatrix} \dot{m} \\ \dot{b} \\ \dot{G} \\ \dot{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A & 0 & 0 & 0 \\ A & -B & C & D \\ 0 & E & -C & 0 \\ 0 & F & 0 & -D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \\ G \\ c \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} m(T) \\ b(T) \\ G(T) \\ c(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_T \\ b_T \\ G_T \\ c_T \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m \\ b \\ G \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m(t) \\ b(t) \\ G(t) \\ c(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [T, +\infty[. \quad (27)$$

Wir wissen aus Abschnitt “Eigenwertmethode für  $\vec{z}' = \mathbf{A} \cdot \vec{z}$ . Allgemein.”, dass wir Einiges über die - nach Satz 3: eindeutige - Lösung von (27) aussagen können, wenn wir die Eigenwerte der konstanten Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -A & 0 & 0 & 0 \\ A & -B & C & D \\ 0 & E & -C & 0 \\ 0 & F & 0 & -D \end{pmatrix}$$

kennen.

Versuchen wir, diese auszurechnen.

Durch Entwicklung nach der ersten Zeile und unter Anwendung der Regel von Sarrus erhalten wir

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\mathbf{M} - \lambda \cdot \mathbf{E}_4) \\ &= \det \begin{pmatrix} -A - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ A & -B - \lambda & C & D \\ 0 & E & -C - \lambda & 0 \\ 0 & F & 0 & -D - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (-A - \lambda) \cdot \det \begin{pmatrix} -B - \lambda & C & D \\ E & -C - \lambda & 0 \\ F & 0 & -D - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (-A - \lambda) [(-B - \lambda)(-C - \lambda)(-D - \lambda) - DF(-C - \lambda) - CE(-D - \lambda)] \\ &= (A + \lambda) [(B + \lambda)(C + \lambda)(D + \lambda) - DF(C + \lambda) - CE(D + \lambda)]. \end{aligned}$$

Einen Eigenwert können wir sofort ablesen:

$$\lambda_1 = -A.$$

Zur Berechnung der anderen Eigenwerte müssen die Nullstellen eines kubischen Polynoms mit nicht näher bekannten Koeffizienten bestimmt werden.

Das ist offensichtlich eine schwierige Aufgabe.

Andrerseits sind wir gar nicht so sehr an der genauen Berechnung der Eigenwerte als an der Frage “Wird das Pharmakon abgebaut?” interessiert.

Bemerkenswerter Weise brauchen wir zur Beantwortung dieser Frage gar nicht den genauen Wert der Eigenwerte kennen, sondern nur

das Vorzeichen des Realteils der Eigenwerte

Wir setzen die Diskussion mit einer Fallunterscheidung fort.

**1.Fall:**  $C = D$ . In diesem Fall können wir  $p(\lambda)$  noch einmal umformen.

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (A + \lambda)[(B + \lambda)(C + \lambda)(D + \lambda) - DF(C + \lambda) - CE(D + \lambda)] \\ &= (A + \lambda)[(B + \lambda)(C + \lambda)(C + \lambda) - CF(C + \lambda) - CE(C + \lambda)] \\ &= (A + \lambda)(C + \lambda)[(B + \lambda)(C + \lambda) - C(E + F)]. \end{aligned}$$

Damit ist auch  $-C$  ein Eigenwert (falls  $A = C$ , dann ist  $-A$  ein doppelter Eigenwert),

$$\lambda_2 = -C,$$

und eine einfache Kurvendiskussion

unter Verwendung von (26),  $B > E + F$ ,

ergibt:  $p$  hat Nullstellen bei  $\lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$  mit

$$\lambda_3 < \min\{-B, -C\} \leq \max\{-B, -C\} < \lambda_4 < 0,$$

so dass

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4)$$

mit

$$\lambda_{1,2,3,4} < 0.$$

Wir stellen ausserdem fest:  $\mathbf{M}$  hat entweder vier negative, einfache Eigenwerte oder  $\mathbf{M}$  hat drei verschiedene, negative Eigenwerte, von denen  $-A$  ein doppelter Eigenwert ist und die anderen Eigenwerte einfache Eigenwerte sind.

**2.Fall:**  $C \neq D$ . In diesem Fall sind weder  $C$  noch  $D$  weitere Nullstellen von  $p$  und wir können umformen:

$$\frac{p(\lambda)}{(C + \lambda)(D + \lambda)} = \frac{(A + \lambda)}{(C + \lambda)(D + \lambda)} \left[ (B + \lambda) - \frac{DF}{D + \lambda} - \frac{CE}{C + \lambda} \right],$$

$\lambda \neq C, D.$

Eine weitere, einfache Kurvendiskussion

unter Verwendung von (26),  $B > E + F$ ,

ergibt:  $p$  hat Nullstellen bei  $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$  mit

$$\lambda_2 < \min\{-C, -D\} < \lambda_3 < \max\{-C, -D\} < \lambda_4 < 0,$$

so dass

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4)$$

mit

$$\lambda_{1,2,3,4} < 0.$$

Wir stellen ausserdem fest: Genau so wie im **1.Fall** hat  $\mathbf{M}$  entweder vier negative, einfache Eigenwerte oder  $\mathbf{M}$  hat drei verschiedene, negative Eigenwerte, von denen  $-A$  ein doppelter Eigenwert ist und die anderen Eigenwerte einfache Eigenwerte sind.

In jedem Fall hat  $\mathbf{M}$  ausschliesslich negative, reelle Eigenwerte.

Wir unterscheiden im Folgenden drei Fälle.

• **M hat vier verschiedene, einfache Eigenwerte.** Nach eventuellem Umbenennen erhalten wir

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 < 0.$$

Gemäss der Ausführungen in Abschnitt “Eigenwertmethode für  $\vec{z}' = \mathbf{A} \cdot \vec{z}$ . Allgemein.” hat die eindeutige Lösung von (24) die Gestalt

$$\begin{pmatrix} m(t) \\ b(t) \\ G(t) \\ c(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda_1 t} \vec{a}(1) + e^{\lambda_2 t} \vec{a}(2) + e^{\lambda_3 t} \vec{a}(3) + e^{\lambda_4 t} \vec{a}(4),$$

wobei  $\vec{a}(1), \dots, \vec{a}(4) \in \mathbb{R}^4$  so gewählt sind, dass der Anfangswert bei  $t = T$  angenommen wird. Im Speziellen hängen  $\vec{a}(1), \dots, \vec{a}(4) \in \mathbb{R}^4$  nicht von  $t$  ab.

Mit einfachen Umformungen (unter Verwendung des Betrags  $|\cdot|$  eines Vektors im  $\mathbb{R}^4$ ) erhalten wir

$$\begin{aligned} |m(t)|, |b(t)|, |G(t)|, |c(t)| &\leq \left| \begin{pmatrix} m(t) \\ b(t) \\ G(t) \\ c(t) \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| e^{\lambda_1 t} \vec{a}(1) + e^{\lambda_2 t} \vec{a}(2) + e^{\lambda_3 t} \vec{a}(3) + e^{\lambda_4 t} \vec{a}(4) \right| \\ &= e^{\lambda_4 t} \left| e^{(\lambda_1 - \lambda_4)t} \vec{a}(1) + e^{(\lambda_2 - \lambda_4)t} \vec{a}(2) + e^{(\lambda_3 - \lambda_4)t} \vec{a}(3) + \vec{a}(4) \right| \\ &\leq e^{\lambda_4 t} \left[ e^{(\lambda_1 - \lambda_4)t} |\vec{a}(1)| + e^{(\lambda_2 - \lambda_4)t} |\vec{a}(2)| + e^{(\lambda_3 - \lambda_4)t} |\vec{a}(3)| + |\vec{a}(4)| \right]. \quad (28) \end{aligned}$$

Wegen

$$0 < T \leq t, \quad \lambda_1 - \lambda_4 < 0, \quad \lambda_2 - \lambda_4 < 0, \quad \lambda_3 - \lambda_4 < 0,$$

erhalten wir

$$0 < e^{(\lambda_1 - \lambda_4)t} < e^{(\lambda_2 - \lambda_4)t} < e^{(\lambda_3 - \lambda_4)t} < 1,$$

so dass sich via  $|\vec{a}(1)|, |\vec{a}(2)|, |\vec{a}(3)| > 0$  aus (28) ergibt,

$$\begin{aligned} |m(t)|, |b(t)|, |G(t)|, |c(t)| &\leq e^{\lambda_4 t} [|\vec{a}(1)| + |\vec{a}(2)| + |\vec{a}(3)| + |\vec{a}(4)|] \\ &= K \cdot e^{-|\lambda_4|t}, \end{aligned} \quad (29)$$

wobei  $K = |\vec{a}(1)| + |\vec{a}(2)| + |\vec{a}(3)| + |\vec{a}(4)| \in \mathbb{R}^+$  eine positive, zeitunabhängige Konstante ist. In Worten:

Die Konzentration des Pharmakons nimmt im gesamten Organismus  
exponentiell ab,

und zwar ist die exponentielle Abbaurrate gleich  $|\lambda_4|$ , also gleich dem Betrag des grössten Eigenwerts von  $\mathbf{M}$ .

• **M hat drei verschiedene Eigenwerte,  $-A$  ist doppelter Eigenwert von M, doch  $-A$  ist nicht der grösste Eigenwert von M.** Nach eventuellem Umbenennen haben wir

$$p(\lambda) = (\lambda + A)^2(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4),$$

wobei

$$\lambda_3 < \lambda_4 < 0, \quad -A < \lambda_4.$$

Gemäss der Ausführungen in Abschnitt "Eigenwertmethode für  $\vec{z}' = \mathbf{A} \cdot \vec{z}$ . Allgemein." hat die eindeutige Lösung von (24) die Gestalt

$$\begin{pmatrix} m(t) \\ b(t) \\ G(t) \\ c(t) \end{pmatrix} = e^{-At}\vec{a}(1) + te^{-At}\vec{a}(2) + e^{\lambda_3 t}\vec{a}(3) + e^{\lambda_4 t}\vec{a}(4),$$

wobei  $\vec{a}(1), \dots, \vec{a}(4) \in \mathbb{R}^4$  so gewählt sind, dass der Anfangswert bei  $t = T$  angenommen wird. Im Speziellen hängen  $\vec{a}(1), \dots, \vec{a}(4) \in \mathbb{R}^4$  nicht von  $t$  ab.

Wie im vorherigen Fall erhalten wir nach elementaren Umformungen<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} |m(t)|, |b(t)|, |G(t)|, |c(t)| &\leq e^{\lambda_4 t} [|\vec{a}(1)| + te^{(-A-\lambda_4)t}|\vec{a}(2)| + |\vec{a}(3)| + |\vec{a}(4)|] \\ &\leq e^{\lambda_4 t} \left[ |\vec{a}(1)| + \frac{1}{e \cdot (A + \lambda_4)} |\vec{a}(2)| + |\vec{a}(3)| + |\vec{a}(4)| \right] = K \cdot e^{-|\lambda_4|t}, \end{aligned}$$

wobei  $K = |\vec{a}(1)| + \frac{|\vec{a}(2)|}{e \cdot (A + \lambda_4)} + |\vec{a}(3)| + |\vec{a}(4)| \in \mathbb{R}^+$  eine positive, zeitunabhängige Konstante ist. In Worten:

Die Konzentration des Pharmakons nimmt im gesamten Organismus  
exponentiell ab,

---

<sup>2</sup>Für  $0 < \alpha$  und  $0 \leq t$  gilt  $te^{-\alpha t} \leq 1/(e \cdot \alpha)$

und zwar ist die exponentielle Abbaurate gleich  $|\lambda_4|$ , also gleich dem Betrag des grössten Eigenwerts von  $\mathbf{M}$ .

• **M hat drei verschiedene Eigenwerte,  $-A$  ist doppelter Eigenwert von M, und  $-A$  ist der grösste Eigenwert von M.** Nach eventuellem Umbenennen haben wir

$$p(\lambda) = (\lambda + A)^2(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2),$$

wobei

$$\lambda_1 < \lambda_2 < -A < 0.$$

Gemäss der Ausführungen in Abschnitt “Eigenwertmethode für  $\vec{z}' = \mathbf{A} \cdot \vec{z}$ . Allgemein.” hat die eindeutige Lösung von (24) die Gestalt

$$\begin{pmatrix} m(t) \\ b(t) \\ G(t) \\ c(t) \end{pmatrix} = e^{\lambda_1 t} \vec{a}(1) + e^{\lambda_2 t} \vec{a}(2) e^{-At} \vec{a}(3) + t e^{-At} \vec{a}(4),$$

wobei  $\vec{a}(1), \dots, \vec{a}(4) \in \mathbb{R}^4$  so gewählt sind, dass der Anfangswert bei  $t = T$  angenommen wird. Im Speziellen hängen  $\vec{a}(1), \dots, \vec{a}(4) \in \mathbb{R}^4$  nicht von  $t$  ab.

Nach elementaren Umformungen erhalten wir

$$\begin{aligned} |m(t)|, |b(t)|, |G(t)|, |c(t)| \\ \leq t e^{-At} |\vec{a}(4)| + e^{-At} \left[ e^{(\lambda_1 - A)t} |\vec{a}(1)| + e^{(\lambda_2 - A)t} |\vec{a}(2)| + |\vec{a}(3)| \right] \\ \leq t e^{-At} |\vec{a}(4)| + K e^{-At}, \end{aligned}$$

wobei  $K = |\vec{a}(1)| + |\vec{a}(2)| + |\vec{a}(3)| \in \mathbb{R}^+$  eine positive, zeitunabhängige Konstante ist. Da für jedes positive  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ,

$$t e^{-At} \leq \frac{1}{e \cdot \varepsilon} e^{-(A-\varepsilon)t}, \quad t \geq 0,$$

erhalten wir für jedes positive  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ,

$$|m(t)|, |b(t)|, |G(t)|, |c(t)| \leq e^{-(A-\varepsilon)t} \cdot \left( K + \frac{|a(4)|}{e \cdot \varepsilon} \right).$$

In Worten:

Die Konzentration des Pharmakons nimmt im gesamten Organismus exponentiell ab,

und zwar ist die exponentielle Abbaurate für jedes  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  kleiner gleich  $A - \varepsilon$ , also für jedes  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  höchstens gleich dem Betrag des grössten Eigenwerts von  $\mathbf{M}$  minus  $\varepsilon$ .

**Zusammenfassung:** Das Pharmakon wird exponentiell abgebaut. Die exponentielle Abbaurate hängt vom grössten Eigenwert von  $\mathbf{M}$  ab.

Ende der Diskussion.

Wir betrachten nun die Ausführungen im Abschnitt “Eigenwertmethode für  $\vec{z}' = \mathbf{A} \cdot \vec{z}$ ” unter dem gleichen Gesichtspunkt wie beim Kompartimentmodell, nämlich “Lösungsverhalten für  $x \uparrow +\infty$ ”.

Dazu nehmen wir für den Rest des Abschnitts an, dass

- V1.  $I = [a, +\infty[$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , oder  $I = ]a, +\infty[$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , oder  $I = \mathbb{R}$ ,
- V2.  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,
- V3.  $\xi_{min} = \min\{\xi_1, \dots, \xi_\sigma\}$  und  $\xi_{max} = \max\{\xi_1, \dots, \xi_\sigma\}$ , wobei  $\sigma$  die Anzahl der verschiedenen Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  ist und  $\xi_1, \dots, \xi_\sigma$  die Realteile der Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  sind,
- V4.  $x_0 \in I$ ,
- V5.  $\vec{z}_0 \in \mathbb{R}^n$ .

Wir betrachten das homogene AWP

$$\vec{z}' = \mathbf{A} \cdot \vec{z}, \quad \vec{z}(x_0) = \vec{z}_0, \quad \vec{z} = \vec{z}(x), \quad x \in I. \quad (30)$$

Aus Satz 3 folgt: (30) hat genau eine Lösung  $\vec{z} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Diese Lösung hängt von  $x_0, \vec{z}_0, I, \mathbf{A}$  ab. Im Folgenden ist es wichtig, die Abhängigkeit vom Startwert  $\vec{z}_0$  zu betonen. Dementsprechend bezeichnen wir die Lösung von (30) mit

$$\vec{z}(\cdot; \vec{z}_0) : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto \vec{z}(x; \vec{z}_0).$$

**Satz 4.** Es gelte V1.,V2.,V3.,V4.,V5.

Dann gilt:

- a1) Haben alle Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  einen negativen Realteil, dh gilt  $\xi_{max} < 0$ , so ist

$\vec{0}$  die global asymptotisch stabile Lösung von (30),

dh egal wie  $\vec{z}_0$  gewählt wurde, es gilt

$$\lim_{x \uparrow +\infty} |\vec{z}(x; \vec{z}_0) - \vec{0}| = \lim_{x \uparrow +\infty} |\vec{z}(x; \vec{z}_0)| = 0.$$

- a2) Ist  $\xi_{max} < 0$ , so gibt es zu jedem  $\alpha \in ]0, |\xi_{max}|[$  ein  $K(\alpha) \in \mathbb{R}^+$ , so dass

$$|\vec{z}(x; \vec{z}_0)| \leq K(\alpha) \cdot |\vec{z}_0| \cdot e^{-\alpha x}, \quad x \in [x_0, +\infty[.$$

- b1) Zu jedem  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  gibt es ein  $K(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+$ , so dass

$$|\vec{z}(x; \vec{z}_0)| \leq K(\varepsilon) \cdot |\vec{z}_0| \cdot e^{(\xi_{max} + \varepsilon)x}, \quad x \in [x_0, +\infty[.$$

- b2) Sind die Eigenwerte von  $\mathbf{A}$ , deren Realteil gleich  $\xi_{max}$  ist, einfache Eigenwerte, so gibt es  $K \in \mathbb{R}^+$  mit

$$|\vec{z}(x; \vec{z}_0)| \leq K \cdot |\vec{z}_0| \cdot e^{\xi_{max} x}, \quad x \in [x_0, +\infty[.$$

- c) Sind alle Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  nicht positiv, dh gilt  $\xi_{max} = 0$ , und sind alle Eigenwerte von  $\mathbf{A}$ , deren Realteil=0 ist, einfach, so gibt es ein  $K \in \mathbb{R}^+$  mit

$$|\vec{z}(x; \vec{z}_0) - \vec{0}| = |\vec{z}(x; \vec{z}_0)| \leq K \cdot |\vec{z}_0|, \quad x \in [x_0, +\infty[.$$

- d) Hat  $\mathbf{A}$  mindestens einen Eigenwert mit positivem Realteil, dh gilt  $\xi_{max} > 0$ , so gilt für unendlich viele Startwerte  $\vec{z}_0$ ,

$$\lim_{x \uparrow +\infty} |\vec{z}(x; \vec{z}_0)| = +\infty.$$

**Bemerkung.**

- Die Konstante  $K(\alpha)$  von a2) in Satz 4 hängt nur von  $\alpha$ ,  $\mathbf{A}$ , aber nicht von  $x_0$ ,  $\vec{z}_0$  und nicht von  $x \in [x_0, +\infty[$  ab.
- Die Konstante  $K$  von b2), c) in Satz 4 hängt nur von  $\mathbf{A}$ , aber nicht von  $x_0$ ,  $\vec{z}_0$  und nicht von  $x \in [x_0, +\infty[$  ab.
- Die Konstante  $K(\varepsilon)$  von b1) in Satz 4 hängt nur von  $\varepsilon$ ,  $\mathbf{A}$ , aber nicht von  $x_0$ ,  $\vec{z}_0$  und nicht von  $x \in [x_0, +\infty[$  ab.

**Bemerkung.** Teil c) von Satz 4 kann unter Einbeziehung einer weiter führenden Untersuchung mit Hilfsmitteln der linearen Algebra folgender Massen verschärft werden:

**Satz 5.** *Es gelte V1.,V2.,V3.,V4.,V5.*

*Dann folgt:*

- a) *Haben die Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  nicht positiven Realteil, dh gilt  $\xi_{max} = 0$ , und ist für jeden Eigenwert von  $\mathbf{A}$ , dessen Realteil=0 ist, die geometrische Vielfachheit gleich der algebraischen Vielfachheit, dh besitzt jeder dieser Eigenwerte genau so viele linear unabhängige Eigenvektoren wie seine Vielfachheit beträgt, so gibt es ein  $K \in \mathbb{R}^+$  mit*

$$|\vec{z}(x; \vec{z}_0) - \vec{0}| = |\vec{z}(x; \vec{z}_0)| \leq K \cdot |\vec{z}_0|, \quad x \in [x_0, +\infty[.$$

- b) *Ist für mindestens einen Eigenwert von  $\mathbf{A}$ , dessen Realteil=0 ist, die geometrische Vielfachheit kleiner der algebraischen Vielfachheit, dh besitzt einer dieser Eigenwerte weniger linear unabhängige Eigenvektoren als seine Vielfachheit beträgt, so gibt es unendlich viele  $\vec{z}_0$  mit*

$$\lim_{x \uparrow +\infty} |\vec{z}(x; \vec{z}_0)| = +\infty.$$

**Bemerkung.**

- Die Konstante  $K$  von a) in Satz 5 hängt nur von  $\mathbf{A}$ , aber nicht von  $x_0, \vec{z}_0$  und nicht von  $x \in [x_0, +\infty[$  ab.
- Teil b) von Satz 5 gilt unabhängig davon, ob  $\xi_{max} = 0$  oder  $\xi_{max} > 0$  ist.

### 3 Kleine Störungen von $\vec{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \vec{y} + \vec{f}(x)$

Bei der Modellierung des Kompartimentmodells gingen wir davon aus, dass die Daten  $\mu_{mb}, \dots, \mu_{cb}$  und  $F$  prinzipiell bekannt sind.

Dies ist nicht realistisch.

In Wirklichkeit werden diese Größen durch Messungen und zusätzliche Modellannahmen bestimmt. Auch werden die tatsächlichen Daten

$$\mu_{mb}^*, \dots, \mu_{cb}^* \text{ und } F^*$$

im Allgemeinen von der Zeit abhängig sein. Wir können besten Falls annehmen

$$\mu_{mb} \approx \mu_{mb}^*(t), \dots, \mu_{cb} \approx \mu_{cb}^*(t), F(t) \approx F^*(t), \quad t \in [0, T].$$

Wir stehen damit vor der folgenden Frage:

Wie weit ist die Lösung des uns zugänglichen Modells (14),

$$\begin{pmatrix} \dot{m} \\ \dot{b} \\ \dot{G} \\ \dot{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu_{mb} & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{mb} & -\mu_b & \mu_{Gb} & \mu_{cb} \\ 0 & \mu_{bG} & -\mu_{Gb} & 0 \\ 0 & \mu_{bc} & 0 & -\mu_{cb} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \\ G \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} m(0) \\ b(0) \\ G(0) \\ c(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, T], \quad (31)$$

von der Lösung des realistischeren Modells

$$\begin{pmatrix} \dot{m}_* \\ \dot{b}_* \\ \dot{G}_* \\ \dot{c}_* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu_{mb}^*(t) & 0 & 0 & 0 \\ \mu_{mb}^*(t) & -\mu_b^*(t) & \mu_{Gb}^*(t) & \mu_{cb}^*(t) \\ 0 & \mu_{bG}^*(t) & -\mu_{Gb}^*(t) & 0 \\ 0 & \mu_{bc}^*(t) & 0 & -\mu_{cb}^*(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_* \\ b_* \\ G_* \\ c_* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F^*(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} m_*(0) \\ b_*(0) \\ G_*(0) \\ c_*(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, T], \quad (32)$$

entfernt, dh wie sehr können wir uns darauf verlassen, dass

$$m(t) \approx m_*(t), \quad b(t) \approx b_*(t), \quad G(t) \approx G_*(t), \quad c(t) \approx c_*(t), \quad t \in [0, T] ?$$

Diese Frage enthält die unmathematische Phrase “weit ... entfernt”. Damit ist Folgendes gemeint:

Wir wollen eine Approximationsgüte  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  vorgeben, i.e.

wir wollen zu jedem  $t \in [0, T]$  die tatsächlichen Werte der Konzentration bis auf eine Differenz  $\varepsilon$  genau kennen, also

$$\begin{aligned} |m(t) - m_*(t)| \leq \varepsilon, \quad |b(t) - b_*(t)| \leq \varepsilon, \\ |G(t) - G_*(t)| \leq \varepsilon, \quad |c(t) - c_*(t)| \leq \varepsilon, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (33)$$

und stellen uns die Frage:

Wie gross muss die Datengüte  $\delta = \delta(\varepsilon, T) \in \mathbb{R}^+$  sein, so dass sich die Approximationsgüte  $\varepsilon$  einstellt, i.e.

wie muss  $\delta = \delta(\varepsilon, T) \in \mathbb{R}^+$  gewählt werden, dass aus

$$\begin{aligned} |\mu_m - \mu_m^*(t)| \leq \delta, \quad \dots, \quad |\mu_{cb} - \mu_{cb}^*(t)| \leq \delta, \\ |F(t) - F^*(t)| \leq \delta, \quad t \in [0, T], \end{aligned}$$

folgt, dass die Abschätzungen (33) gelten ?

Wir wollen diese Frage in einem allgemeineren Rahmen betrachten. Dazu gehen wir davon aus, dass gegeben sind:

- Ein Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ .
- Ein kompaktes Teilintervall  $J$  von  $I$ ,  
i.e.  $J \subseteq I$  und  $J$  ist beschränkt und abgeschlossen.
- Eine natürliche Zahl  $n \geq 1$ .
- Zwei stetige,  $n \times n$  wertige Funktionen  $\mathbf{A} : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{A}^* : I \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$   
mit Koordinatenfunktionen

$$a_{1,1}, \dots, a_{n,n} : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad a_{1,1}^*, \dots, a_{n,n}^* : I \rightarrow \mathbb{R}.$$

- Zwei stetige, vektorwertige Funktionen  $\vec{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\vec{f}^* : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ .
- $x_0, x_0^* \in I$ .
- $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^n$  und  $\vec{y}^* \in \mathbb{R}^n$ .

Ferner sei  $\vec{y} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  die eindeutige Lösung des AWP

$$\vec{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \vec{y} + \vec{f}, \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0, \quad \vec{y} = \vec{y}(x), \quad x \in I,$$

und sei  $\vec{y}_* : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  die eindeutige Lösung des AWP

$$\vec{y}_*' = \mathbf{A}^*(x) \cdot \vec{y}_* + \vec{f}^*, \quad \vec{y}_*(x_0^*) = \vec{y}^*, \quad \vec{y}_* = \vec{y}_*(x), \quad x \in I.$$

Dann gilt der

**Satz 6.** *Unter den soeben getroffenen Voraussetzungen und mit den gerade vereinbarten Bezeichnungen gibt es zu jeder erwünschten Approximationsgüte  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  eine erforderliche Datengüte  $\delta = \delta(\varepsilon, J) \in \mathbb{R}^+$ , dh falls*

$$\begin{aligned} |x_0 - x_*| &\leq \delta, & |\vec{y}_0 - \vec{y}_*^*| &\leq \delta, \\ |\vec{f}(x) - \vec{f}^*(x)| &\leq \delta, & x \in I, \\ |a_{1,1}(x) - a_{1,1}^*(x)| &\leq \delta, \dots, |a_{1,1}(x) - a_{1,1}^*(x)| &\leq \delta, & x \in I, \end{aligned}$$

so folgt

$$|\vec{y}(x) - \vec{y}_*(x)| \leq \varepsilon, \quad x \in J.$$

**Bemerkung.**

- Für nicht-kompakte, insbesondere: unbeschränkte, Teilintervalle  $J$  gibt es keinen entsprechenden Satz, dh es kann vorkommen, dass, egal wie die Datengüte gewählt wird, zB auf einem unbeschränkten Intervall eine erwünschte Approximationsgüte nicht erreicht wird. Beispiele dazu in den Übungen.
- Im Hinblick auf das Kompartimentmodell ergibt sich die Erkenntnis, dass auf dem Zeitintervall  $[0, T]$  eine gewünschte Approximationsgüte prinzipiell durch eine geeignete Datengüte erreicht werden kann. Wie Datengüte und Approximationsgüte zusammenhängen, folgt nicht aus dem Satz.
- Es gibt theoretische Resultate, die obere Schranken für  $\delta(\varepsilon, J)$  liefern. In der Praxis sind diese Schranken von geringer Bedeutung, da sie in den meisten Fällen viel zu pessimistisch sind, dh es wird eine Datengüte gefordert, die gar nicht benötigt wird.
- In konkreten Fällen sollten problemangepasste Verfahren zur Untersuchung der Approximationsgüte verwendet werden. Wir geben dazu ein Beispiel.

**Das Kompartimentmodell.** Vergleichen wir die Lösungen von (31) und (32), so lassen sich ohne zusätzlichen Annahmen über die Werte von  $\mu_m^*(t), \dots, \mu_{cb}^*(t), F^*(t), t \in [0, T]$ , keine interessanten Aussagen über

$$|m(t) - m_*(t)|, \quad \dots, \quad |c(t) - c_*(t)|, \quad t \in [0, T]$$

treffen.

Am Ende der Therapie - i.e. zum Zeitpunkt  $t = T$  - liefert das uns zugängliche Modell die Werte

$$m(T) = m_T, \quad \dots, \quad c(T) = c_T,$$

während Modell (32) liefert

$$m_*(T) = m_T^*, \quad \dots, \quad c_*(T) = c_T^*.$$

Nun betrachten wir die Zeiten  $t > T$ . Wir nehmen an, dass für  $t > T$  die Funktionen  $\mu_{mb}^*, \dots, \mu_{cb}^*$  nicht mehr von der Zeit abhängen. Im Einklang mit einer bereits früher verwendeten Notation setzen wir

$$\begin{aligned} A^* &= \mu_{mb}^*(t), & B^* &= \mu_b^*(t), & C^* &= \mu_{Gb}^*(t), & D^* &= \mu_{cb}^*(t), \\ E^* &= \mu_{bG}^*(t), & F^* &= \mu_{bc}^*(t), & & & & t \in [T, +\infty[, \end{aligned}$$

wobei  $A^*, B^*, C^*, D^*, E^*, F^* > 0$  nicht von der Zeit abhängen und nach wie vor gelten muss

$$B^* > E^* + F^*. \quad (34)$$

Damit stehen wir für  $t > T$  vor der Aufgabe, die Lösung des AWP's (27),

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{m} \\ \dot{b} \\ \dot{G} \\ \dot{c} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -A & 0 & 0 & 0 \\ A & -B & C & D \\ 0 & E & -C & 0 \\ 0 & F & 0 & -D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ b \\ G \\ c \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} m(T) \\ b(T) \\ G(T) \\ c(T) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} m_T \\ b_T \\ G_T \\ c_T \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} m \\ b \\ G \\ c \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} m(t) \\ b(t) \\ G(t) \\ c(t) \end{pmatrix}, & t \in [T, +\infty[, \end{aligned}$$

mit der Lösung des AWP's

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{m}_* \\ \dot{b}_* \\ \dot{G}_* \\ \dot{c}_* \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -A^* & 0 & 0 & 0 \\ A^* & -B^* & C^* & D^* \\ 0 & E^* & -C^* & 0 \\ 0 & F^* & 0 & -D^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_* \\ b_* \\ G_* \\ c_* \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} m_*(T) \\ b_*(T) \\ G_*(T) \\ c_*(T) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} m_T^* \\ b_T^* \\ G_T^* \\ c_T^* \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} m_* \\ b_* \\ G_* \\ c_* \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} m_*(t) \\ b_*(t) \\ G_*(t) \\ c_*(t) \end{pmatrix}, & t \in [T, +\infty[ \end{aligned} \quad (35)$$

zu vergleichen.

Wie wir aus einer früheren Diskussion wissen, gibt es  $\xi_{max} < 0$ , sodass es zu jedem  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  ein  $K(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+$  gibt mit

$$|m(t)|, |b(t)|, |G(t)|, |c(t)| \leq K(\varepsilon) \cdot e^{(-|\xi_{max}| + \varepsilon)t}, \quad t \in [T, +\infty[.$$

Wegen Bedingung (34) führt eine analoge Diskussion zu dem Resultat, dass ein  $\xi_{max}^* < 0$  existiert, sodass es zu jedem  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  ein  $K^*(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+$  gibt mit

$$|m_*(t)|, |b_*(t)|, |G_*(t)|, |c_*(t)| \leq K^*(\varepsilon) \cdot e^{(-|\xi_{max}^*| + \varepsilon)t}, \quad t \in [T, +\infty[.$$

dh auch aus Modell (35) folgt, dass das Pharmakon nach Beendigung der Therapie exponentiell abgebaut wird, wenn auch möglicherweise die exponentielle Abbaurate eine andere ist.

Setzen wir  $\Xi = \max\{\xi_{max}, \xi_{max}^*\}$ , so ist  $\Xi < 0$  und zu jedem  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  gibt es eine Zahl  $\kappa(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+$ , so dass

$$\begin{aligned} |m(t) - m_*(t)|, |b(t) - b_*(t)|, |G(t) - G_*(t)|, |c(t) - c_*(t)| \\ \leq \kappa(\varepsilon) \cdot e^{(-|\Xi| + \varepsilon)t}, \quad t \in [T, +\infty[, \end{aligned}$$

dh die Unterschiede der von den beiden Modellen vorhergesagten Konzentrationen nehmen im Laufe der Zeit exponentiell ab.

Die Differenz der Anfangswerte bei  $t = T$  beeinflusst zwar die Konstante  $\kappa(\varepsilon)$ , hat aber keine Einfluss auf die exponentiellen Abbaurate.

### 3. Übung “Differentialgleichungen für Ingenieure”

Ausgabe: 29.04.03

Bearbeitung: 05.05.03-09.05.03

Abgabe: 12.05.03-16.05.03

#### 7. Stabilitätsuntersuchung linearer ODE Systeme mit konstanten Koeffizienten. Wir betrachten AWPe der Gestalt

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \mathbf{M} \cdot \vec{u}, \quad \vec{u}(0) = \vec{u}_0, \quad \vec{u} = \vec{u}(t), \quad t \in [0, +\infty[ , \quad (36)$$

wobei die Matrix  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  gegeben ist. Die eindeutige Lösung von (36) wird zur Betonung der Abhängigkeit vom Anfangswert  $\vec{u}_0$  mit

$$\vec{u}(\cdot; \vec{u}_0) : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \vec{u}(t; \vec{u}_0)$$

bezeichnet.

Folgende Fragen sind jeweils in Abhängigkeit von  $\mathbf{M}$  zu beantworten:

- Ist  $\vec{0}$  die global asymptotisch stabile Lösung von (36)?
- Ist für jedes  $\vec{u}_0 \in \mathbb{R}^n$  die Lösung  $\vec{u}(\cdot; \vec{u}_0)$  beschränkt?
- Gibt es unendlich viele  $\vec{u}_0 \in \mathbb{R}^n$  mit  $\lim_{t \uparrow +\infty} |\vec{u}(t; \vec{u}_0)| = +\infty$ ?

#### Üa. Kompartimentmodell ohne Ausscheidung.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -A & 0 & 0 & 0 \\ A & -B & C & D \\ 0 & E & -C & 0 \\ 0 & F & 0 & -D \end{pmatrix}, \quad A, \dots, F > 0, \quad B = E + F.$$

(Hinweis: Ähnliche Vorgehensweise wie in VL.)

#### Üb. 0 ist mehrfacher Eigenwert.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

#### Üc. Neutronentransport in einem Stab, vgl [Heuser].

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & -p \\ p & 0 \end{pmatrix}, \quad p > 0.$$

#### Üd. 2-komponentige radioaktive Zerfallsreihe, vgl [Heuser].

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -A & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad A > 0.$$

$$\ddot{U}e. \mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\ddot{U}f. \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\ddot{U}g. \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ha. **Ein salzkinetisches Modell**, vgl [Heuser].

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -(A+B) & C & 0 \\ B & -C & 0 \\ A & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A, B, C > 0.$$

(Hinweis: Ähnliche Vorgehensweise wie in VL und in Aufgabe 7.Üa.)

**4 Punkte**

Hb. **0 ist mehrfacher Eigenwert**.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**2 Punkte**

Hc. **Vorzeichen sind wichtig**, vgl 7.Üc.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & p \\ q & 0 \end{pmatrix}, \quad p, q > 0.$$

**2 Punkte**

Hd. **3-komponentige radioaktive Zerfallsreihe**, vgl 7.Üd.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -A & 0 & 0 \\ A & -B & 0 \\ 0 & B & 0 \end{pmatrix}, \quad A, B > 0.$$

**2 Punkte**

$$He. \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**2 Punkte**

$$Hf. \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 8 & 12 & -2 \\ -3 & -4 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

**2 Punkte**

$$\text{Hg. } \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

**2 Punkte**

**8. Kleine Störungen von linearen ODE Systemen 1. Ordnung.**

Wir betrachten lineare ODE Systeme der Gestalt

$$\vec{z}' = \mathbf{A} \cdot \vec{z}, \quad \vec{z}(0) = \vec{z}_0, \quad \vec{z} = \vec{z}(x), \quad x \in [0, +\infty[,$$

wobei  $\mathbf{A}$  und  $\vec{z}_0$  gegeben sind. Die jeweils eindeutige Lösung  $\vec{z}$  soll mit der eindeutigen Lösung  $\vec{z}^*$  eines “gestörten” Systems

$$\vec{z}_* ' = \mathbf{A}^* \cdot \vec{z}_*, \quad \vec{z}_*(0) = \vec{z}_0^*, \quad \vec{z}_* = \vec{z}_*(x), \quad x \in [0, +\infty[,$$

auf einem Zeitintervall  $[0, T]$  verglichen werden, wobei  $\mathbf{A}^*$ ,  $\vec{z}_0^*$  gegeben sind. Es sollen jeweils zwei Fragen beantwortet werden:

- Wie gross darf bei gegebenem  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  der Wert von  $\delta \in \mathbb{R}^+$  maximal sein, dass

$$|\vec{z}(t) - \vec{z}_*(t)| \leq \varepsilon, \quad t \in [0, T]?$$

- Geht der gefunde Wert  $\delta(\varepsilon, T)$  für  $T \uparrow +\infty$  gegen 0? (Wenn nein, dann können wir jede erwünschte Approximationsgüte auf dem unbeschränkten (!) Intervall  $[0, +\infty[$  erreichen.)

$$\begin{aligned} \text{Üa. } \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{z}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}^* &= \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}, \quad \vec{z}_0^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Üb. } \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{z}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}^* &= \begin{pmatrix} -\delta & \delta \\ 0 & -\delta \end{pmatrix}, \quad \vec{z}_0^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Üc. } \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{z}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}^* &= \begin{pmatrix} 3+\delta & -4 \\ 1 & -1+\delta \end{pmatrix}, \quad \vec{z}_0^* = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Üd. } \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{z}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}^* &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{z}_0^* = \begin{pmatrix} 1+\delta \\ 5-\delta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{Ha. } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \vec{z}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & -\delta \end{pmatrix}, \vec{z}_0^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**3 Punkte**

$$\text{Hb. } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \vec{z}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} -\delta & \delta \\ -\delta & -\delta \end{pmatrix}, \vec{z}_0^* = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**3 Punkte**

$$\text{Hc. } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}, \vec{z}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 1-\delta & 1 \\ 4 & -2-\delta \end{pmatrix}, \vec{z}_0^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

**3 Punkte**

$$\text{Hd. } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \vec{z}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \vec{z}_0^* = \begin{pmatrix} 1 \\ \delta \end{pmatrix}.$$

**3 Punkte**

[Heuser] **H.Heuser**, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, BG Teubner, 1989.

## 4 ODE Systeme 1. Ordnung: $\vec{y}' = \vec{F}(x, \vec{y})$

**Raubfische und Beutefische.** Wir wollen ein Modell für die Fischpopulation eines Fischereigebiets herleiten. Dazu teilen wir die Fischarten - grob - in zwei Gruppen: In Raubfische und in Beutefische.

Wir nehmen vereinfachend an, dass sich die Raubfische ausschliesslich von den Beutefischen ernähren und dass für die Beutefische nicht näher interessierendes Futter in ausreichender Menge vorhanden ist.

Die Anzahl der Raubfische zu einem Zeitpunkt  $t$  ist  $R(t)$  und die Anzahl der Beutefische zur Zeit  $t$  ist  $B(t)$ .

Der zeitliche Beobachtungszeitraum sei das Intervall  $[0, T]$  mit  $T > 0$ , dh  $\text{dom } B = \text{dom } R = [0, T]$ .

Wir gehen ähnlich wie bei der Untersuchung der Radiokarbonmethode vor und fragen uns zunächst, wie sich die Anzahl der Raubfische in einem kleinen Zeitintervall  $\Delta t > 0$  ändert.

Natürlich gehen wir von  $t, t + \Delta t \in [0, T]$  aus.

Wir erhalten

$$R(t + \Delta t) = R(t) + [\rho^+(t, \Delta t) - \rho^-(t, \Delta t)],$$

wobei

$\rho^+(t, \Delta t)$  = Anzahl der Raubfische,  
die im Zeitintervall  $[t, t + \Delta t]$   
neu im Fischereigebiet erscheinen

$\rho^-(t, \Delta t)$  = Anzahl der Raubfische,  
die im Zeitintervall  $[t, t + \Delta t]$   
aus dem Fischereigebiet verschwinden.

Es ist zweckmässig, bei der Änderung der Population zwei grundlegende Mechanismen zu unterscheiden. Einerseits gibt es die natürliche Vermehrung und das natürliche Verenden  $\rho_{nat}$ , andererseits gibt es die Zuwanderung ins und die Abwanderung aus dem Fischereigebiet  $\rho_{zu/ab}$ .

Wir erhalten

$$\rho^+ - \rho^- = \rho_{nat} + \rho_{zu/ab},$$

wobei wir wegen der besseren Lesbarkeit die Argumente " $t, \Delta t$ " weglassen.

Im Gegensatz zu  $\rho^+, \rho^-$ , die immer nichtnegativ sind, können sowohl  $\rho_{nat}$  als auch  $\rho_{zu/ab}$  beiderlei Vorzeichen annehmen.

- $\rho_{nat} > 0$  ... die natürliche Vermehrung überwiegt  
das natürliche Verenden, dh im  
Beobachtungszeitraum  $[t, t + \Delta t]$  werden  
mehr Raubfische geboren als Raubfische  
verenden.
- $\rho_{nat} < 0$  ... das natürliche Verenden überwiegt  
die natürliche Vermehrung, dh im  
Beobachtungszeitraum  $[t, t + \Delta t]$  verenden  
mehr Raubfische als Raubfische  
geboren werden.
- $\rho_{zu/ab} > 0$  ... es wandern mehr Raubfische zu als  
Raubfische abwandern.
- $\rho_{zu/ab} < 0$  ... es wandern mehr Raubfische ab als  
Raubfische zuwandern.
- $\rho_{nat} + \rho_{zu/ab} > 0$  ... Die Raubfischpopulation nimmt  
im Beobachtungszeitraum  $[t, t + \Delta t]$  zu.
- $\rho_{nat} + \rho_{zu/ab} < 0$  ... Die Raubfischpopulation nimmt  
im Beobachtungszeitraum  $[t, t + \Delta t]$  ab.

Nun wollen wir  $\rho_{nat}$  und  $\rho_{zu/ab}$  genauer untersuchen.

Wie bei der Modellierung der Radiokarbonmethode berufen wir uns auf ein nicht-mathematisches - hier: biologisches - Argument und nehmen an, dass

$$\rho_{nat}(t, \Delta t) \approx \Delta t P(t) \quad \text{für } \Delta t \downarrow 0,$$

i.e.

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{\rho_{nat}(t, \Delta t) - \Delta t P(t)}{\Delta t} = 0. \quad (37)$$

$P(t)$  ist gleich der Anzahl der Raubfische, die pro Zeiteinheit (und zwar zum Zeitpunkt  $t$ ) durch natürliche Vermehrung und durch natürliches Verenden entstehen bzw. vergehen - positives  $P(t)$  heisst, es entstehen pro Zeiteinheit (zum Zeitpunkt  $t$ ) mehr Raubfische als vergehen und vice versa bei negativem  $P(t)$ .

Wir folgen der Modellierung der Radiokarbonmethode und gehen hier wie dort davon aus, dass

$$P(t) = \text{“Vermehrungsrate mal } R(t)\text{”},$$

wobei die “Vermehrungsrate” beiderlei Vorzeichen annehmen kann.

Im Speziellen kann die Vermehrungsrate nicht konstant sein.

Damit unterscheidet sich das Modell grundlegend von dem Modell der Radiokarbonmethode.

Wir bezeichnen die Vermehrungsrate mit “ $\kappa_R$ ”, wobei wir den Definitionsbereich von  $\kappa_R$  noch offen lassen.

Die Modellierung von  $\kappa_R$  beruht auf zwei Überlegungen.

- Die Raubfische ernähren sich ausschliesslich von den Beutefischen. Die Raubfische können sich erst dann vermehren, wenn hinreichend viele Beutefische vorhanden sind, dh wenn eine Mindestpopulation  $B_{min} > 0$  an Beutefischen vorhanden ist. Sind weniger Beutefische vorhanden, so wird die Vermehrungsrate der Raubfische negativ, dh die Raubfische sterben aus - und zwar umso schneller, je weniger Beutefische vorhanden sind. Wird hingegen die Mindestpopulation  $B_{min}$  an Beutefischen überschritten, so vermehren sich die Raubfische - und zwar umso stärker, je mehr Beutefische vorhanden sind.
- Je mehr Raubfische vorhanden sind, desto grösser wird der Wettbewerb um die Futter Ressourcen und umso weniger vermehren sich die Raubfische.

Ein sehr einfaches Modell für  $\kappa_R$ , das diesen beiden Anforderungen genügt, ist

$$\kappa_R = c.(B - B_{min}) - \mu R, \quad c, \mu > 0.$$

Setzen wir  $d = c.B_{min}$ , so ist  $d > 0$ , und wir erhalten

$$\kappa_R = cB - d - \mu R.$$

Es folgt

$$\rho_{nat} \approx \Delta t. \kappa_R. R = \Delta t. (cBR - dR - \mu R^2) \quad \text{für } \Delta t \downarrow 0. \quad (38)$$

Um ein Modell für  $\rho_{zu/ab}$  zu erhalten, gehen wir wesentlich schneller vor indem wir annehmen, dass

$$\rho_{zu/ab}(t, \Delta t) \approx \Delta t. f_R(t) \quad \text{für } \Delta t \downarrow 0,$$

wobei  $f_R(t)$  gleich der Anzahl der Raubfische ist, die (zum Zeitpunkt  $t$ ) pro Zeiteinheit in das Fischereigebiet eindringt minus der Anzahl der Raubfische, die (zum Zeitpunkt  $t$ ) pro Zeiteinheit das Fischereigebiet verlässt. Wir erhalten

$$\begin{aligned} R(t + \Delta t) &= R(t) + \rho_{nat}(t, \Delta t) + \rho_{zu/ab}(t, \Delta t) \\ &\approx R(t) + \Delta t. (cBR - dR - \mu R^2 + f_R(t)) \quad \text{für } \Delta t \downarrow 0, \end{aligned}$$

woraus durch  $\Delta t \downarrow 0$  die ODE

$$\dot{R} = \kappa_R R + f_R(t) = cBR - dR - \mu R^2 + f_R(t)$$

folgt.

In ähnlicher Weise erhalten wir für die Beutefische

$$\dot{B} = \kappa_B B + f_B(t),$$

wobei  $\kappa_B$  die Vermehrungsrate der Beutefische ist und  $f_B(t)$  gleich der Anzahl der Beutefische ist, die (zum Zeitpunkt  $t$ ) pro Zeiteinheit in das

Fischereigebiet eindringt minus der Anzahl der Beutefische, die (zum Zeitpunkt  $t$ ) pro Zeiteinheit das Fischereigebiet verlässt.

Es muss noch  $\kappa_B$  modelliert werden.

Hierzu drei Überlegungen.

- Die Beutefische haben genügend Ressourcen. Ohne Berücksichtigung der Raubfische und unter Vernachlässigung der die Vermehrung dezimierenden Konkurrenzsituation um die Nahrungsquellen vermehren sich die Beutefische mit einer konstanten Vermehrungsrate  $a > 0$ .
- Raubfische dezimieren die Population der Beutefische, dh je mehr Raubfische vorhanden sind, desto geringer ist die Vermehrungsrate der Beutefische.
- Je mehr Beutefische vorhanden sind, desto grösser wird der Wettbewerb um die Futter Ressourcen und umso weniger vermehren sich die Beutefische.

Ein sehr einfaches Modell für  $\kappa_B$ , das diesen drei Aspekten Rechnung trägt ist

$$\kappa_B = a - bR - \lambda B, \quad a, b, \lambda > 0.$$

Wir erhalten die ODE

$$\dot{B} = \kappa_B B + f_B(t) = aB - bBR - \lambda B^2 + f_B(t).$$

**Zusammenfassung.** Die Raub- und Beutefischpopulationen  $R$  und  $B$  erfüllen das nichtlineare ODE System

$$\dot{B} = aB - bBR - \lambda B^2 + f_B(t) \quad (39)$$

$$\dot{R} = cBR - dR - \mu R^2 + f_R(t) \quad (40)$$

**Bemerkung.** Werden in (39), (40) die Zu- und Abwanderungsterme  $f_B, f_R$  vernachlässigt, so ergibt sich das ‘‘Volterra-Lotka Modell’’.

System (39), (40) können wir mit der Abkürzung

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} B \\ R \end{pmatrix}$$

auch in der Form

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F}(t, \vec{u})$$

schreiben, wobei

$$\vec{F} : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$\begin{aligned} \vec{F} \left( t, \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} F_1(t, u_1, u_2) \\ F_2(t, u_1, u_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} au_1 - bu_1u_2 - \lambda u_1^2 + f_B(t) \\ cu_1u_2 - du_2 - \mu u_2^2 + f_R(t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

und  $[0, T]$  mit  $T > 0$  das zeitliche Beobachtungsintervall des Fischereigebiets ist. Wir nehmen an, dass die beiden Funktionen

$$f_{B,R} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$$

bekannt und stetig sind.

Ende der Modellierung.

## 4.1 Die separable ODE $y' = g(x)h(y)$

Trotz einiger Analogien unterscheidet sich das Lösungsverhalten eines

nichtlinearen ODE Systems

$\vec{y}' = \vec{F}(x, \vec{y})$  in vieler Hinsicht vom Lösungsverhalten linearer ODE Systeme  $\vec{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \vec{y}$ .

Der vielleicht signifikanteste Unterschied besteht darin, dass nichtlineare ODE Systeme in vielen Fällen nur eine lokale Lösung zulassen.

Wir wollen dies an Hand eines Beispiels einer sogenannten separablen ODE  $y' = g(x)h(y)$  erläutern.

**Beispiel.** Wir wollen das AWP

$$y' = xy^2, \quad y(0) = 1 \tag{41}$$

lösen. Bei der ODE handelt es sich um eine nichtlineare, separable ODE, die wir auch in der Form

$$y' = F(x, y), \quad F(x, y) : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x, y) = xy^2$$

schreiben können. Die Funktion  $F$  ist auf ganz  $\mathbb{R}^2$ , also für jedes  $x \in \mathbb{R}$  und jedes  $y \in \mathbb{R}$  definiert.

Es könnte vermutet werden, dass (41) eine (eindeutige) Lösung  $y : x \mapsto y(x)$  besitzt, die für jedes  $x \in \mathbb{R}$  definiert ist.

Dies ist allerdings nicht der Fall.

Lösen wir nämlich (41) mit der entsprechenden, zielführenden Methode der “Trennung der Veränderlichen” (“separabel” heisst “trennbar” - davon hat die ODE ihren Namen) so erhalten wir:

$$y' = xy^2, \quad y(0) = 1.$$

$$\frac{dy}{dx} = xy^2,$$

$$\frac{dy}{y^2} = x dx,$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int x dx + C,$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{y} &= \frac{x^2}{2} + C, \\
 -\frac{1}{y} &= \frac{x^2 + 2C}{2}, \\
 y(x) &= -\frac{2}{x^2 + 2C},
 \end{aligned}$$

woraus wegen  $y(0) = 1$  folgt

$$y(0) = 1 = -\frac{2}{0^2 + 2C} = -\frac{1}{C},$$

also  $C = -1$  und damit

$$y(x) = \frac{2}{2 - x^2},$$

dh

$$y : ] - \sqrt{2}, \sqrt{2}[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(x) = \frac{2}{2 - x^2}.$$

Offenbar kann  $y$  nicht auf einem grösseren Intervall als  $J = ] - \sqrt{2}, \sqrt{2}[$  definiert werden - "nicht über  $J$  hinaus fortgesetzt werden" - da

$$\lim_{x \rightarrow \pm\sqrt{2}} y(x) = +\infty.$$

Ende des Beispiels.

**Bemerkung.** Weitere Beispiele zu der Lösungsmethode der Trennung der Veränderlichen für separable ODEs sind in den Übungen zu finden.

## 4.2 Lokale und maximale Lösungen

Wir nehmen die Einsichten, die wir bei der Diskussion des Beispiels  $y' = xy^2$ ,  $y(0) = 1$ , gewonnen haben zum Anlass, einige Begriffe zu klären. Dazu nehmen wir Folgendes für den Rest dieses Abschnitts an.

- $I = ]a, b[$ ,  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ,  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  ist ein offenes Intervall.
- $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$  und  $G$  ist eine offene, nichtleere Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ , zB
 
$$G = \mathbb{R}^n \text{ oder } G = \left\{ \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : y_1, \dots, y_n > 0 \right\}.$$
- $\vec{F} : I \times G \rightarrow \mathbb{R}^n$ , dh

$$\vec{F}(x, \vec{y}) = \begin{pmatrix} F_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \vdots \\ F_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{pmatrix},$$

wobei  $F_1, \dots, F_n : I \times G \rightarrow \mathbb{R}$ .

Wir betrachten das (nichtlineare) ODE System

$$\vec{y}' = \vec{F}(x, \vec{y}). \quad (42)$$

$\vec{y}$  ist eine **lokale Lösung** von

$$\vec{y}' = \vec{F}(x, \vec{y}), \quad \vec{y} = \vec{y}(x),$$

wenn

$\vec{y} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ , dh im Speziellen  $\boxed{\text{dom } y = J}$ , wobei

$$\boxed{J \subseteq I \text{ ein Intervall ist}}$$

und

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix},$$

und  $y_1, \dots, y_n : J \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar sind und

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \\ \vdots \\ F_n(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \end{pmatrix}, \quad x \in J$$

i.e.

$$\begin{array}{lcl} y_1'(x) & = & F_1(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n'(x) & = & F_n(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \end{array}, \quad x \in J.$$

Ausserdem definieren wir:

$\vec{y}$  ist eine **maximale Lösung** von

$$\vec{y}' = \vec{F}(x, \vec{y}), \quad \vec{y} = \vec{y}(x), \quad (43)$$

wenn

- $\vec{y} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine lokale Lösung von (43) ist und
- sich  $\vec{y}$  nicht zu einer lokalen Lösung von (43) mit grösserem Definitionsbereich fortsetzen lässt, i.e. wenn für jede lokale Lösung  $\vec{y}_* : J_* \rightarrow \mathbb{R}^n$  von (43) mit  $J \subseteq J_*$  und  $\vec{y}(x) = \vec{y}_*(x)$  für  $x \in J$  folgt:  $J_* = J$ .

**Beispiel.** Die Funktion

$$y : ] - \sqrt{2}, \sqrt{2}[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(x) = \frac{2}{2 - x^2}$$

ist eine maximale Lösung von  $y' = xy^2$ .

**Bemerkung.** Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass  $\vec{y}$  eine **globale Lösung** von (42) ist, falls  $\vec{y}$  eine lokale Lösung von (42) ist und  $\text{dom } \vec{y} = I$  gilt. Klarerweise ist jede globale Lösung von (42) eine maximale Lösung von (42).

Nun kommen wir zum zentralen Satz dieses Abschnitts.

**Satz 7.** Wir betrachten das (nichtlineare) ODE System (oder, falls  $n = 1$ , die (nichtlineare) ODE)

$$\vec{y}' = \vec{F}(x, \vec{y}), \quad \vec{y} = \vec{y}(x), \quad (44)$$

unter den in diesem Abschnitt formulierten Voraussetzungen. Ferner setzen wir voraus:

$\vec{F}$  ist stetig partiell differenzierbar

Dann gilt:

- a1) (44) besitzt unendlich viele maximale Lösungen.
- a2) Ist  $\vec{y} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine maximale Lösung von (44) so ist  $J = ]\alpha, \beta[$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ,  $\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  ein offenes Intervall und es folgt:
- Falls  $a < \alpha$ , so strebt entweder  $\vec{y}(x)$  für  $x \downarrow \alpha$  gegen einen Randpunkt von  $G$  oder  $\vec{y}(x)$  konvergiert nicht für  $x \downarrow \alpha$  (dh entweder “oszilliert”  $\vec{y}(x)$  für  $x \downarrow \alpha$  oder  $\lim_{x \downarrow \alpha} |\vec{y}(x)| = +\infty$ ).
  - Falls  $\beta < b$ , so strebt entweder  $\vec{y}(x)$  für  $x \uparrow \beta$  gegen einen Randpunkt von  $G$  oder  $\vec{y}(x)$  konvergiert nicht für  $x \uparrow \beta$  (dh entweder “oszilliert”  $\vec{y}(x)$  für  $x \uparrow \beta$  oder  $\lim_{x \uparrow \beta} |\vec{y}(x)| = +\infty$ ).
- b) Sind  $x_0 \in I$  und  $\vec{y}_0 \in G$ , so hat das AWP

$$\vec{y}' = \vec{F}(x, \vec{y}), \quad \vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$$

genau eine maximale Lösung, i.e. es gibt genau eine maximale Lösung  $\vec{y} : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  von (44), für die  $\vec{y}(x_0) = \vec{y}_0$  gilt.

### Bemerkungen, Beispiele.

- a) Ist die Funktion  $\vec{F}$  von Satz 7 stetig, aber nicht stetig partiell differenzierbar, so besitzt (44) noch immer unendlich viele maximale Lösungen. Es gilt sogar: Das AWP von Teil b) von Satz 7 besitzt ebenfalls mindestens eine maximale Lösung. Allerdings können unter Umständen (die aber nicht eintreten müssen) mehrere Lösungen des AWP vorkommen. Dazu zwei Beispiele.

- Das lineare AWP

$$y' = \sqrt{|x|} y, \quad y(0) = 1$$

besitzt eine eindeutige globale Lösung  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , siehe Satz 2. Schreiben wir dieses AWP als  $y' = F(x, y)$  mit  $F(x, y) = \sqrt{|x|} y$ , so ist  $F$  zwar stetig, aber nicht stetig partiell differenzierbar, dh Satz 7 ist nicht anwendbar.

- Das nichtlineare AWP

$$y' = 2\sqrt{|y|}, \quad y(0) = 0$$

besitzt unendlich viele globale Lösungen. Ausser  $y = 0$  ist zB für jedes  $\alpha > 0$  die Funktion

$$y_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & , \quad -\infty < x < \alpha \\ (x - \alpha)^2 & , \quad \alpha \leq x < +\infty \end{cases}$$

eine Lösung dieses AWP.

- b) Betrachten wir AWP

$$y' = xy^2, \quad y(0) = 1, \quad \text{und} \quad y' = xy^2, \quad y(0) = -1,$$

unter dem Blickwinkel von Satz 7, so besitzt jedes dieser AWP genau eine maximale Lösung. Die maximale Lösung von

$$y' = xy^2, \quad y(0) = 1$$

kennen wir bereits:

$$y(x) = \frac{2}{2 - x^2}, \quad \text{dom } y = J = ] - \sqrt{2}, \sqrt{2}[ ,$$

dh der Definitionsbereich dieser maximalen Lösung ist das Intervall  $] - \sqrt{2}, \sqrt{2}[$ . Die maximale Lösung von

$$y' = xy^2, \quad y(0) = -1$$

ermitteln wir ebenfalls durch Trennung der Variablen:

$$y(x) = -\frac{2}{2 + x^2}, \quad \text{dom } y = J = \mathbb{R},$$

dh der Definitionsbereich dieser maximalen Lösung ist  $\mathbb{R}$ , also handelt es sich sogar um eine globale Lösung.

Wir folgern:

Der Definitionsbereich einer maximalen Lösung hängt nicht nur von der Differentialgleichung sondern auch vom Anfangswert ab.

c) Wenden wir Satz 7 auf das Fischmodell

$$\dot{B} = aB - bBR - \lambda B^2 + f_B(t) \quad (45)$$

$$\dot{R} = cBR - dR - \mu R^2 + f_R(t) \quad (46)$$

an, so stellen wir fest: Schreiben wir zum Beginn  $t = 0$  des zeitlichen Beobachtungsintervalls  $[0, T]$  die Anfangspopulationen

$$B(0) = B_0 > 0, \quad R(0) = R_0 > 0, \quad (47)$$

und setzen wir voraus, dass die Zu- und Abwanderungsraten  $f_B, f_R$  stetig differenzierbar sind, so folgt aus Satz 7, dass das AWP (45), (46), (47) genau eine maximale Lösung besitzt. Die Beantwortung der (zu bejahenden) Frage, ob es sich hierbei um eine globale Lösung handelt, sprengt den Rahmen dieser Vorlesung.

## 4. Übung “Differentialgleichungen für Ingenieure”

Ausgabe: 06.05.03

Bearbeitung: 12.05.03-16.05.03

Abgabe: 19.05.03-23.05.03

9. **Lineare oder Nichtlineare ODE Systeme?** Bei welchen der folgenden ODE Systeme handelt es sich um lineare ODE Systeme? Begründen Sie gegebenenfalls, warum es sich NICHT um ein lineares ODE System handelt. Im Fall, dass es sich um ein lineares ODE System handelt geben Sie den Definitionsbereich jeder globalen Lösung an.

Üa.

$$\begin{aligned}\dot{B} &= aB - bBR - \lambda B^2 + \sin(t) \\ \dot{R} &= cBR - dR - \mu R^2 + \cos(t)\end{aligned}$$

Üb.

$$\begin{aligned}y_1' &= |x|y_1 + (\sin x)y_2 + \sqrt{x^2 + 1} \\ y_2' &= e^{-x^2}\end{aligned}$$

Ha.

$$\begin{aligned}y_1' &= y_1 + y_2 + y_3 - \log(1 - x) \\ y_2' &= x y_2 \\ y_3' &= y_1/(1 + x) - 2y_3 + \sqrt{1 + x}\end{aligned}$$

**2 Punkte**

Hb.

$$\begin{aligned}y_1' &= y_1 + y_1 y_2 + 1 \\ y_2' &= y_2 - \tan(x)\end{aligned}$$

**2 Punkte**

10. **Trennung der Veränderlichen bei separablen ODEs.** Lösen Sie die folgenden AWPes für separable ODEs mit der Methode der Trennung der Veränderlichen. Geben Sie den Definitionsbereich der Lösung an.

Üa. **Verallgemeinerte logistische Gleichung**, vgl [Heuser].

$$y' = y \cdot (1 - y^3), \quad y(0) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Üb.  $\dot{u} = t \cdot (u + u^2), \quad u(0) = 1.$

$$\ddot{U}c. \quad y' = -\frac{x^2}{y^3}, \quad y(0) = 1.$$

$$\ddot{U}d. \quad y' = \frac{x^2 y}{1+x}, \quad y(0) = 1.$$

$$\ddot{U}e. \quad y' = \frac{2x}{\cos(y)}, \quad y(0) = 0.$$

Ha. **Logistische Gleichung**, vgl [Heuser].

$$y' = y \cdot (1 - y), \quad y(0) = \frac{1}{2}.$$

**3 Punkte**

$$Hb. \quad \dot{u} = e^u \sin(t), \quad u(0) = 0.$$

**3 Punkte**

$$Hc. \quad y' = -\frac{x^2}{y^3}, \quad y(0) = -1.$$

**3 Punkte**

$$Hd. \quad y' = \frac{1 - y^2}{y \cdot (1 - x)}, \quad y(1/2) = \sqrt{3}/2.$$

**3 Punkte**

$$He. \quad y' = e^{x+y}, \quad y(0) = 0.$$

**3 Punkte**

[Heuser] **H.Heuser**, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, BG Teubner, 1989.

### 4.3 Autonome Systeme: Stationäre Punkte. Stabilität.

**Eine logistische Gleichung.** Zur Beschreibung des Wachstumsverhaltens von Populationen biologischer Systeme werden häufig “logistische Differentialgleichungen” verwendet, etwa

$$\dot{u} = u \cdot (1 - u^2), \quad (48)$$

die natürlich mit einer Anfangsbedingung  $u(0) = u_0$  versehen werden. Bei (48) handelt es sich um eine nichtlineare ODE. Allerdings hat die rechte Seite dieser ODE eine sehr spezielle Gestalt: sie hängt nicht explizit von der Zeit  $t$  ab, dh

$$\dot{u} = F(u),$$

wobei  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Derartige ODEs heissen “autonom”.

In unserem Beispiel ist  $F(u) = u \cdot (1 - u^2)$ ,  $u \in \mathbb{R}$ .  $F$  hat drei Nullstellen:  $0, \pm 1$ . Also kennen wir drei konstante Lösungen von (48),

$$u[0] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad u[0](t) = 0,$$

$$u[-1] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad u[-1](t) = -1, \quad u[+1] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad u[+1](t) = +1,$$

da für  $a \in \{0, \pm 1\}$  gilt

$$\frac{du[a]}{dt}(t) = 0 = F(a) = F(u[a](t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Keine dieser drei Funktionen hängt von der Zeit ab. Wir sagen, dass es sich um “stationäre Lösungen von (48)” handelt. Die Werte  $0, \pm 1$  sind die “stationären Punkte von (48)”.

Natürlich können wir nicht erwarten, dass eine dieser drei Funktionen tatsächlich (48) mit der Anfangsbedingung  $u(0) = u_0$  löst (dies wäre genau dann der Fall, wenn  $u_0 = 0$  oder  $u_0 = \pm 1$  wäre), doch wir können uns die Frage nach der Stabilität der stationären Punkte  $0, \pm 1$  stellen.

Damit ist Folgendes gemeint.

Nehmen wir einmal an, dass eine Lösung  $u$  von (48) zumindest auf dem Zeitintervall  $[0, +\infty[$  definiert ist und für  $t \uparrow +\infty$  gegen einen Grenzwert  $u^*$  konvergiert. Dann kann - einfach - gezeigt werden, dass gelten muss

$$\lim_{t \uparrow +\infty} \dot{u}(t) = 0,$$

und wir erhalten aus (48) wegen der Stetigkeit von  $F$ ,

$$0 = \lim_{t \uparrow +\infty} \dot{u}(t) = \lim_{t \uparrow +\infty} F(u(t)) = F\left(\lim_{t \uparrow +\infty} u(t)\right) = F(u^*).$$

Wir folgern: wenn eine Lösung  $u$  von (48) zumindest auf  $[0, +\infty[$  definiert ist und wenn diese Lösung  $u$  für  $t \uparrow +\infty$  gegen einen Grenzwert  $u^*$  konvergiert, so muss dieser Grenzwert ein stationärer Punkt sein.

Es erhebt sich nun zwei Fragen:

F1. Gibt es maximale Lösungen von (48), die zumindest auf  $[0, +\infty[$  definiert sind und für  $t \uparrow +\infty$  konvergieren ?

F2. Wenn es solche Lösungen gibt: Wie sehen die zugehörigen Startwerte  $u_0$  aus ?

Frage F1. kann sehr schnell - und entsprechend unbefriedigend - beantwortet werden. Jede der drei stationären Lösungen  $u[a]$ ,  $a \in \{0, \pm 1\}$ , ist auf  $\mathbb{R}$  definiert und konvergiert für  $t \uparrow +\infty$  (mit Grenzwert  $a$ ).

Frage F2. ist schwieriger zu beantworten.

Zunächst stellen wir fest: Ist  $u$  eine maximale Lösung von (48), so ist entweder  $u$  eine stationäre Lösung oder es gilt

$$u(t) \neq 0, \pm 1, \quad t \in \text{dom } u.$$

Denn: Ist  $u$  keine stationäre Lösung von (48) und gilt aber  $-zB - u(t_*) = 0$  für ein  $t_* \in \text{dom } u$ , so ist  $u$  maximale Lösung des AWP

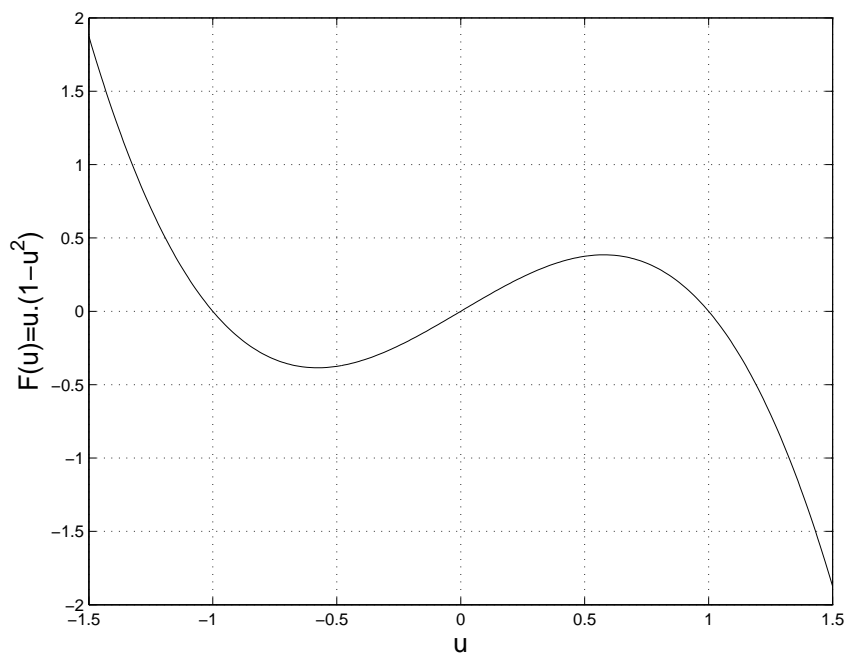
$$\dot{u} = u \cdot (1 - u^2), \quad u(t_*) = 0. \quad (49)$$

Dieses AWP hat aber schon eine maximale Lösung - nämlich  $u = u[0]$ . Nach dem Eindeutigkeitsresultat von Satz 7 - die Funktion  $F$  ist klarer Weise stetig differenzierbar - hat (49) aber genau eine maximale Lösung. Also ist  $u = u[0]$ , womit  $u$  DOCH eine stationäre Lösung ist.

Nun hilft uns eine Kurvendiskussion von  $F$ .

Veranschaulichen wir uns den Graphen von  $F$  für Argumente im Intervall  $[-1.5, 1.5]$  zB mit MATLAB:

```
>> u=-1.5:0.01:1.5;
>> plot(u,u.*(1-u.^2));
```



Wir vermuten an Hand des geplotteten Kurvenverlaufs und können auch sehr einfach beweisen, dass  $F \dots$

- ...negativ auf  $] - 1, 0[ \cup ] + 1, +\infty[$  ist,
- ...positiv auf  $] - \infty, -1[ \cup ] 0, +1[$  ist.

Nach einer eingehenden Diskussion - die den Rahmen der Vorlesung sprengt, die aber an Hand des Verlaufs von  $F$  sehr plausibel ist - folgt aus dieser Kurvendiskussion, dass ...

- ...falls  $u_0 < -1$ , die maximale Lösung  $u$  zumindest auf  $[0, +\infty[$  definiert ist, streng monoton wächst und  $\lim_{t \uparrow +\infty} u(t) = -1$  gilt.
- ...falls  $-1 < u_0 < 0$ , die maximale Lösung  $u$  zumindest auf  $[0, +\infty[$  definiert ist, streng monoton fällt und  $\lim_{t \uparrow +\infty} u(t) = -1$  gilt.
- ...falls  $0 < u_0 < +1$ , die maximale Lösung  $u$  zumindest auf  $[0, +\infty[$  definiert ist, streng monoton wächst und  $\lim_{t \uparrow +\infty} u(t) = +1$  gilt.
- ...falls  $+1 < u_0 < +\infty$ , die maximale Lösung  $u$  zumindest auf  $[0, +\infty[$  definiert ist, streng monoton fällt und  $\lim_{t \uparrow +\infty} u(t) = +1$  gilt.

Wir können damit die Frage F2. vollständig beantworten:

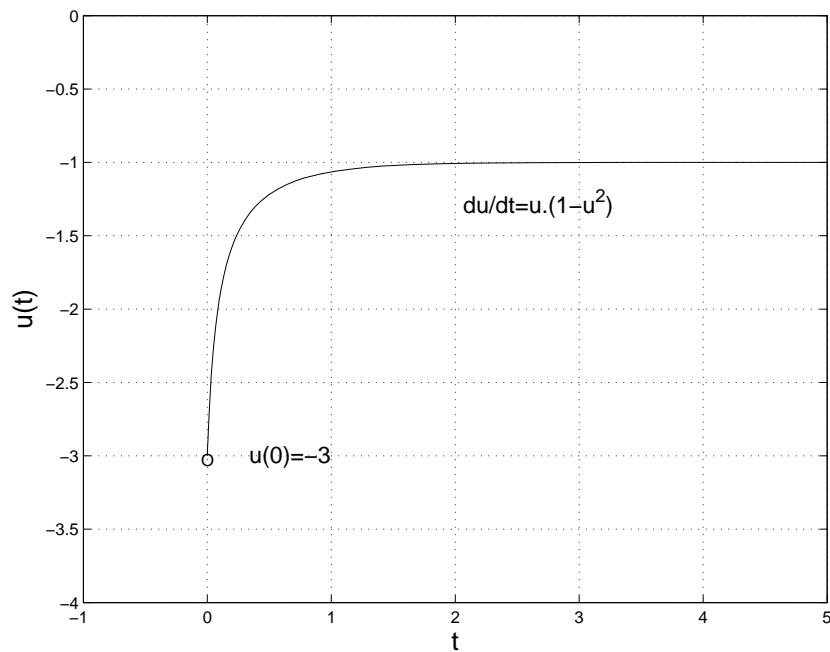
- Wenn  $u_0 < 0$ , dann ist die maximale Lösung  $u$  von (48) mit  $u(0) = u_0$  zumindest auf  $[0, +\infty[$  definiert und es gilt  $\lim_{t \uparrow +\infty} u(t) = -1$ .

Einige Lösungen können wir uns mit MATLAB veranschaulichen. Dazu legen wir das File "F.m" an

```
function du = F(t,u)
du = u.*(1-u.^2);
```

Die so definierte Funktion "F" verwenden wir mit dem Startwert  $-3$  in einem Standard-Solver für ODEs von MATLAB. Wir betrachten die Lösung auf dem Zeitintervall  $[0, 5]$  und plotten das Ergebnis.

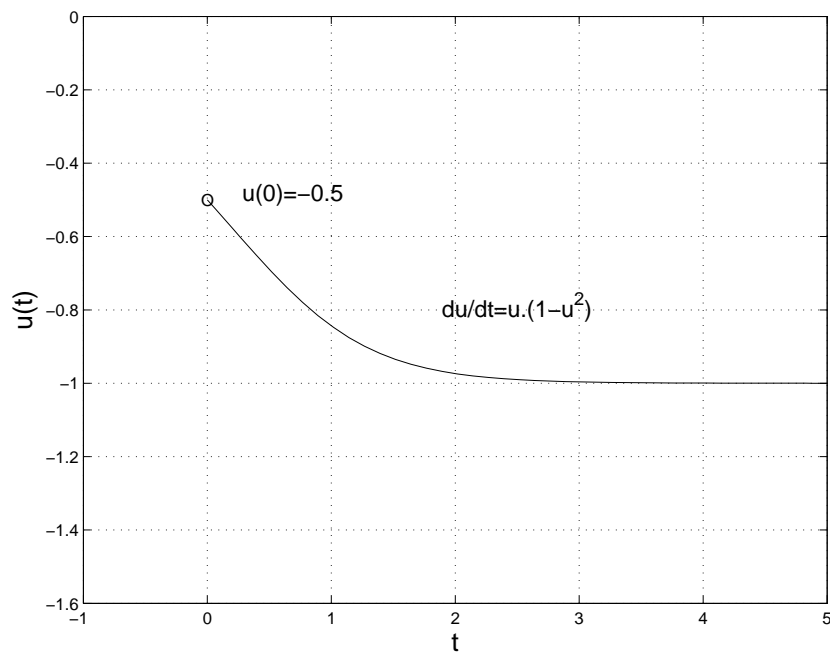
```
>> [t,u]=ode45(@F,[0 5],[-3]);
>> plot(t,u);
```



Zum Vergleich: die Lösung mit dem Startwert  $-1/2$ , die wir mit den MATLAB Befehlen

```
>> [t,u]=ode45(@F,[0 5],[-0.5]);
>> plot(t,u);
```

erzeugen. Neuerlich interessieren wir uns für das Zeitintervall  $[0, 5]$ .

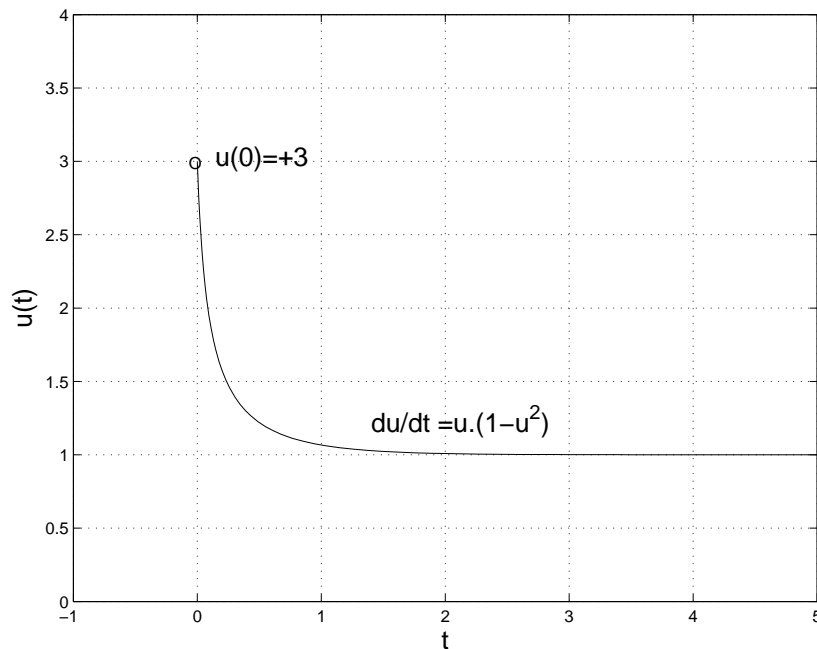


- Wenn  $u_0 = 0$ , dann ist die maximale Lösung  $u$  von (48) mit  $u(0) = u_0$  zumindest auf  $[0, +\infty[$  definiert und es gilt  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0$ .  
Hier ist nichts Interessantes mit einem ODE-Solver zu simulieren.
- Wenn  $u_0 > 0$ , dann ist die maximale Lösung  $u$  von (48) mit  $u(0) = u_0$  zumindest auf  $[0, +\infty[$  definiert und es gilt  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = +1$ .  
Wieder verwenden wir MATLAB, um die Lösung von (48) mit dem Startwert  $u_0 = 3$  auf dem Intervall  $[0, 5]$  zu betrachten.

Die Befehle

```
>> [t,u]=ode45(@F,[0 5],[+3]);
>> plot(t,u);
```

erzeugen

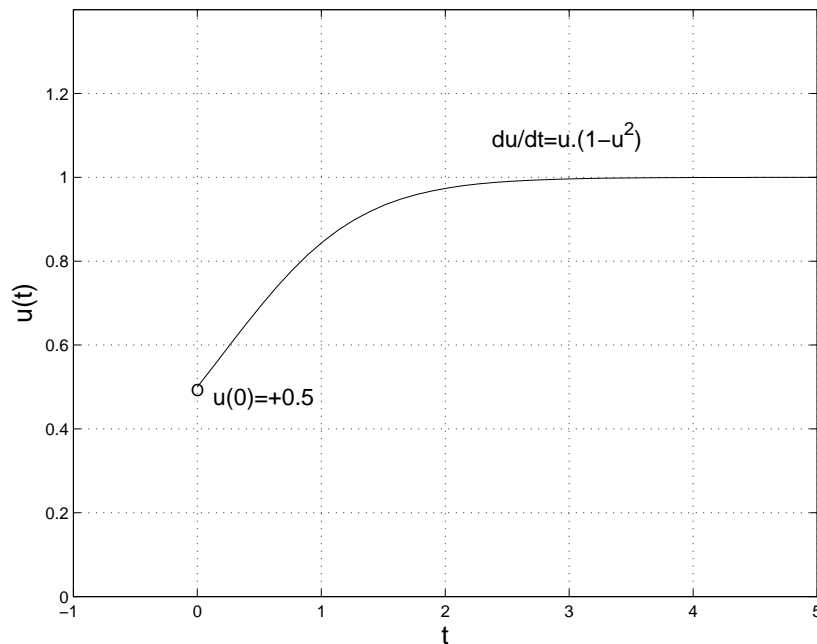


Schliesslich wollen wir uns noch mit MATLAB die Lösung von (48) mit dem Startwert  $u_0 = 0.5$  auf dem Intervall  $[0, 5]$  veranschaulichen.

Mit

```
>> [t,u]=ode45(@F,[0 5],[+0.5]);
>> plot(t,u);
```

erhalten wir



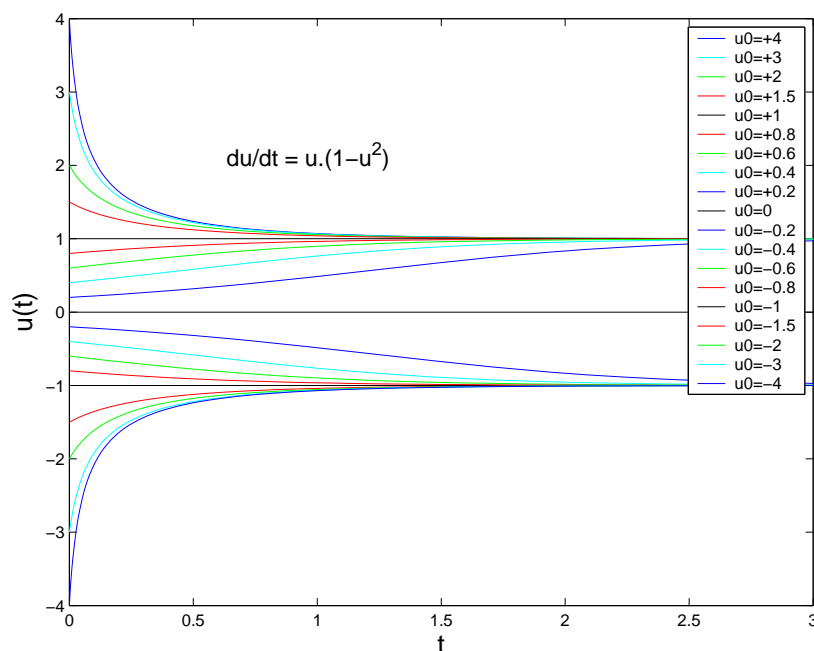
Das Lösungsverhalten der maximalen Lösung von (48) unterscheidet sich für die Fälle  $u_0 \neq 0$  vom Fall  $u_0 = 0$ :

- Es gibt ein  $\delta \in \mathbb{R}^+$  - nämlich  $\delta = 1$  - so dass für alle  $u_0 \in \mathbb{R}$  gilt:  
 Falls  $|u_0 - (-1)| < \delta$ , so ist die maximale Lösung von (48) mit  $u(0) = u_0$  zumindest auf  $[0, +\infty[$  definiert und es gilt  

$$\lim_{t \uparrow +\infty} u(t) = -1.$$
- Es gibt ein  $\delta \in \mathbb{R}^+$  - nämlich  $\delta = 1$  - so dass für alle  $u_0 \in \mathbb{R}$  gilt:  
 Falls  $|u_0 - (+1)| < \delta$ , so ist die maximale Lösung von (48) mit  $u(0) = u_0$  zumindest auf  $[0, +\infty[$  definiert und es gilt  

$$\lim_{t \uparrow +\infty} u(t) = +1.$$
- Egal wie klein  $\delta \in \mathbb{R}^+$  auch gewählt sein mag - es gibt IMMER ein  $u_0 \in \mathbb{R}^+$  mit:  
 $|u_0 - 0| < \delta$ , doch die maximale Lösung von (48) mit  $u(0) = u_0$  (die zumindest auf  $[0, +\infty[$  definiert ist) konvergiert für  $t \uparrow +\infty$  nicht gegen 0.

Die folgende, wieder mit der MATLAB Routine `ode45` erstellte Grafik zeigt diese Unterschiede.



An Hand dieser Erkenntnisse erscheint es gerechtfertigt, die stationären Punkte  $\pm 1$

asymptotisch stabil

zu nennen, während der stationäre Punkt 0 offenbar

instabil

ist.

Ende des Beispiels.

Wir wollen die Begriffe, die zur Behandlung dieses Beispiels entwickelt wurden in allgemeinerem Rahmen definieren.

Dazu nehmen wir für den Rest dieses Abschnitts an:

- $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ , ist eine natürliche Zahl.
- $G$  ist eine offene, nicht leere Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ .
- $\vec{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Es kann natürlich - wie etwa in obigem Beispiel -  $n = 1$  sein. Dann ist  $\vec{F} = F : G \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $G \subseteq \mathbb{R}$  ist offen, etwa  $G = \mathbb{R}$  und  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(u) = u(1 - u^2)$ .

Von grösserem Interesse ist auf jeden Fall  $n \geq 2$ , etwa wie beim Volterra-Lotka Modell  $n = 2$ ,  $G = \mathbb{R}^2$  und

$$\vec{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{F}(B, R) = \begin{pmatrix} aB - bBR - \lambda B^2 \\ cBR - dR - \mu R^2 \end{pmatrix},$$

wobei  $a, b, c, d, \lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$  gegeben sind.

$$\vec{y}' = \vec{F}(\vec{y}) \quad (50)$$

ist ein **autonomes ODE System**.

$\vec{y}_s$  ist ein **stationärer Punkt von** (50), wenn  $\vec{y}_s$  eine Nullstelle von  $\vec{F}$  ist, dh wenn gilt

$$\vec{y}_s \in G \text{ und } \vec{F}(\vec{y}_s) = \vec{0}$$

wobei  $\vec{0}$  der Nullvektor im  $\mathbb{R}^n$  ist.

Ist  $\vec{y}_s$  ein stationärer Punkt von (50), so definieren wir weiter:

- a)  $\vec{y}_s$  ist **stabil**, wenn es zu jedem  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$  ein  $\delta(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+$  gibt, so dass gilt: Das AWP

$$\vec{y}' = \vec{F}(\vec{y}), \quad \vec{y}(0) = \vec{y}_0$$

hat für jedes  $\vec{y}_0 \in G$  mit

$$|\vec{y}_0 - \vec{y}_s| \leq \delta(\varepsilon)$$

mindestens eine Lösung und jede dieser Lösungen  $\vec{y}$  ist zumindest auf  $[0, +\infty[$  definiert und es gilt

$$|\vec{y}(x) - \vec{y}_s| \leq \varepsilon, \quad x \in [0, +\infty[.$$

- b)  $\vec{y}_s$  ist **asymptotisch stabil**, wenn  $\vec{y}_s$  stabil ist und es ein  $\delta \in \mathbb{R}^+$  gibt, so dass gilt: Das AWP

$$\vec{y}' = \vec{F}(\vec{y}), \quad \vec{y}(0) = \vec{y}_0$$

hat für jedes  $\vec{y}_0 \in G$  mit

$$|\vec{y}_0 - \vec{y}_s| \leq \delta$$

mindestens eine Lösung und jede dieser Lösungen  $\vec{y}$  ist zumindest auf  $[0, +\infty[$  definiert und es gilt

$$\lim_{x \uparrow +\infty} \vec{y}(x) = \vec{y}_s.$$

- c)  $\vec{y}_s$  ist **instabil**, wenn es zu jedem noch so kleinen  $\delta \in \mathbb{R}^+$  mindestens ein  $\vec{y}_\delta \in G$  gibt, so dass  $|\vec{y}_\delta - \vec{y}_s| \leq \delta$ , jedoch für jede Lösung  $\vec{y}$  des AWP

$$\vec{y}' = \vec{F}(\vec{y}), \quad \vec{y}(0) = \vec{y}_\delta$$

gilt: Entweder umfasst  $\text{dom } \vec{y}$  nicht das Intervall  $[0, +\infty[$ , oder  $\vec{y}(x)$  konvergiert für  $x \uparrow +\infty$  nicht gegen  $\vec{y}_s$ .

**Bemerkungen. Beispiele.**

- a) Ist  $\vec{y}_s$  ein stationärer Punkt von (50), so ist  $\vec{y}_s$  entweder stabil oder instabil (und natürlich nicht beides).
- b) Ist  $\vec{y}_s$  ein asymptotisch stabiler Punkt von (50), so ist  $\vec{y}_s$  auch stabil. MaW: "Asymptotische Stabilität" ist ein stärkerer Begriff als "Stabilität".
- c) Beispiele für asymptotisch stabile und instabile stationäre Punkte lernten wir bei der logistischen Gleichung am Beginn dieses Kapitels kennen.
- d) Gibt es stabile stationäre Punkte, die nicht asymptotisch stabil sind? Diese Frage kann an Hand des sehr einfachen (noch dazu linearen) ODE Systems

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{y}(0) = \vec{y}_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

bejaht werden. Offensichtlich ist  $\vec{y}_s = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  der einzige stationäre Punkt dieses autonomen ODE Systems. Mit altbekannten Methoden erhalten wir als Lösung

$$\vec{y}(x) = \cos(x) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \sin(x) \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (51)$$

so dass

$$|\vec{y}(x)| = |\vec{y}_0|, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (52)$$

Also konvergiert  $\vec{y}(x)$  für  $x \uparrow +\infty$  (ausser im trivialen Fall  $\vec{y}_0 = \vec{0}$ ) nicht gegen  $\vec{0}$ , da dann  $\lim_{x \uparrow +\infty} |\vec{y}(x)| = 0$  für alle  $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^2$ , deren Betrag hinreichend klein ist gelten müsste. Also ist  $\vec{0}$  nicht asymptotisch stabil.

Andererseits ist  $\vec{0}$  stabil. Wählen wir im obigen Satz  $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ , so folgt aus  $|\vec{y}_0| \leq \varepsilon$  aus (52), dass

$$|\vec{y}(x) - \vec{0}| = |\vec{y}(x)| = |\vec{y}_0| \leq \varepsilon, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Genau dies ist die Stabilitätsbedingung. Also ist  $\vec{0}$  ein stabiler stationärer Punkt von (51).

**Offene Fragen.** Die stationären Punkte des Volterra-Lotka Systems sind

$$(0, 0), \quad (a/\lambda, 0), \quad (0, -d/\mu), \quad \left( \frac{bd + a\mu}{bc + \lambda\mu}, \frac{ac - d\lambda}{bc + \lambda\mu} \right).$$

Sind diese stabil oder instabil ?

Mit den bisherigen Methoden und Erkenntnissen können wir diese Frage nicht ohne Weiteres beantworten.

Beruhigenderweise gibt es aber

**Satz 8. Stabilitätsbedingung autonomer Systeme.** *Zusätzlich zu den in diesem Abschnitt gültigen Voraussetzungen und Notationen setzen wir voraus*

$\vec{F}$  ist stetig partiell differenzierbar

Sei  $\vec{y}_s$  ein stationärer Punkt von

$$\vec{y}' = \vec{F}(\vec{y}).$$

Wir betrachten die Jacobi-Matrix von  $\vec{F}$  an der Stelle  $\vec{y}_s$ ,

$$\mathbf{J}(\vec{y}_s) = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{y}}(\vec{y}_s).$$

Wir bezeichnen die Realteile der Eigenwerte dieser Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}(\vec{y}_s)$  mit  $\xi_1, \dots, \xi_\sigma$ , wobei  $1 \leq \sigma \leq n$ . Dann gilt:

- a) Sind  $\xi_1, \dots, \xi_\sigma$  negativ, so ist  $\vec{y}_s$  asymptotisch stabil.
- b) Ist mindestens eine der reellen Zahlen  $\xi_1, \dots, \xi_\sigma$  positiv, so ist  $\vec{y}_s$  instabil.

### Bemerkungen. Beispiele.

- a) Behalten wir die Bezeichnungen von Satz 8 bei, so wird der Fall nicht-positiver Zahlen  $\xi_1, \dots, \xi_\sigma$ , wobei eine dieser Zahlen=0 ist, NICHT behandelt. Das hat einen guten Grund: In diesem Fall kann aus der Kenntnis der Jacobi-Matrix an der Stelle  $\vec{y}_s$  NICHT auf Stabilität/Instabilität von  $\vec{y}_s$  geschlossen werden.
- b) Betrachten wir die logistische Gleichung

$$\dot{u} = u \cdot (1 - u^2)$$

unter dem Blickwinkel von Satz 8. Die stationären Punkte sind  $0, \pm 1$ . Da  $n = 1$  reduziert sich die Jacobi-Matrix auf die Ableitung von  $F$ :

$$\mathbf{J}(u_s) = F'(u_s) = (1 - u_s^2) - 2u_s^2, \quad u_s = 0, \pm 1.$$

Der einzige "Eigenwert" der Zahl  $F'(u_s)$  ist diese Zahl selbst. Wir erhalten:

- $u_s = 0$ :  $F'(0) = 1$ , also ist 0 instabil.
- $u_s = -1$ :  $F'(-1) = -2$ , also ist  $-1$  stabil.
- $u_s = +1$ :  $F'(1) = -2$ , also ist  $+1$  stabil.

- c) Beim Volterra-Lotka Modell erhalten wir

$$\mathbf{J}(B, R) = \begin{pmatrix} a - bR - 2\lambda B & -bB \\ cR & cB - d - 2\mu R \end{pmatrix}.$$

Damit folgt:

$\mathbf{J}(0,0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}$ . Diese Matrix hat die Eigenwerte  $a, -d$ . Also ist einer der Eigenwerte positiv.  $(0,0)$  ist instabil.

$\mathbf{J}(0, -d/\mu) = \begin{pmatrix} a + bd/\lambda & 0 \\ -cd/\lambda & d \end{pmatrix}$ .  $a + bd/\lambda$  ist ein positiver Eigenwert also ist  $(0, -d/\mu)$  instabil.

$\mathbf{J}(a/\lambda, 0) = \begin{pmatrix} -a & -ab/\lambda \\ 0 & ac/\lambda - d \end{pmatrix}$ . Die Eigenwerte sind  $-a$  und  $(ac - d\lambda)/\lambda$ . Ist  $ac < d\lambda$ , so ist  $(a/\lambda, 0)$  asymptotisch stabil, ist  $ac > d\lambda$ , so ist  $(a/\lambda, 0)$  instabil. Im Fall  $ac = d\lambda$  können wir auch mit Hilfe von Satz 8 keine Aussage über die Stabilität von  $(a/\lambda, 0)$  machen.

$\mathbf{J}\left(\frac{bd+a\mu}{bc+\lambda\mu}, \frac{ac-d\lambda}{bc+\lambda\mu}\right) = \mathbf{J}(B_s, R_s) = \begin{pmatrix} -\lambda B_s & -bB_s \\ cR_s & -\mu R_s \end{pmatrix}$ . Die Eigenwerte sind  $-\lambda B_s$  und  $-\mu R_s$ . Ist  $R_s$  positiv - dies ist genau dann der Fall, wenn  $ac > d\lambda$  - dann ist  $(B_s, R_s)$  asymptotisch stabil. Ist  $R_s$  negativ - dies gilt genau dann, wenn  $ac < d\lambda$  - dann ist  $(B_s, R_s)$  instabil. Im Fall  $R_s = 0$  - oder, was das Gleiche ist,  $ac = d\lambda$  - können wir auch mit Hilfe von Satz 8 keine Aussage über die Stabilität von  $(B_s, R_s)$  machen.

#### 4.4 ODEs höherer Ordnung.

**Das mathematische Pendel.** Wir betrachten ein ebenes Pendel, das um einen festen Aufhängpunkt Schwingungen ausführt. Die Länge der masselosen, starren Stange sei  $L$ , die Masse des Schwingkörpers sei  $m$ .

Um die Bewegungsgleichung des Pendels herzuleiten, benötigen wir das Zweite Newton'sche Gesetz:

$$\text{“Kraft = Masse mal Beschleunigung”}.$$

Wir nehmen an, dass auf das Pendel ausschliesslich die Erdanziehungskraft in räumlich unveränderlicher Richtung wirkt. Der Betrag dieser Kraft ist  $mg$ ,  $g \approx 9.81ms^{-2}$ .

Wir betrachten das Pendel in einem Zeitintervall  $[0, T]$ ,  $T \in \mathbb{R}^+$  sei gegeben.

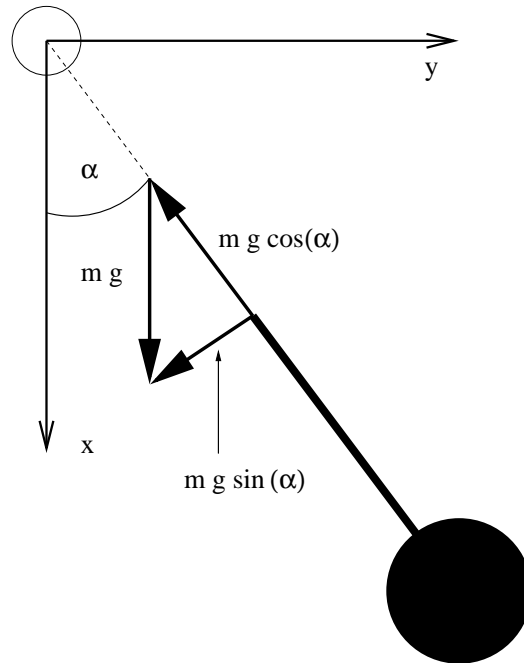
Zur Zeit  $t \in [0, T]$  ist die Position des Mittelpunkts des Schwingkörpers

$$\vec{p}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

Laut Skizze gilt

$$x(t) = L \cos(\alpha(t)), \quad y(t) = L \sin(\alpha(t)),$$

wobei  $\alpha(t)$  der Öffnungswinkel zur Zeit  $t \in [0, T]$  ist.  
 Klarerweise ist  $\alpha : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ .



Die nach unseren Modellannahmen angreifende Kraft ist

$$\begin{pmatrix} mg \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Durch die Aufhängung wird von dieser Kraft die Komponente in Richtung des Stabes kompensiert. Es wirkt nur die Kraftkomponente in tangentialer Richtung.

Der Betrag dieser Kraft ist - siehe Skizze -  $mg \sin(\alpha(t))$ ,  $t \in [0, T]$ .

Der Einheitsvektor in Tangentenrichtung ist

$$\begin{pmatrix} \sin(\alpha(t)) \\ -\cos(\alpha(t)) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, T].$$

Wir erhalten damit aus dem Zweiten Newtonschen Gesetz

$$mg \sin(\alpha(t)) \begin{pmatrix} \sin(\alpha(t)) \\ -\cos(\alpha(t)) \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, T]. \quad (53)$$

Vermeiden wir zwecks besserer Lesbarkeit die Zeitvariable "t" anzuführen und kürzen wir in (53) die Masse m, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \sin^2(\alpha) \\ -g \sin(\alpha) \cos(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (54)$$

In diesen Modellgleichungen ist noch nicht der Zusammenhang

$$x(t) = L \cos(\alpha(t)), \quad y(t) = L \sin(\alpha(t)), \quad t \in [0, T] \quad (55)$$

berücksichtigt.

Zweimaliges Differenzieren der beiden Gleichungen von (55) und Weglassen der Zeitvariable “ $t$ ” ergibt

$$\ddot{x} = -L \ddot{\alpha} \sin(\alpha) - L (\dot{\alpha})^2 \cos(\alpha), \quad \ddot{y} = L \ddot{\alpha} \cos(\alpha) - L (\dot{\alpha})^2 \sin(\alpha).$$

Setzen wir dies in (55) ein, so erhalten wir mit

$$\omega := \sqrt{g/L} \in \mathbb{R}^+$$

die Differentialgleichungen

$$\ddot{\alpha} \sin(\alpha) + (\dot{\alpha})^2 \cos(\alpha) = -\omega^2 \sin^2(\alpha) \quad (56)$$

$$\ddot{\alpha} \cos(\alpha) - (\dot{\alpha})^2 \sin(\alpha) = -\omega^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \quad (57)$$

Multiplizieren wir Gleichung (56) mit  $\sin(\alpha)$ , multiplizieren wir Gleichung (57) mit  $\cos(\alpha)$  und addieren wir die Resultate, so verschwinden die Terme, welche “ $(\dot{\alpha})^2$ ” enthalten und es resultiert

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} \cdot (\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)) &= -\omega^2 \cdot (\sin^3(\alpha) + \sin(\alpha) \cos^2(\alpha)) \\ &= -\omega^2 \sin(\alpha) \cdot (\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)), \end{aligned}$$

woraus wir mit  $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$  die Pendelgleichung

$$\ddot{\alpha} + \omega^2 \sin(\alpha) = 0 \quad (58)$$

erhalten.

Die Pendelgleichung ist eine nichtlineare ODE der Ordnung 2.

Ende der Modellierung.

Wie wir bei der Herleitung der Pendelgleichung gesehen haben, treten zumindest in den Fällen, wo das Zweite Newtonsche Gesetz eine Rolle spielt, Differentialgleichungen höherer (also mindestens zweiter) Ordnung auf.

Diese Differentialgleichungen wurden im Rahmen dieser Vorlesung noch nicht behandelt.

Allerdings können diese Differentialgleichungen mit einem leicht zu merkenden Trick auf ODE Systeme der Ordnung 1 transformiert werden.

Damit können wir alle Resultate der bisherigen Abschnitte auf Differentialgleichungen höherer Ordnung übertragen.

Dies wollen wir im Folgenden tun.

Allerdings beschränken wir uns auf skalare ODEs höherer Ordnung. ODE Systeme höherer Ordnung können auf ganz ähnliche Weise in ODE Systeme erster Ordnung (unter Vermehrung der Anzahl der unbekannt Funktionen) transformiert werden. Der interessierte Leser ist eingeladen, dies selbst durchzuführen.

Wir beginnen mit einigen Begriffsbildungen. Dazu nehmen wir für den Rest dieses Abschnitts Folgendes an.

- $I = ]a, b[$ ,  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ,  $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  ist ein offenes Intervall.
- $n, k \in \mathbb{N}$ ,  $n, k \geq 1$  sind natürliche Zahlen.
- $G \subseteq \mathbb{R}^k$  ist offen, nichtleer.
- $F : I \times G \rightarrow \mathbb{R}$ .

Ist  $y : J \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $J$  ein Intervall,  $k$ -mal differenzierbar, so setzen wir

$$y^{(0)} = y, \quad y^{(1)} = y', \quad y^{(2)} = y'', \quad \dots, y^{(k)} = k\text{-te Ableitung von } y.$$

Unter den in diesem Abschnitt gültigen Abkürzungen und Voraussetzungen heisst

$$y^{(k)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(k-1)}) \quad (59)$$

**gewöhnliche Differentialgleichung der Ordnung  $k$ ,**

oder kürzer

**ODE der Ordnung  $k$ .**

$y$  ist eine **lokale Lösung von** (59), wenn gilt:

- $y : J \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $J \subseteq I$  ein Intervall ist, ist  $k$ -mal differenzierbar,
- es gilt

$$\begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y''(x) \\ \vdots \\ y^{(k-1)}(x) \end{pmatrix} \in G, \quad x \in J,$$

- und es gilt

$$y^{(k)}(x) = F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(k-1)}(x)), \quad x \in J.$$

$y$  ist eine **globale Lösung von** (59), wenn  $y$  eine lokale Lösung von (59) mit  $\text{dom } y = J = I$  ist.

Ausserdem benötigen wir

$y$  ist eine **maximale Lösung** von

$$y^{(k)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(k-1)}), \quad (60)$$

wenn

- $y : J \rightarrow \mathbb{R}$  eine lokale Lösung von (60) ist und
- sich  $y$  nicht zu einer lokalen Lösung von (60) mit größerem Definitionsbereich fortsetzen lässt, i.e. wenn für jede lokale Lösung  $y_* : J_* \rightarrow \mathbb{R}$  von (60) mit  $J \subseteq J_*$  und  $y(x) = y_*(x)$  für  $x \in J$  folgt:  $J_* = J$ .

**Beispiel.** Bei der Pendelgleichung (58) handelt es sich um eine ODE der Ordnung 2:

$$\ddot{\alpha} = F(t, \alpha, \dot{\alpha}) = -\omega^2 \sin(\alpha),$$

dh

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(t, u, v) = -\omega^2 u.$$

Hier hängt  $F$  nur von der zweiten Variable ab.

**Transformation: ODE der Ordnung  $k \rightarrow$  ODE System erster Ordnung.** Wir betrachten unter zu Grunde Legung der in diesem Abschnitt gültigen Abkürzungen und Voraussetzungen (59), i.e.

$$y^{(k)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(k-1)}). \quad (61)$$

1. Wir führen neue Funktionen ein:

$$\begin{aligned} y_1 &= y \\ y_2 &= y' \\ y_3 &= y'' \\ &\text{usw} \\ y_k &= y^{(k-1)} \end{aligned}$$

2. Die ersten Ableitungen der Funktionen  $y_1, \dots, y_{k-1}$  werden durch  $y_2, \dots, y_k$  ausgedrückt, die Ableitung von  $y_k$  ist  $y^{(k)}$ .

$$\begin{aligned} y_1' &= y' = y_2 \\ y_2' &= y'' = y_3 \\ y_3' &= y''' = y_4 \\ &\text{usw} \\ y_{k-1}' &= y^{(k-1)} = y_k \\ y_k' &= \left( y^{(k-1)} \right)' = y^{(k)} \end{aligned}$$

3. Ersetzen wir in (61),  $\boxed{y^{(k)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(k-1)})}$  die Argumente  $y, y', y'', \dots, y^{(k-1)}$  durch  $y_1, y_2, y_3, \dots, y_k$ , so erhalten wir mit  $y_k' = y^{(k)}$  (siehe 2.) die Gleichung

$$y_k' = F(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_k).$$

4. Wir erhalten das System

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ \vdots \\ y_k' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ F(x, y_1, y_2, y_3, \dots, y_k) \end{pmatrix} = \vec{F}(x, \vec{y}),$$

also

$$\vec{y}' = \vec{F}(x, \vec{y}).$$

**Beispiel Pendelgleichung.**  $y'' = -\omega^2 \sin(y)$ .

1. Einführung von  $y_1, y_2$  via

$$\begin{aligned}y_1 &= y \\ y_2 &= y'\end{aligned}$$

2. Ableiten von  $y_1, y_2$  ergibt

$$\begin{aligned}y_1' &= y' = y_2 \\ y_2' &= y''\end{aligned}$$

3. Es gilt  $y_2' = y'' = -\omega^2 \sin(y) = -\omega^2 \sin(y_1)$ .
4. Wir erhalten das System erster Ordnung

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -\omega^2 \sin(y_1) \end{pmatrix}.$$

**Bemerkung.** Warum transformieren wir skalare ODEs der Ordnung  $k$  (oder, was ganz ähnlich geht, ODE Systeme der Ordnung  $k$ ) auf ODE Systeme erster Ordnung? Darauf gibt es zumindest zwei Antworten.

Erstens können wir die Theorie der ODE Systeme erster Ordnung sofort auf skalare ODEs der Ordnung  $k$  (bzw ODE Systeme der Ordnung  $k$ ) übertragen. Insbesondere erhalten wir umgehend Antwort auf die Fragen nach Existenz und Eindeutigkeit maximaler Lösungen, siehe den nachfolgenden Satz.

Zweitens kann durch die Transformation numerische Software für ODE Systeme erster Ordnung (die sehr gut entwickelt ist) zum Lösen skalarer ODEs der Ordnung  $k$  (bzw ODE Systeme der Ordnung  $k$ ) unmittelbar eingesetzt werden.

Der zentrale Satz dieses Abschnitts ist dank der Transformation auf ein ODE System erster Ordnung eine direkte Folgerung aus Satz 7.

**Satz 9.** Wir betrachten die skalare ODE der Ordnung  $k$

$$y^{(k)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(k-1)}), \quad (62)$$

unter den in diesem Abschnitt formulierten Voraussetzungen. Ferner setzen wir voraus:

$F$  ist stetig partiell differenzierbar

Dann gilt:

a1) (62) besitzt unendlich viele maximale Lösungen.

a2) Ist  $y : J \rightarrow \mathbb{R}$  eine maximale Lösung von (62) so ist  $J = ]\alpha, \beta[$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ,  $\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  ein offenes Intervall.

b) Sind  $x_0 \in I$  und  $\vec{y}_0 = \begin{pmatrix} y_{0,0} \\ y_{1,0} \\ \vdots \\ y_{k-1,0} \end{pmatrix} \in G$ , so hat das AWP

$$y^{(k)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(k-1)}),$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, y^{(k-1)}(x_0) = y_{k-1}$$

genau eine maximale Lösung, i.e. es gibt genau eine maximale Lösung  $y : J \rightarrow \mathbb{R}$  von (62), für die  $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \dots, y^{(k-1)}(x_0) = y_{k-1}$  gilt.

**Bemerkung.** Bei Anfangswertproblemen für ODEs der Ordnung  $k$ ,

$$y^{(k)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(k-1)}),$$

werden an  $x_0 \in I$  der Funktionswert  $y(x_0)$  und dessen erste, zweite, ...,  $(k-1)$ te Ableitung  $y'(x_0), y''(x_0), \dots, y^{(k-1)}(x_0)$  vorgeschrieben.

Bei zeitabhängigen Problemen gilt häufig: Der Funktionswert entspricht der Anfangsposition, die Ableitung entspricht einer Geschwindigkeit und die zweite Ableitung entspricht einer Beschleunigung.

**Pendelgleichung.** Wir betrachten die Pendelgleichung für einen Pendelstab einer Länge von  $1m$ . Zur Zeit  $t = 0$  geben wir den anfänglichen Öffnungswinkel von  $1rad$  und die anfängliche Winkelgeschwindigkeit von  $y_2(0)rad/s$ . Wir lösen das entsprechende ODE System erster Ordnung wieder mit MATLAB.

Wir legen das File "pendel.m" an

```
function dy = pendel(t,y)
dy = [0 ; 0]
dy(1) = y(2)
dy(2) = -9.81*sin(y(1))
```

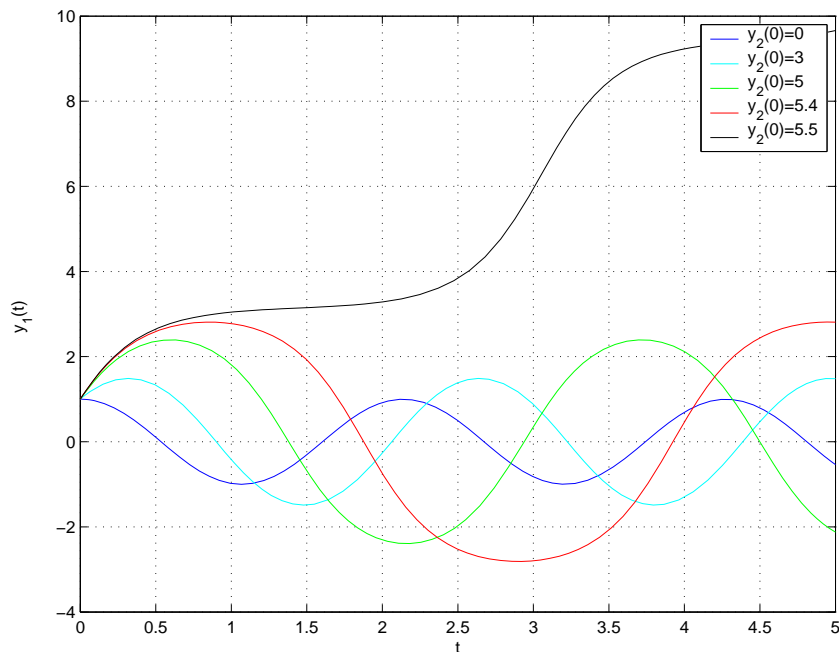
Die so definierte Funktion “pendel” verwenden wir mit den Startwerten  $[1; 0]$ ,  $[1; 3]$ ,  $\dots$ ,  $[1; 5.5]$ , dh  $\alpha(0) = y_1(0) = 1$  und  $\dot{\alpha}(0) = y_2(0) = 0$ ,  $\dot{\alpha}(0) = y_2(0) = 3$ ,  $\dots$ ,  $\dot{\alpha}(0) = y_2(0) = 5.5$ , siehe Kurven, in einem Standard-Solver für ODEs von MATLAB. Wir betrachten die Lösung auf dem Zeitintervall  $[0, 5]$  und plotten das Ergebnis.

Der MATLAB Befehl zur Berechnung der Lösung zB für den Startwert  $[1; 0]$  lautet:

```
>> [t,y]=ode45(@pendel,[0 5],[1 0]);
```

Wir betrachten zuerst die Funktionen des Öffnungswinkels,  $\alpha$ , die nach der Transformation “ $y_1$ ” heisst,

```
>> plot(t,y(:,1));
```

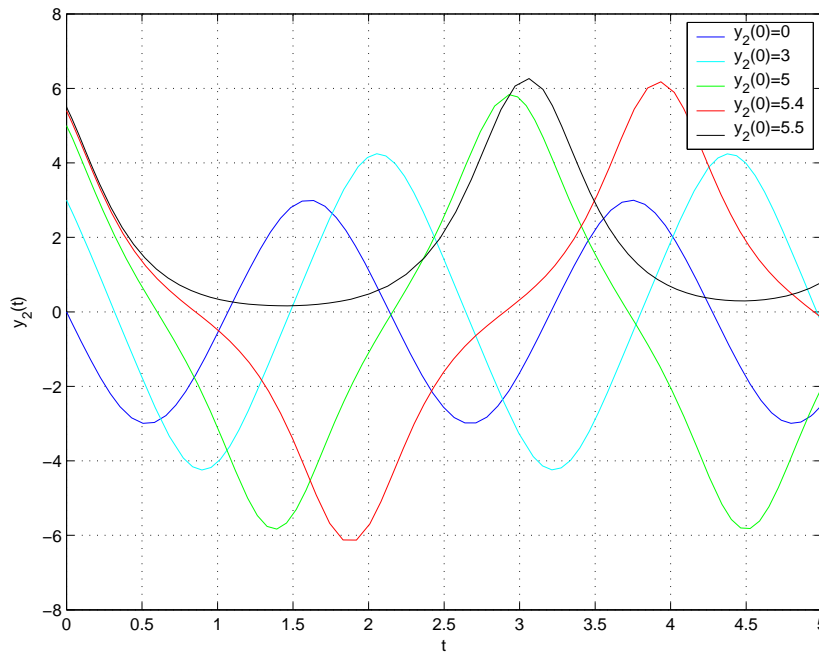


Wir erkennen:

Bei den Anfangswinkelgeschwindigkeiten  $y_2(0) = 0, 3, 5, 5.4$  schwingt das Pendel, bei der Anfangswinkelgeschwindigkeit  $y_2(0) = 5.5$  rotiert das Pendel.

Die korrespondierenden Winkelgeschwindigkeiten  $\dot{\alpha} = y_2$  erhalten wir mit

```
>> plot(t,y(:,2));
```



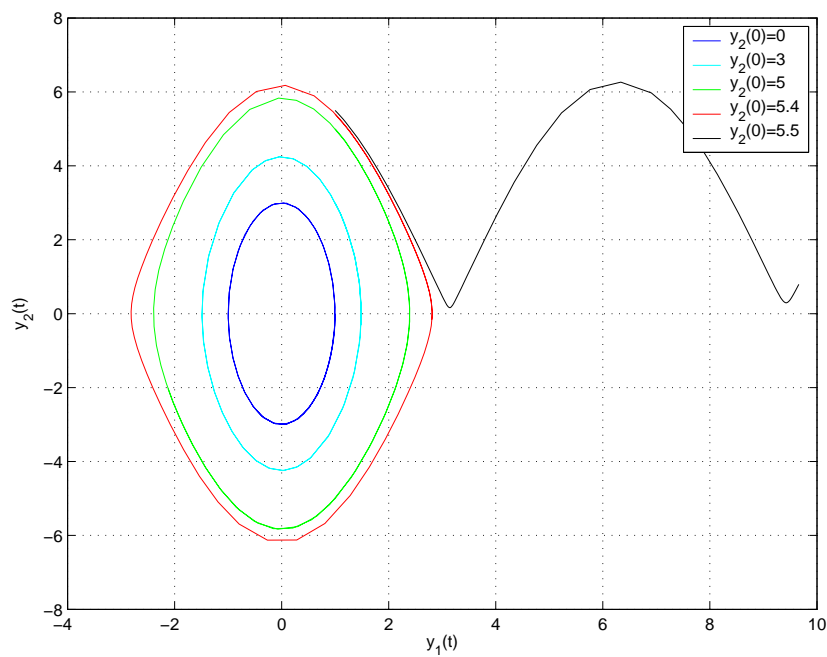
Wir erkennen:

$y_2$  ist eine periodische Funktion.

Jedoch ändert die Anfangswinkelgeschwindigkeit  $y_2(0)$  Form und Periode von  $y_2$ .

Schliesslich geben wir noch das "Phasenportrait" des Pendels für die betrachteten AWPe an.

```
>> plot(y(:,1),y(:,2));
```



Aus Zeitgründen muss eine eingehendere Diskussion entfallen.

Der interessierte Leser sei aber dazu eingeladen, dies auf eigene Faust zu versuchen.

## 4.5 Lineare, skalare ODEs höherer Ordnung

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit linearen, skalaren ODEs der Ordnung  $k$ ,  $k \geq 1$ . Beispiele hierfür sind

**Beispiele.**

- Die ODE

$$y'' + \omega^2 y = 0, \quad \omega \in \mathbb{R}^+,$$

ist eine lineare, skalare ODE der Ordnung 2.

- Die ODE

$$y' + \sin(x)y = x,$$

ist eine lineare, skalare ODE der Ordnung 1.

- Die ODE

$$y^{(4)} - xy''' + \tan(x)y'' = 4$$

ist eine lineare, skalare ODE der Ordnung 4.

Im Folgenden nehmen wir an, dass gegeben ist:

- Ein Intervall  $I$ , etwa  $I = \mathbb{R}$  oder  $I = [0, +\infty[$  oder  $I = [0, 1]$ .
- Eine natürliche Zahl  $k \geq 1$ .
- $k$  reelle Funktionen  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ .
- Eine "Inhomogenität"  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

Wir betrachten ODEs der Form

$$y^{(k)} + a_{k-1}(x)y^{(k-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \quad x \in I, \quad (63)$$

die wir auch in der Form

$$y^{(k)} = F(x, y, y', y'', \dots, y^{(k-1)}),$$

mit

$$\begin{aligned} F(x, y, y', y'', \dots, y^{(k-1)}) \\ = f(x) - a_0(x)y - a_1(x)y' - \dots - a_{k-1}(x)y^{(k-1)}, \end{aligned}$$

also  $F : I \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} F(x, u_0, \dots, u_{k-1}) \\ = f(x) - a_0(x)u_0 - a_1(x)u_1 - \dots - a_{k-1}(x)u_{k-1}, \end{aligned}$$

schreiben können.

Wir folgern:

Lineare, skalare ODEs der Ordnung  $k$  sind spezielle skalare ODEs der Ordnung  $k$ .

Damit können wir (63) in ein ODE System erster Ordnung transformieren. Mit den üblichen Abkürzungen

$$\begin{aligned} y_1 &= y \\ y_2 &= y' \\ y_3 &= y'' \\ &\text{usw} \\ y_k &= y^{(k-1)} \end{aligned}$$

und

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_k \end{pmatrix}$$

erhalten wir - und dies ist nicht wirklich überraschend - ein lineares ODE System erster Ordnung,

$$\vec{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \vec{y} + \vec{f}(x), \quad x \in I, \quad (64)$$

$$\mathbf{A}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & -a_2(x) & \dots & -a_{k-2}(x) & -a_{k-1}(x) \end{pmatrix}, \quad (65)$$

$$\vec{f}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(x) \end{pmatrix}. \quad (66)$$

**Ziel:** Wir wollen uns einen Überblick über die Lösungsmenge von (63) verschaffen.

Dazu definieren wir "Lösung von (63)".

Unter den in diesem Abschnitt gültigen Bezeichnungen und Voraussetzungen ist  $y$  eine **Lösung von**

$$y^{(k)} + a_{k-1}(x)y^{(k-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \quad x \in I,$$

wenn gilt:

$y : I \rightarrow \mathbb{R}$  ist  $k$ -mal differenzierbar und

$$y^{(k)}(x) + a_{k-1}(x)y^{(k-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = f(x), \quad x \in I.$$

Der erste, zentrale Satz dieses Abschnitts wegen der Transformierbarkeit von (63) in das System (64), (65), (66) eine direkte Konsequenz von Satz 3.

**Satz 10.** *Zusätzlich zu den in diesem Abschnitt gültigen Bezeichnungen und Voraussetzungen gelte*

*Die Funktionen  $a_0, \dots, a_{k-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$  sind stetig*

*Die Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig*

Dann gilt:

- a) *Die lineare, skalare ODE der Ordnung  $k$ ,*

$$y^{(k)} + a_{k-1}(x)y^{(k-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \quad x \in I, \quad (67)$$

*besitzt unendlich viele Lösungen.*

- b1) *Die homogene ODE von (67), das aus (67) durch Weglassen der Inhomogenität  $f$  entsteht,*

$$z^{(k)} + a_{k-1}(x)z^{(k-1)} + \dots + a_1(x)z' + a_0(x)z = 0, \quad x \in I, \quad (68)$$

*besitzt unendlich viele Lösungen.*

- b2) *Es gibt  $k$  linear unabhängige Lösungen  $z_1, \dots, z_k$  der homogenen ODE (68).*

- b3) *Sind  $z_1, \dots, z_k$  linear unabhängige Lösungen der homogenen ODE (68), so ist die Lösungsmenge von (68) gegeben durch*

$$z = c_1 z_1 + \dots + c_k z_k, \quad c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}.$$

- c1) *Ist  $y_p$  eine Lösung der inhomogenen ODE (67) und ist  $z$  eine Lösung der homogenen ODE (68), so ist für jedes  $\lambda \in \mathbb{R}$  auch*

$$y_p + \lambda z$$

*eine Lösung der inhomogenen ODE (67).*

- c2) *Ist  $y_p$  eine Lösung der inhomogenen ODE (67) und sind  $z_1, \dots, z_k$  linear unabhängige Lösungen der homogenen ODE (67), so ist die Lösungsmenge der inhomogenen ODE (67) gegeben durch*

$$y_p + c_1 z_1 + \dots + c_k z_k, \quad c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}.$$

Bezüglich Lösbarkeit von AWPen folgern wir ebenfalls aus Satz 3 den zweiten, zentralen Satz dieses Abschnitts.

**Satz 11.** *Zusätzlich zu den in diesem Abschnitt gültigen Bezeichnungen und Voraussetzungen gelte*

*Die Funktionen  $a_0, \dots, a_{k-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$  sind stetig*

*Die Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig*

*Dann gilt:*

*Ist  $x_0 \in I$  und sind  $y_{0,0}, y_{1,0}, \dots, y_{k,0} \in \mathbb{R}$ , so hat das Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} y^{(k)} + a_{k-1}(x)y^{(k-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y &= f(x), \quad x \in I, \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, y^{(k-1)}(x_0) &= y_{k-1} \end{aligned} \quad (69)$$

*genau eine Lösung, dh es gibt genau eine Lösung von*

$$y^{(k)} + a_{k-1}(x)y^{(k-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \quad x \in I,$$

*mit*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \dots, y^{(k-1)}(x_0) = y_{k-1}.$$

### **Bemerkungen zu Satz 10 und Satz 11.**

- Die guten Nachrichten von Satz 10 und Satz 11 sind: Lineare, skalare ODE der Ordnung  $k$  sind lösbar, sie besitzen sogar unendlich viele Lösungen und wenn wir an einer Stelle  $x_0 \in I$  die Werte für

$$y(x_0), y'(x_0), \dots, y^{(k-1)}(x_0)$$

vorschreiben, so gibt es genau eine Lösung von (69), i.e. es gibt genau eine Lösung von (67), die diese Zusatzbedingung erfüllt.

- Die weniger gute Nachricht ist: Es ist aus Satz 10 und Satz 11 kein Rechenverfahren zur Bestimmung der Lösung von (69) extrahierbar. Das ist kein Zufall, denn nur in ganz speziellen Fällen ist die Lösung von (69) eine Standardfunktion.
- Spezielle Fälle, in denen (67) Standardfunktionen als Lösungen besitzt, die zumindest theoretisch berechenbar sind, werden wir im nächsten Abschnitt kennen lernen: Dort sind die Koeffizientenfunktionen  $a_0, \dots, a_{k-1}$  konstant und die Funktion  $f$  hat sehr spezielle Gestalt.

## 4.6 Spezielle lineare, skalare ODEs der Ordnung $k$ mit konstanten Koeffizienten

In diesem Abschnitt betrachten wir spezielle, lineare, skalare ODEs der Ordnung  $k$ , die zumindest theoretisch mit Hilfe von Standardfunktionen lösbar sind.

Beispiele solcher ODEs sind

$$\ddot{x} + k\dot{x} + \omega^2 x = \cos(t), \quad k, \omega \in \mathbb{R}^+ \text{ sind gegeben,}$$

$$y'' + \omega^2 y = e^{-x}, \quad \omega \in \mathbb{R}^+ \text{ ist gegeben.}$$

Alle betrachteten ODEs haben konstante Koeffizienten.

Die ODEs sind entweder homogen oder die Inhomogenität hat eine sehr spezielle Gestalt.

### 4.6.1 Eigenwertmethode im homogenen Fall

Wir betrachten homogene, lineare, skalare ODEs der Ordnung  $k$ ,  $k \geq 1$ , mit konstanten Koeffizienten.

Diese ODEs haben die Gestalt

$$z^{(k)} + a_{k-1} z^{(k-1)} + \dots + a_1 z' + a_0 z = 0, \quad (70)$$

wobei

$$a_0, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{R}.$$

Wir finden alle Lösungen dieser homogenen ODE in 2 Schritten. Falls wir ein AWP der Gestalt

$$\begin{aligned} z^{(k)} + a_{k-1} z^{(k-1)} + \dots + a_1 z' + a_0 z &= 0, \\ z(x_0) = y_0, \quad z'(x_0) = y_1, \quad \dots, z^{(k-1)}(x_0) &= y_{k-1} \end{aligned} \quad (71)$$

lösen wollen, so ist ein weiterer Schritt notwendig.

**1.Schritt: Ermittlung eines Fundamentalsystems.** Dazu erstellen wir das **charakteristische Polynom** von (70):

$$P(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0.$$

Von  $P$  ermitteln wir alle Nullstellen samt deren Vielfachheiten, indem wir zB  $P$  faktorisieren:

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (\lambda - \lambda_1)^{K_1} \dots (\lambda - \lambda_r)^{K_r} \\ &\quad (\lambda - (\kappa_1 + i\omega_1))^{K_{r+1}} (\lambda - (\kappa_1 - i\omega_1))^{K_{r+1}} \\ &\quad \dots (\lambda - (\kappa_s + i\omega_s))^{K_{r+s}} (\lambda - (\kappa_s - i\omega_s))^{K_{r+s}}, \end{aligned}$$

wobei

- $r, s \in \mathbb{N}$ ,  $r + 2s \leq k$ ,  $r$  oder  $s$  kann=0 sein,
- $K_\sigma \in \mathbb{N}$ ,  $K_\sigma \geq 1$ , wobei  $1 \leq \sigma \leq r + s$ ,
- $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ ,
- $\kappa_1, \dots, \kappa_s \in \mathbb{R}$  und  $\omega_1, \dots, \omega_s \in \mathbb{R}$ ,
- $0 < \omega_1, \dots, \omega_s$ .

Wir lesen ab:

- $P$  hat  $r$  reelle Nullstellen

$$\lambda_1, \dots, \lambda_r,$$

mit Vielfachheiten  $K_1, \dots, K_r$ ,

- $P$  hat  $2s$  konjugiert komplexe, nicht reelle Nullstellen

$$\kappa_1 \pm i\omega_1, \dots, \kappa_s \pm i\omega_s,$$

mit Vielfachheiten  $K_{r+1}, \dots, K_{r+s}$ .

**WISSEN:** Aus den Nullstellen erhalten wir ein "Fundamentalsystem von (70)", das aus  $k$  linear unabhängigen Funktionen  $z_1, \dots, z_k$  besteht.

$$\begin{array}{cccc} e^{\lambda_1 x}, & x e^{\lambda_1 x}, & \dots, & x^{K_1-1} e^{\lambda_1 x}, \\ & & & \vdots \\ e^{\lambda_r x}, & x e^{\lambda_r x}, & \dots, & x^{K_r-1} e^{\lambda_r x}, \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} e^{\kappa_1 x} \cos(\omega_1 x), & x e^{\kappa_1 x} \cos(\omega_1 x), & \dots, & x^{K_{r+1}-1} e^{\kappa_1 x} \cos(\omega_1 x), \\ e^{\kappa_1 x} \sin(\omega_1 x), & x e^{\kappa_1 x} \sin(\omega_1 x), & \dots, & x^{K_{r+1}-1} e^{\kappa_1 x} \sin(\omega_1 x), \\ & & & \vdots \\ e^{\kappa_s x} \cos(\omega_s x), & x e^{\kappa_s x} \cos(\omega_s x), & \dots, & x^{K_{r+s}-1} e^{\kappa_s x} \cos(\omega_s x), \\ e^{\kappa_s x} \sin(\omega_s x), & x e^{\kappa_s x} \sin(\omega_s x), & \dots, & x^{K_{r+s}-1} e^{\kappa_s x} \sin(\omega_s x), \end{array}$$

**2.Schritt: Lösungsmenge der ODE bestimmen.** Im ersten Schritt erhielten wir  $k$  Funktionen

$$z_1, \dots, z_k.$$

Lösungsmenge der homogenen ODE (70) =

$$\mathbb{L} = c_1 z_1 + \dots + c_k z_k, \quad c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}.$$

Dies ist ein  $k$ -dimensionaler Vektorraum.

**3.Schritt: Lösen des AWP.** Sind nicht alle Lösungen von (70) gesucht, sondern wollen wir das AWP (71) lösen, so müssen wir ein lineares Gleichungssystem für die Parameter  $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$  vom 2.Schritt lösen. Dieses Gleichungssystem erhalten wir, indem wir von

$$z = c_1 z_1 + \dots + c_k z_k$$

die 1te, 2te,  $\dots$ ,  $(k-1)$ te Ableitung ausrechnen,  $z, z', z'', \dots, z^{(k-1)}$  an der Stelle  $x_0$  auswerten und die Resultate  $= y_0, y_1, y_2, \dots, y_{k-1}$  setzen.

Wir erhalten ein lineares Gleichungssystem in den Unbekannten  $c_1, \dots, c_k$ :

$$c_1 z_1(x_0) + \dots + c_k z_k(x_0) = y_0$$

$$c_1 z_1'(x_0) + \dots + c_k z_k'(x_0) = y_1$$

$$c_1 z_1''(x_0) + \dots + c_k z_k''(x_0) = y_2$$

usw

$$c_1 z_1^{(k-1)}(x_0) + \dots + c_k z_k^{(k-1)}(x_0) = y_{k-1}$$

Dieses Gleichungssystem hat eine eindeutige Lösung

$$c_1^\circ, \dots, c_k^\circ \in \mathbb{R}.$$

Damit ist die eindeutige Lösung von (71) gegeben durch

$$c_1^\circ z_1 + \dots + c_k^\circ z_k.$$

**Beispiel.** Wir wollen das AWP

$$\begin{aligned} z^{(5)} + z^{(4)} + 2z''' + 2z'' + z' + z &= 0, \\ z(0) = 1, \quad z'(0) = -1, \quad z''(0) = 1, \quad z'''(0) = -1, \quad z^{(4)}(0) = 1 \end{aligned} \quad (72)$$

lösen.

**1.Schritt: Fundamentalsystem.** Das charakteristische Polynom ist

$$P(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda + 1.$$

Wir suchen die Nullstellen von  $P$ . Da die Koeffizienten dieses Polynoms ganzzahlig sind und ausserdem der Führungskoeffizient=1 ist, sind - einem allgemeinen Satz folgend - alle rationalen Nullstellen von  $P$  ganzzahlig und Teiler des konstanten Terms.

Konsequenz: Falls  $P$  eine rationale Nullstelle hat, dann ist diese ganzzahlig und ein Teiler von 1. Damit gibt es die Nullstellen-Kandidaten  $\pm 1$ .

Wir verwenden das Horner Schema.

	1	1	2	2	1	1
+	0	1	2	4	6	7
*1	1	2	4	6	7	8

Wir lesen  $P(1) = 8$  ab. Also ist 1 keine Nullstelle von  $P$ .

Nun versuchen es wir mit  $-1$ .

	1	1	2	2	1	1
+	0	-1	0	-2	0	-1
*(-1)	1	0	2	0	1	0

Also gilt  $P(-1) = 0$ , dh  $-1$  ist Nullstelle und wir haben ausserdem

$$P(\lambda) = (\lambda - (-1)) \cdot (1 \cdot \lambda^4 + 0 \cdot \lambda^3 + 2\lambda^2 + 0 \cdot \lambda + 1) = (\lambda - (-1)) \cdot (\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1).$$

Offensichtlich gilt

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2,$$

woraus wegen

$$\lambda^2 + 1 = (\lambda - i) \cdot (\lambda + i)$$

folgt:

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda - i)^2 \cdot (\lambda + i)^2.$$

Wir erhalten die Faktorisierung von  $P$ :

$$P(\lambda) = (\lambda - (-1)) \cdot (\lambda - i)^2 \cdot (\lambda + i)^2.$$

Mit den vorhin eingeführten Bezeichnungen haben wir somit:

- $r = 1$  (da  $P$  genau 1 reelle Nullstelle hat, nämlich  $-1$ ) und  $s = 1$  (da  $P$  genau 1 Paar nicht reeller, konjugiert komplexer Nullstellen hat, nämlich  $\pm i$ ),
- $K_1 = 1$ , da  $-1$  eine 1fache Nullstelle ist,  $K_2 = 2$ , da  $\pm i$  2fache Nullstellen sind,
- $\lambda_1 = -1$ ,
- $\kappa_1 = 0$ ,  $\omega_1 = 1$ , da  $i = 0 + i \cdot 1 = \kappa_1 + i \cdot \omega_1$  und
- $\omega_1 = 1 > 0$ .

Unser Fundamentalsystem hat damit die Gestalt

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\kappa_1 x} \cos(\omega_1 x), x e^{\kappa_1 x} \cos(\omega_1 x), e^{\kappa_1 x} \sin(\omega_1 x), x e^{\kappa_1 x} \sin(\omega_1 x),$$

$$\text{also } e^{(-1) \cdot x}, e^{0 \cdot x} \cos(1 \cdot x), x e^{0 \cdot x} \cos(1 \cdot x), e^{0 \cdot x} \sin(1 \cdot x), x e^{0 \cdot x} \sin(1 \cdot x),$$

$$\text{demnach wegen } e^0 = 1: e^{-x}, \cos x, x \cos x, \sin x, x \sin x.$$

## 2.Schritt: Lösungsmenge der ODE bestimmen.

$$c_1 e^{-x} + c_2 \cos x + c_3 x \cos x + c_4 \sin x + c_5 x \sin x, \quad c_{1,2,3,4,5} \in \mathbb{R}.$$

**3.Schritt: Lösen des AWP.** Dazu müssen wir die 1te, 2te, 3te, 4te Ableitung von

$$z(x) = c_1 e^{-x} + c_2 \cos x + c_3 x \cos x + c_4 \sin x + c_5 x \sin x$$

bestimmen. Wir erhalten inklusive  $z$ ,

$$\begin{aligned} z(x) &= c_1 e^{-x} + c_2 \cos x + c_3 x \cos x + c_4 \sin x + c_5 x \sin x \\ z'(x) &= -c_1 e^{-x} + (c_3 + c_4) \cos x + c_5 x \cos x + (-c_2 + c_5) \sin x - c_3 x \sin x \\ z''(x) &= c_1 e^{-x} + (-c_2 + 2c_5) \cos x - c_3 x \cos x + (-2c_3 - c_4) \sin x - c_5 x \sin x \\ z'''(x) &= -c_1 e^{-x} + (-3c_3 - c_4) \cos x - c_5 x \cos x + (c_2 - 3c_5) \sin x + c_3 x \sin x \\ z^{(4)}(x) &= c_1 e^{-x} + (c_2 - 4c_5) \cos x + c_3 x \cos x + (4c_3 + c_4) \sin x + c_5 x \sin x \end{aligned}$$

Wir werten an der Stelle  $x_0 = 0$  aus und setzen das Resultat den jeweiligen Anfangswerten gleich.

$$\begin{array}{rclclcl} c_1 + c_2 & & & & = & z(0) & = & +1 \\ -c_1 & & +c_3 & +c_4 & & = & z'(0) & = & -1 \\ c_1 - c_2 & & & & +2c_5 & = & z''(0) & = & +1 \\ -c_1 & & -3c_3 & -c_4 & & = & z'''(0) & = & -1 \\ c_1 + c_2 & & & & -4c_5 & = & z^{(4)}(0) & = & +1 \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem schreiben wir in Matrixnotation und wenden den Gauss Algorithmus an

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ & \rightarrow \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Wir lesen die eindeutige Lösung ab:

$$c_1^{\circ} = 1, c_2^{\circ} = 0, c_3^{\circ} = 0, c_4^{\circ} = 0, c_5^{\circ} = 0,$$

und die eindeutige Lösung von (72) ist

$$\begin{aligned} x \mapsto z(x) &= c_1^{\circ} e^{-x} + c_2^{\circ} \cos x + c_3^{\circ} x \cos x + c_4^{\circ} \sin x + c_5^{\circ} x \sin x \\ &= 1 \cdot e^{-x} + 0 \cdot \cos x + 0 \cdot x \cos x + 0 \cdot \sin x + 0 \cdot x \sin x \\ &= e^{-x}. \end{aligned}$$

## 5. Übung “Differentialgleichungen für Ingenieure”

Ausgabe: 13.05.03

Bearbeitung: 19.05.03-23.05.03

Abgabe: 26.05.03-30.05.03

11. **Stabilität.** Falls notwendig, transformieren Sie die gegebene ODE in ein autonomes ODE System erster Ordnung. Bestimmen Sie die stationären Punkte des ODE Systems erster Ordnung. Klassifizieren Sie die stationären Punkte nach folgendem Schema:
- asymptotisch stabil;
  - instabil;
  - keine Aussage nach der Stabilitätsbedingung autonomer System (Satz 8) möglich.

Üa.

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= -\omega^2 \sin(y_1) \end{aligned}$$

Üb.  $\ddot{u} + e^{\dot{u}} + u^3 = 0.$

Ha.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xy - x^2 + 2x \\ \dot{y} &= 3xy + 2y^2 - y \end{aligned}$$

**9 Punkte**

Hb.  $\ddot{u} + k\dot{u}|\dot{u}| + \omega^2 u = 0.$

**4 Punkte**

12. **Skalare, lineare ODEs der Ordnung  $k$  mit konstanten Koeffizienten. Eigenwertmethode im homogenen Fall.** Lösen Sie die folgenden homogenen AWPe.

Üa.  $\ddot{u} - 4u = 0, u(0) = 0, \dot{u}(0) = 1.$

Üb.  $\ddot{u} - 6\dot{u} + 9u = 0, u(0) = 1, \dot{u}(0) = 0.$

Üc.  $\ddot{u} - 6\dot{u} + 25u = 0, u(0) = 3, \dot{u}(0) = 1.$

Üd.  $\ddot{u} - 2\dot{u} + \dot{u} - 2u = 0, u(0) = 0, \dot{u}(0) = \ddot{u}(0) = 1.$

Ha.  $\ddot{u} - 6\dot{u} + 9u = 0, u(0) = 2, \dot{u}(0) = 1.$

**8 Punkte**

Hb.  $\ddot{u} + 9u = 0, u(0) = 0, \dot{u}(0) = 1.$

**8 Punkte**

Hc.  $\ddot{u} + 4\dot{u} + 5u = 0, u(0) = 1, \dot{u}(0) = 0.$

**8 Punkte**

Hd.  $\ddot{u} - \ddot{u} + \dot{u} - u = 0, u(0) = \dot{u}(0) = 0, \ddot{u}(0) = 1.$

**10 Punkte**

### 4.6.2 Ansatzverfahren für spezielle rechte Seiten. Beispiele.

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit **inhomogenen** skalaren, linearen ODEs höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Dies sind beispielsweise ODEs der Form

$$\ddot{u} - 4u = 1, \quad \text{Inhomogenität} = 1,$$

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}, \quad \text{Inhomogenität} = e^{2x},$$

oder

$$\ddot{u} + \dot{u} = \cos t, \quad \text{Inhomogenität} = \cos t.$$

Wir wollen für derartige ODEs - die eventuell als AWP formuliert sind - ein **Lösungsverfahren** kennen lernen, das als

Ansatzverfahren

bekannt ist.

**Achtung.** Das Ansatzverfahren funktioniert nur für spezielle Inhomogenitäten. Ein allgemeineres Verfahren - die "Variation der Konstanten" - werden wir später kennen lernen. In der Praxis erlaubt auch die Variation der Konstanten nur in wenigen Fällen die Ermittlung einer expliziten Lösung.

F: Für welche Inhomogenitäten ist das Ansatzverfahren verwendbar ?

A: Für "ansatzfähige Inhomogenitäten" ...

<p>Eine Funktion <math>f</math> ist eine</p> <div style="text-align: center; border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 10px auto;">ansatzfähige Inhomogenität</div> <p>wenn</p> $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \text{Polynom}(x) \cdot e^{\lambda x} \cdot \cos(\omega x)$ <p>oder</p> $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \text{Polynom}(x) \cdot e^{\lambda x} \cdot \sin(\omega x)$ <p>mit <math>\lambda, \omega \in \mathbb{R}</math> gilt.</p> <p>Ist <math>f</math> eine ansatzfähige Inhomogenität der Gestalt</p> $\text{Polynom}(x) \cdot e^{\lambda x} \cdot \cos(\omega x)$ <p>oder der Gestalt</p> $\text{Polynom}(x) \cdot e^{\lambda x} \cdot \sin(\omega x)$ <p>mit <math>\lambda, \omega \in \mathbb{R}</math>, so heisst die komplexe Zahl <math>\lambda + i\omega</math></p> <p style="text-align: center;">"Prüfwert von <math>f</math>".</p>
--

A: ... und **Summen** von ansatzfähigen Inhomogenitäten.

### Beispiele.

- Die konstante Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1$ , ist eine ansatzfähige Inhomogenität, da jede Konstante ein Polynom (nullten Grades) ist und ausserdem gilt:

$$f(x) = 1 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \cdot e^{0 \cdot x} \cdot \cos 0 \cdot x,$$

also

$$f(x) = \text{Polynom}(x) \cdot e^{\lambda x} \cdot \cos(\omega x),$$

mit  $\lambda = \omega = 0$ .

$$\text{Prüfwert} = \lambda + i\omega = 0 + i \cdot 0 = 0.$$

- Das Polynom  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 + x^4$ , ist eine ansatzfähige Inhomogenität,

$$\begin{aligned} f(x) = 1 + x^4 &= (1 + x^4) \cdot 1 \cdot 1 = (1 + x^4) \cdot e^{0 \cdot x} \cdot \cos(0 \cdot x) \\ &= \text{Polynom}(x) \cdot e^{\lambda x} \cdot \cos(\omega x), \end{aligned}$$

mit  $\lambda = 0$ ,  $\omega = 0$ .

$$\text{Prüfwert} = \lambda + i\omega = 0 + i \cdot 0 = 0.$$

- **Wir sehen leicht ein:**

*Jedes Polynom ist eine ansatzfähige Inhomogenität.  
Der Prüfwert jedes Polynoms ist 0.*

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(t) = (1 - t^2)/(1 + t^2)$  ist keine ansatzfähige Inhomogenität.
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(t) = \cos t$  ist eine ansatzfähige Inhomogenität,

$$f(t) = \cos t = 1 \cdot 1 \cdot \cos t = 1 \cdot e^{0 \cdot t} \cdot \cos(1 \cdot t) = \text{Polynom}(t) \cdot e^{\lambda t} \cdot \cos(\omega t),$$

mit  $\text{Polynom}(t)=1$  (also Polynom nullten Grades),  $\lambda = 0$ ,  $\omega = 1$ .

$$\text{Prüfwert von } f = \lambda + i\omega = 0 + i \cdot 1 = i.$$

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(t) = 42 \sin(4t)$  ist eine ansatzfähige Inhomogenität,

$$\begin{aligned} f(t) = 42 \sin(4t) &= 42 \cdot 1 \cdot \sin(4t) = 42 \cdot e^{0 \cdot t} \cdot \sin(4t) \\ &= \text{Polynom}(t) \cdot e^{\lambda t} \cdot \sin(\omega t), \end{aligned}$$

mit  $\text{Polynom}(t)=42$  (also ein Polynom nullten Grades),  $\lambda = 0$ ,  $\omega = 4$ .

$$\text{Prüfwert von } f = \lambda + i\omega = 0 + i \cdot 4 = 4i.$$

- **Wir sehen leicht ein:**

*Jede Winkelfunktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  der Gestalt  $f(t) = A \sin(\omega t)$  oder  $f(t) = B \cos(\omega t)$  ist eine ansatzfähige Inhomogenität.  
Prüfwert =  $i\omega$ .*

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(t) = \sin(\sqrt{|t|})$  ist keine ansatzfähige Inhomogenität.
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(t) = (1 + t + t^2 - 3t^3) \cdot \cos(3t)$  ist eine ansatzfähige Inhomogenität,

$$\begin{aligned} f(t) &= (1 + t + t^2 - 3t^3) \cdot \cos(3t) \\ &= (1 + t + t^2 - 3t^3) \cdot 1 \cdot \cos(3t) = (1 + t + t^2 - 3t^3) \cdot e^{0 \cdot t} \cdot \cos(3t) \\ &= \text{Polynom}(t) \cdot e^{\lambda t} \cdot \cos(\omega t), \end{aligned}$$

mit  $\text{Polynom}(t) = 1 + t + t^2 - 3t^3$  (also ein Polynom dritten Grades),  $\lambda = 0$ ,  $\omega = 3$ .

Prüfwert von  $f = \lambda + i\omega = 0 + i \cdot 3 = 3i$ .

- Wir sehen leicht ein:

*Jede Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die das Produkt eines Polynoms und einer Winkelfunktion in der Gestalt  $f(t) = \text{Polynom}(t) \cdot \sin(\omega t)$  oder  $f(t) = \text{Polynom}(t) \cdot \cos(\omega t)$  ist, ist eine ansatzfähige Inhomogenität.  
Prüfwert =  $i\omega$ .*

- $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(t) = (\sin(t))/(1 + t)$  ist keine ansatzfähige Inhomogenität.
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 4e^x$  ist eine ansatzfähige Inhomogenität,

$$f(x) = 4e^x = 4 \cdot e^x \cdot 1 = 4 \cdot e^x \cdot \cos(0 \cdot x) = \text{Polynom}(x) \cdot e^{\lambda x} \cdot \cos(\omega x),$$

mit  $\text{Polynom}(x) = 4$  (also ein Polynom nullten Grades),  $\lambda = 1$ ,  $\omega = 0$ .

Prüfwert von  $f = \lambda + i\omega = 1 + i \cdot 0 = 1$ .

- Wir sehen leicht ein:

*Jede Exponentialfunktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  der Gestalt  $f(x) = Ae^{\lambda x}$  ist eine ansatzfähige Inhomogenität.  
Prüfwert =  $\lambda$ .*

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{x^2}$  ist keine ansatzfähige Inhomogenität.
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x^2 - x^3) \cdot e^{-x}$  ist eine ansatzfähige Inhomogenität,

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - x^3) \cdot e^{-x} = (x^2 - x^3) \cdot e^{-x} \cdot 1 \\ &= (x^2 - x^3) \cdot e^{-x} \cdot \cos(0 \cdot x) = \text{Polynom}(x) \cdot e^{\lambda x} \cdot \cos(\omega x), \end{aligned}$$

mit  $\text{Polynom}(x) = x^2 - x^3$  (also ein Polynom dritten Grades),  $\lambda = -1$ ,  $\omega = 0$ .

Prüfwert =  $\lambda + i\omega = -1 + i \cdot 0 = -1$ .

- Wir sehen leicht ein:

*Jede Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die das Produkt eines Polynoms und einer Exponentialfunktion der Gestalt  $f(x) = \text{Polynom}(x) \cdot e^{\lambda x}$  ist, ist eine ansatzfähige Inhomogenität.  
Prüfwert =  $\lambda$ .*

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = xe^{-x+x^2}$  ist keine ansatzfähige Inhomogenität.
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 7e^{4x} \sin(2x)$  ist eine ansatzfähige Inhomogenität,

$$f(x) = 7e^{4x} \sin(2x) = \text{Polynom}(x) \cdot e^{\lambda x} \cdot \sin(\omega x),$$

mit  $\text{Polynom}(x)=7$  (also ein Polynom nullten Grades),  $\lambda = 4$ ,  $\omega = 2$ .  
 Prüfwert= $\lambda + i\omega = 4 + i \cdot 2 = 4 + 2i$ .

- Wir sehen leicht ein:

Jede Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die das Produkt einer Exponentialfunktion und einer Winkelfunktion der Gestalt  $f(x) = Ae^{\lambda x} \cos(\omega x)$  oder  $f(x) = Be^{\lambda x} \sin(\omega x)$  ist, ist eine ansatzfähige Inhomogenität.  
 Prüfwert= $\lambda + i\omega$ .

- $f : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 4e^{\sqrt{x}} \cos(x^2)$  ist keine ansatzfähige Inhomogenität.
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (1 - x + x^4)e^{-x} \sin x$  ist eine ansatzfähige Inhomogenität,

$$f(x) = (1 - x + x^4)e^{-x} \sin x = \text{Polynom}(x) \cdot e^{\lambda x} \cdot \sin(\omega x),$$

mit  $\text{Polynom}(x) = 1 - x + x^4$ ,  $\lambda = -1$ ,  $\omega = 1$ .  
 Prüfwert= $\lambda + i\omega = -1 + i \cdot 1 = -1 + i$ .

- $f : \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (e^x \sin(2x))/(1 - x^2)$  ist keine ansatzfähige Inhomogenität.
- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln(1 + x^2)$  ist keine ansatzfähige Inhomogenität.
- $f : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \tan(x)$  ist keine ansatzfähige Inhomogenität.

Aus didaktischen Gründen stellen wir das Ansatzverfahren zunächst an Hand von Beispielen vor. Die abstrakte Formulierung des Ansatzverfahrens erfolgt im nächsten Abschnitt.

Die Vorgangsweise gliedert sich in drei Schritte (bei AWPen sind es vier Schritte).

1. Bestimmung der allgemeinen Lösung der homogenen ODE.
2. Ansatz für eine partikuläre Lösung der ODE.
3. Berechnung der freien Parameter der partikulären Lösung und Ermittlung der allgemeinen Lösung der ODE.
4. Bei AWPen: Anpassung der freien Parameter der allgemeinen Lösung an die gegebenen Anfangswerte.

**1.Beispiel.**  $\ddot{u} - 4u = 1$ .

1. Die homogene ODE hat die Form  $\ddot{u} - 4u = 0$ . Von dieser ODE bestimmen wir die allgemeine Lösung mit Hilfe des wohlbekannten Verfahrens.

Charakteristisches Polynom

$$= p(\lambda) = \lambda^2 - 4 = 0,$$

ergibt  $\lambda_{1,2} = \pm 2$ . Beide Nullstellen sind einfach. Die allgemeine Lösung der homogenen ODE hat also die Gestalt

$$t \mapsto u_h(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Die Lösung der ODE hat die Form

$$u_p + u_h,$$

wobei  $u_h$  bereits im 1. Schritt ermittelt wurde.

$u_h$  beinhaltet zwei freie Parameter  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Die Funktion  $u_p$  ist eine partikuläre Lösung der ODE. In Deutsch:  $u_p$  ist **irgend eine** Lösung der ODE.

Wir können  $u_p$  nicht sofort hinschreiben (das würde ja heissen, wir könnten die ODE auf einen Schlag lösen).

Beruhigender Weise stellen wir fest:

Es liegt eine ansatzfähige Inhomogenität vor.

Nun müssen wir einen geeigneten

Ansatz für  $u_p$

finden.

Für den Ansatz gilt die Faustregel: " $u_p$  sieht genau so aus wie die Inhomogenität".

**Achtung.** Diese Faustregel gilt nur für **ansatzfähige Inhomogenitäten** und muss selbst bei diesen mit Bedacht eingesetzt werden.

Wir stellen fest: Die Inhomogenität ist eine Konstante - nämlich 1 - also ein Polynom vom Grad Null. Entsprechend wählen wir für den Erstantatz ebenfalls ein Polynom vom Grad Null.

$$\text{Erstantatz: } u_p = A, \quad A \in \mathbb{R}.$$

Nun kommt der Prüfwert ins Spiel. Da es sich um ein Polynom (vom nullten Grad) handelt, gilt

$$\text{Prüfwert} = 0.$$

Es gilt:

Ist der Prüfwert  $\lambda + i\omega$  **keine** Nullstelle des charakteristischen Polynoms  $p$ , dh gilt

$$p(\lambda + i\omega) \neq 0,$$

so ist je nach Bezeichnung der Variablen

$$\text{Ansatz: } y_p(x) = \text{Erstansatz},$$

bzw

$$\text{Ansatz: } u_p(t) = \text{Erstansatz},$$

etc.

Ist der Prüfwert  $\lambda + i\omega$  eine  **$r$ -fache Nullstelle** ( $r \geq 1$ ) des charakteristischen Polynoms, dh gilt

$$p(\lambda + i\omega) = p'(\lambda + i\omega) = \dots = p^{(r-1)}(\lambda + i\omega) = 0, \quad p^{(r)}(\lambda + i\omega) \neq 0,$$

so liegt ein **Resonanzfall** vor, dh die Inhomogenität bewirkt ein vergleichsweise starkes Anwachsen der Lösung. Je nach Bezeichnung der Variablen ergibt sich

$$\text{Ansatz: } y_p(x) = x^r \cdot \text{Erstansatz}(x),$$

bzw.

$$\text{Ansatz: } u_p(t) = t^r \cdot \text{Erstansatz}(t),$$

etc

Im vorliegenden Fall gilt

$$p(\text{Prüfwert}) = p(0) = -4 \neq 0,$$

also liegt **kein Resonanzfall** vor, so dass

$$\text{Ansatz} = \text{Erstansatz},$$

demnach

$$\text{Ansatz: } u_p = A, \quad A \in \mathbb{R}.$$

**3.** Wir setzen den Ansatz in die ODE ein, damit wir den noch freien Parameter  $A$  identifizieren können:

$$\ddot{u}_p - 4u_p = 1$$

$$\ddot{A} - 4A = 1$$

$$-4A = 1$$

$$A = -\frac{1}{4}$$

Wir erhalten

$$u_p = A = -\frac{1}{4},$$

und damit die allgemeine Lösung der ODE

$$t \mapsto u(t) = u_p(t) + u_h(t) = -\frac{1}{4} + c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Ende **1.Beispiel**

**2.Beispiel.**  $y'' - 4y' + y = e^{2x}$ .

**1.** Homogene ODE:  $y'' - 4y' + 4y = 0$ .

Charakteristisches Polynom =  $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$ , also  $\lambda_1 = 2$  und 2 ist eine doppelte Nullstelle. Damit ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung gegeben durch

$$x \mapsto y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

**2.** Die Inhomogenität der ODE ist eine Exponentialfunktion der Form  $e^{\lambda x}$ . Damit handelt es sich um eine ansatzfähige Inhomogenität.

$$\text{Erstansatz: } y_p(x) = A e^{2x}, \quad A \in \mathbb{R}.$$

Wir stellen fest:

$$\text{Prüfwert}=2.$$

Es gilt:

$$p(\text{Prüfwert}) = p(2) = 0.$$

Damit ist der Prüfwert eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms, es liegt somit ein **Resonanzfall** vor, dh der Erstansatz muss modifiziert werden.

Dazu müssen wir die Vielfachheit der Nullstelle 2 ermitteln. Diese Vielfachheit ist uns vom **1.Schritt** her bekannt: 2 ist eine doppelte Nullstelle, dh  $r = 2$ .

Wir erhalten

$$\text{Ansatz: } y_p(x) = x^r \cdot \text{Erstansatz}(x) = x^2 \cdot A e^{2x} = A x^2 e^{2x}.$$

**3.** Wir setzen den Ansatz in die ODE ein, damit wir den noch freien Parameter  $A$  identifizieren können. Dazu benötigen wir die ersten zwei Ableitungen von  $y_p$ .

$$y_p(x) = A x^2 e^{2x}$$

$$y_p'(x) = A \cdot (2x + 2x^2) e^{2x} = 2A \cdot (x + x^2) e^{2x}$$

$$y_p''(x) = 2A \cdot (1 + 2x + 2x + 2x^2) e^{2x} = 2A \cdot (1 + 4x + 2x^2) e^{2x}$$

und damit

$$\begin{aligned}
 y_p'' - 4y_p' + 4y_p &= e^{2x} \\
 2A \cdot (1 + 4x + 2x^2)e^{2x} - 4 \cdot (2A \cdot (x + x^2)e^{2x}) + 4 \cdot Ax^2e^{2x} &= e^{2x} \\
 2A \cdot (1 + 4x + 2x^2) - 4 \cdot (2A \cdot (x + x^2)) + 4 \cdot Ax^2 &= 1 \\
 2A + 8Ax + 4Ax^2 - 8Ax - 8Ax^2 + 4Ax^2 &= 1 \\
 2A &= 1 \\
 A &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$y_p(x) = \frac{1}{2}x^2e^{2x},$$

und damit die allgemeine Lösung

$$x \mapsto y(x) = y_p(x) + y_h(x) = \frac{1}{2}x^2e^{2x} + c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

**3.Beispiel. AWP.**  $\ddot{u} + 2\dot{u} + 2u = t^2$ ,  $u(1) = 0$ ,  $\dot{u}(1) = 1$ .

1. Homogene ODE:  $\ddot{u} + 2\dot{u} + 2u = 0$ .

Charakteristisches Polynom =  $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$  ergibt

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm i,$$

also die zwei einfachen Nullstellen  $-1 \pm i$ . Die allgemeine Lösung dieser homogenen ODE ist somit

$$t \mapsto u_h(t) = c_1e^{-t} \cos t + c_2e^{-t} \sin t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Die Inhomogenität der ODE ist ein Polynom vom Grad 2, also eine ansatzfähige Inhomogenität.

$$\text{Erstansatz: } u_p(t) = A + Bt + Dt^2, \quad A, B, D \in \mathbb{R}.$$

Der Prüfwert jedes Polynoms ist Null. Also

$$p(\text{Prüfwert}) = p(0) = 2 \neq 0,$$

demnach liegt **kein Resonanzfall** vor, also

$$\text{Ansatz} = \text{Erstansatz},$$

dh

$$u_p(t) = A + Bt + Dt^2.$$

**3.** Wir setzen den Ansatz in die ODE ein. Dazu benötigen wir die ersten beiden Ableitungen von  $u_p$ .

$$\begin{aligned}u_p(t) &= A + Bt + Dt^2 \\ \dot{u}_p(t) &= B + 2Dt \\ \ddot{u}_p(t) &= 2D,\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}\ddot{u}_p + 2\dot{u}_p + 2u_p &= t^2 \\ 2D + 2 \cdot (B + 2Dt) + 2 \cdot (A + Bt + Dt^2) &= t^2 \\ 2Dt^2 + (2B + 4D)t + (2A + 2B + 2D) &= t^2 = 1 \cdot t^2 + 0 \cdot t + 0,\end{aligned}$$

woraus wir durch Koeffizientenvergleich ein lineares Gleichungssystem erhalten

$$\begin{aligned}2D &= 1 \\ 2B + 4D &= 0 \\ 2A + 2B + 2D &= 0,\end{aligned}$$

das wir sukzessive Auflösen können:

$$D = \frac{1}{2}, \quad B = -2D = -1, \quad A = -B - D = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Damit ist

$$u_p(t) = \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2},$$

und wir erhalten die allgemeine Lösung der ODE

$$t \mapsto u(t) = u_p(t) + u_h(t) = \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2} + c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \sin t, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

**4.** Nun passen wir die freien Parameter der allgemeinen Lösung den Anfangswerten an. Dazu berechnen wir die erste Ableitung von  $u$ .

$$\begin{aligned}u(t) &= \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2} + c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \sin t, \\ \dot{u}(t) &= t - 1 + (c_2 - c_1)e^{-t} \cos t + (-c_1 - c_2)e^{-t} \sin t\end{aligned}$$

Wir werten  $u$  und  $\dot{u}$  an der Stelle  $t = 1$  aus und setzen die resultierenden Terme den entsprechenden Anfangswerten gleich.

$$\begin{aligned}c_1 e^{-1} \cos 1 + c_2 e^{-1} \sin 1 &= 1 \\ c_1 \cdot (-e^{-1} \cos 1 - e^{-1} \sin 1) + c_2 \cdot (e^{-1} \cos 1 - e^{-1} \sin 1) &= 1\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}c_1 \cos 1 + c_2 \sin 1 &= e \\c_1 \cdot (-\cos 1 - \sin 1) + c_2 \cdot (\cos 1 - \sin 1) &= e\end{aligned}$$

Addieren wir die erste Gleichung zur zweiten so ergibt sich

$$\begin{aligned}c_1 \cos 1 + c_2 \sin 1 &= e \\-c_1 \sin 1 + c_2 \cos 1 &= 2e\end{aligned}$$

Multiplikation der ersten Gleichung mit  $\sin 1$ , Multiplikation der zweiten Gleichung mit  $\cos 1$  und Addition der resultierenden Gleichungen unter Ausnützung der Beziehung  $\cos^2 1 + \sin^2 1 = 1$  ergibt

$$c_2 = e \cdot (\sin 1 + 2 \cos 1) = 5,2247\dots,$$

und in ähnlicher Weise erhalten wir

$$c_1 = e \cdot (\cos 1 - 2 \sin 1) = -3,1060\dots$$

Damit ist die eindeutige Lösung unseres AWP's gegeben durch

$$t \mapsto u(t) = \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2} + (\cos 1 - 2 \sin 1)e^{1-t} \cos t + (\sin 1 + 2 \cos 1)e^{1-t} \sin t.$$

**4.Beispiel.**  $\ddot{u} + \dot{u} = 1 + \cos t$ .

**1.** Homogene Gleichung:  $\ddot{u} + \dot{u} = 0$ .

Charakteristisches Polynom  $= p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda = \lambda \cdot (\lambda + 1) = 0$ , also hat  $p$  die einfachen Nullstellen  $\lambda_1 = 0$  und  $\lambda_2 = -1$ . Die allgemeine Lösung der homogenen ODE ist somit

$$t \mapsto u_h(t) = c_1 + c_2 e^{-t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

**2.** Die Inhomogenität ist die Funktion  $t \mapsto 1 + \cos t$ . Damit ist die Inhomogenität nicht ansatzfähig. Andererseits ist sowohl die konstante Funktion  $t \mapsto 1$  als auch die Funktion  $t \mapsto \cos t$  eine ansatzfähige Inhomogenität, dh unsere ODE hat die Gestalt

$$\ddot{u} + \dot{u} = f_1(t) + f_2(t),$$

wobei  $f_1, f_2$  ansatzfähige Inhomogenitäten sind.

In dieser Situation hilft das

**Superpositionsprinzip.** Ist  $I$  ein Intervall, ist  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 1$ , sind  $a_0, \dots, a_{k-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und sind  $f_1, f_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und gilt ausserdem:

Die differenzierbare Funktion  $y_1 : I \rightarrow \mathbb{R}$  ist Lösung der **linearen ODE**

$$y^{(k)} + a_{k-1}(x)y^{(k-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f_1(x),$$

und die differenzierbare Funktion  $y_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  ist Lösung der **linearen ODE**

$$y^{(k)} + a_{k-1}(x)y^{(k-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f_2(x).$$

Dann ist  $y_1 + y_2$  Lösung der **linearen ODE**

$$y^{(k)} + a_{k-1}(x)y^{(k-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f_1(x) + f_2(x).$$

**Bemerkung.** a) Ein entsprechendes Superpositionsprinzip gilt auch für **lineare ODE Systeme**.

b) Das Superpositionsprinzip gilt auch für mehr als zwei Summanden, dh sind mit den obigen Bezeichnungen  $y_1, \dots, y_l$  Lösungen der **linearen ODEs**  $y^{(k)} + \dots + a_0(x)y = f_1(x), \dots, y^{(k)} + \dots + a_0(x)y = f_l(x)$ , so ist  $y_1 + \dots + y_l$  Lösung der ODE  $y^{(k)} + \dots + a_0(x)y = f_1(x) + \dots + f_l(x)$ . Ein entsprechendes Resultat gilt auch für lineare ODE Systeme.

Mit Hilfe des Superpositionsprinzips erkennen wir: Ist  $u_{p1}$  eine partikuläre Lösung von  $\ddot{u} + \dot{u} = 1$  und ist  $u_{p2}$  eine partikuläre Lösung von  $\ddot{u} + \dot{u} = \cos t$ , so ist  $u_p = u_{p1} + u_{p2}$  eine partikuläre Lösung von  $\ddot{u} + \dot{u} = 1 + \cos t$ .

**3a.**  $\ddot{u} + \dot{u} = 1$ . Die Inhomogenität ist als Polynom nullten Grades ansatzfähig.

$$\text{Erstansatz: } u_{p1}(t) = A, A \in \mathbb{R}.$$

Der Prüfwert jedes Polynoms ist 0. Wir berechnen

$$p(\text{Prüfwert}) = p(0) = 0,$$

also liegt ein **Resonanzfall** vor. Von **1.** wissen wir, dass 0 eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, dh  $r = 1$ .

$$\text{Ansatz: } u_{p1}(t) = t^r \cdot \text{Erstansatz}(t) = t^1 \cdot A = At.$$

Um  $u_{p1}$  in die ODE  $\ddot{u} + \dot{u} = 1$  einsetzen zu können, benötigen wir die ersten beiden Ableitungen von  $u_{p1}$ .

$$\begin{aligned} u_{p1}(t) &= At \\ \dot{u}_{p1}(t) &= A \\ \ddot{u}_{p1}(t) &= 0. \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \ddot{u}_{p1} + \dot{u}_{p1} &= 1 \\ 0 + A &= 1 \\ A &= 1, \end{aligned}$$

und damit

$$u_{p1}(t) = t.$$

**3b.**  $\ddot{u} + \dot{u} = \cos t$ . Die Inhomogenität ist als Winkelfunktion der Gestalt  $\cos(\omega t)$  mit  $\omega = 1$  ansatzfähig.

$$\text{Erstansatz: } u_{p2}(t) = B \cos t + D \sin t.$$

Der Prüfwert ist  $i\omega = i \cdot 1 = i$ . Wir berechnen

$$p(\text{Prüfwert}) = p(i) \neq 0,$$

da nach **1.** die einzigen Nullstellen des charakteristischen Polynoms durch 0 und 1 gegeben sind. Somit liegt **kein Resonanzfall** vor und damit gilt

$$\text{Ansatz} = \text{Erstansatz: } u_{p2}(t) = B \cos t + D \sin t.$$

Um  $u_{p2}$  in die ODE  $\ddot{u} + \dot{u} = \cos t$  einsetzen zu können, benötigen wir die ersten beiden Ableitungen von  $u_{p2}$ . Wir erhalten

$$\begin{aligned} u_{p2} &= B \cos t + D \sin t \\ \dot{u}_{p2} &= -B \sin t + D \cos t \\ \ddot{u}_{p2} &= -B \cos t - D \sin t, \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \ddot{u}_{p2} + \dot{u}_{p2} &= \cos t \\ (-B \cos t - D \sin t) + (-B \sin t + D \cos t) &= \cos t \\ (D - B) \cos t - (B + D) \sin t &= \cos t = 1 \cdot \cos t + 0 \cdot \sin t, \end{aligned}$$

woraus wir durch Koeffizientenvergleich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -B + D &= 1 \\ -B - D &= 0 \end{aligned}$$

erhalten, dessen eindeutige Lösung offensichtlich gegeben ist durch

$$B = -\frac{1}{2}, \quad D = \frac{1}{2}.$$

Damit erhalten wir

$$u_{p2}(t) = -\frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t.$$

**4.Ende** Die allgemeine Lösung der ODE ist

$$\begin{aligned} t \mapsto u(t) &= u_p(t) + u_h(t) = (u_{p1}(t) + u_{p2}(t)) + u_h(t) \\ &= t - \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t + c_1 + c_2 e^{-t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

### 4.6.3 Ansatzverfahren für spezielle rechte Seiten. Allgemein.

Wir betrachten die skalare, lineare, inhomogene ODE mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(k)} + a_{k-1}y^{(k-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x),$$

wobei  $k \in \mathbb{N}$ ,  $k \geq 1$ ,  $a_0, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{R}$ , und

$f$  eine ansatzfähige Inhomogenität oder die Summe ansatzfähiger Inhomogenitäten

ist.

1. Wir betrachten die **homogene ODE**

$$z^{(k)} + a_{k-1}z^{(k-1)} + \dots + a_1z' + a_0z = 0,$$

bestimmen die Nullstellen samt Vielfachheiten des charakteristischen Polynoms

$$p(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + a_1\lambda + a_0,$$

und ermitteln daraus die allgemeine Lösung der homogenen ODE

$$y_h = c_1z_1 + \dots + c_kz_k, \quad c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}.$$

2. Wir bestimmen für die ansatzfähige Inhomogenität  $f$  (oder, wenn  $f$  die Summe mehrere ansatzfähiger Inhomogenitäten ist: für jeden einzelnen Summanden von  $f$ ) den

Erstansatz

entsprechend der folgenden Tabelle

Inhomogenität	Erstansatz
$a$	$A$
$a + a_1x + \dots + a_sx^s$	$A + A_1x + \dots + A_sx^s$
$ae^{\lambda x}$	$Ae^{\lambda x}$
$(a + a_1x + \dots + a_sx^s)e^{\lambda x}$	$(A + A_1x + \dots + A_sx^s)e^{\lambda x}$
$a \cos(\omega x)$	$B \cos(\omega x) + D \sin(\omega x)$
$b \sin(\omega x)$	$B \cos(\omega x) + D \sin(\omega x)$
$(a + a_1x + \dots + a_sx^s) \cos(\omega x)$	$(B + B_1x + \dots + B_sx^s) \cos(\omega x) + \dots$ $\dots + (D + D_1x + \dots + D_sx^s) \sin(\omega x)$
$(b + b_1x + \dots + b_sx^s) \sin(\omega x)$	$(B + B_1x + \dots + B_sx^s) \cos(\omega x) + \dots$ $\dots + (D + D_1x + \dots + D_sx^s) \sin(\omega x)$
$a \cos(\omega x)e^{\lambda x}$	$(B \cos(\omega x) + D \sin(\omega x))e^{\lambda x}$
$b \sin(\omega x)e^{\lambda x}$	$(B \cos(\omega x) + D \sin(\omega x))e^{\lambda x}$
$(a + a_1x + \dots + a_sx^s) \cos(\omega x)e^{\lambda x}$	$e^{\lambda x} [(B + B_1x + \dots + B_sx^s) \cos(\omega x) + \dots$ $\dots + (D + D_1x + \dots + D_sx^s) \sin(\omega x)]$
$(a + a_1x + \dots + a_sx^s) \sin(\omega x)e^{\lambda x}$	$e^{\lambda x} [(B + B_1x + \dots + B_sx^s) \cos(\omega x) + \dots$ $\dots + (D + D_1x + \dots + D_sx^s) \sin(\omega x)]$

**Bemerkung.** In dieser Tabelle sind die mit  $A, B, D, A_1, \dots, A_s, B_1, \dots, B_s, D_1, \dots, D_s$  bezeichneten Zahlen **noch freie Parameter**, die in einem weiteren Schritt - nämlich im **3.** - bestimmt werden.

Danach bestimmen wir, ob  $P(\text{Prüfwert}) \neq 0$  oder  $P(\text{Prüfwert}) = 0$ .

- Falls  $P(\text{Prüfwert}) \neq 0$ , dann gilt

$$\text{Ansatz} = \text{Erstansatz}.$$

- Falls  $P(\text{Prüfwert}) = 0$ , so liegt ein

### Resonanzfall

vor. Wir ermitteln an Hand der Erkenntnisse von **1.** die

Vielfachheit der Nullstelle Prüfwert.



## 6. Übung “Differentialgleichungen für Ingenieure”

Ausgabe: 20.05.03

Bearbeitung: 26.05.03-30.05.03

Abgabe: 02.06.03-06.06.03

13. **Ansatzverfahren skalare, lineare ODEs höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten.** Bestimmen Sie mit dem Ansatzverfahren die allgemeine Lösung folgender ODEs.

Üa.  $\ddot{u} + u = 1.$

Üb.  $\ddot{u} + 4u = \cos(2t) - \sin(2t).$

Üc.  $\ddot{u} + \dot{u} = 1.$

Üd.  $\ddot{u} + \dot{u} = \cos t.$

Ha.  $y'' - 4y' + 3y = x \cos x + 2 \sin x.$

**10 Punkte**

Hb.  $y'' + y = 3 \cos x.$

**10 Punkte**

14. **Ansatzverfahren skalare, lineare ODEs höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten. AWP.** Lösen Sie mit dem Ansatzverfahren folgenden AWP.

Üa.  $\ddot{u} + \dot{u} + u = 1 + e^t. u(0) = 1, \dot{u}(0) = 0.$

Üb.  $\ddot{u} + \dot{u} + 4u = \cos(2t) - \sin(2t). u(0) = 0, \dot{u}(0) = 1.$

Ha.  $y'' + 2y' + y = e^x + x e^x. y(0) = 1, y'(0) = -7/4.$

**12 Punkte**

Hb.  $y''' - 3y'' + 3y' - y = 15x^3 + 5.$

$y(0) = -905, y'(0) = -540, y''(0) = -270.$

**12 Punkte**

## 5 Numerische Verfahren für ODE Systeme der Ordnung 1

Die meisten ODEs sind nicht explizit lösbar, dh es gibt für die meisten ODEs keine “Lösungsformel” in die nur ein Wert  $x$  eingesetzt werden muss und sich der Funktionswert  $y(x)$  der Lösung ergibt.

Aber auch wenn eine Lösungsformel verfügbar ist - etwa bei linearen Systemen mit konstanten Koeffizienten und speziellen Inhomogenitäten - ist die Anwendung der Lösungsformel (genauer: des Lösungsalgorithmus) in den meisten Fällen problematisch, da zB Eigenwerte von Matrizen ermittelt werden müssen, was exakt nur in den seltensten Fällen möglich ist.

Andrerseits ist es in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle gar nicht notwendig, die Lösung an einer Stelle exakt zu kennen. Bei den allermeisten Anwendungen interessiert ein hinreichend genauer Näherungswert.

**Beispiel.** Das AWP  $y' = y$ ,  $y(0) = 1$  können wir sofort “explizit” lösen:  $y(x) = e^x$ . Wenn uns  $y(0.234)$  interessiert, so können wir sofort hinschreiben

$$y(0.234) = e^{0.234},$$

doch eigentlich interessiert uns viel mehr die Frage, “wie gross”  $y(0.234)$  “ungefähr” ist.

Wir greifen zum Taschenrechner und erhalten

$$y(0.234) = e^{0.234} = 1.2636449 \dots,$$

wobei uns “...” eher kalt lässt, weil wir den Funktionswert mit hinreichender Genauigkeit ermittelt haben.

Was uns interessiert ist

- eine Methode, mit der wir die Lösungsfunktion eines AWP für ein ODE System erster Ordnung an einer gegebenen Stelle  $x$  zumindest näherungsweise berechnen können,
- verfeinerte Methoden, mit denen wir die Genauigkeit der Funktionsberechnung beliebig erhöhen können.

Die hier angesprochenen Methoden sind “numerische Verfahren”, weil sie es erlauben, einen “numerischen Wert” (und nicht etwa einen abstrakten Wert) in Form einer Dezimaldarstellung auszurechnen.

Da wir nur Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division exakt ausführen können (zumindest in beschränktem Rahmen - versuchen Sie einmal  $e + \pi$  auszurechnen), bestehen die hier interessierenden numerischen Verfahren darin, aus den gegebenen Daten eines AWP einer ODE mittels der Grundrechnungsarten Näherungswerte für die Lösung eines an einer Stelle  $x$  zu ermitteln.

**Bemerkung.** Diese Vorgehensweise ist nichts Neues. Wenn zB mit dem Taschenrechner “sin(1)” ausgerechnet wird, läuft ein Programm ab, das aus dem Input “1” mit den Grundrechnungsarten eine Zahl ermittelt, die im Rahmen einer gewissen Genauigkeit sin(1) entspricht. Also verwenden wir immer numerische Verfahren, wenn es um die Auswertung elementarer Funktionen (ausser rationaler Funktionen) geht.

Wir wollen in diesem Kapitel drei numerische Verfahren vorstellen. Die Darstellung ist sehr kurz gehalten. Weiterführende Diskussionen erfolgen in entsprechenden LVen, zB in “Numerik für Ingenieure”.

Bei den Verfahren handelt es sich um

- das explizite Eulerverfahren, das sehr leicht verständlich ist,
- das implizite Eulerverfahren, das in den vielen Fällen zuverlässiger als das explizite Eulerverfahren ist,
- das klassische Runge-Kutta Verfahren, das in Standardsituationen zuverlässige und genaue Resultate liefert und zur Standardausstattung von ODE-Solvern gehört.

Bei allen Verfahren sollen die grundlegenden Ideen vermittelt werden.

Wir betrachten in allen Fällen ein AWP der Gestalt

$$\vec{y}' = F(x, \vec{y}), \quad \vec{y}(0) = \vec{y}_0, \quad x \in [0, X], \quad (79)$$

wobei  $X \in \mathbb{R}^+$ ,  $\vec{y}: [0, X] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$  und - der Einfachheit halber - angenommen wird, dass  $F: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig partiell differenzierbar ist. Der “Startvektor”  $\vec{y}_0$  ist aus  $\mathbb{R}^n$ .

**Ziel der numerischen Verfahren:** Für spezielle, endlich viele Argumente

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < x_{N+1} = X$$

“approximative” Werte

$$\vec{y}_0 = \vec{y}^0, \vec{y}^1, \vec{y}^2, \dots, \vec{y}^N, \vec{y}^{N+1}$$

mittels Grundrechnungsarten aus den Daten  $\vec{y}_0, \vec{F}$  und aus  $x_0, \dots, x_{N+1}$  so zu bestimmen, dass

$$\vec{y}^1 \approx \vec{y}(x_1), \quad \vec{y}^2 \approx \vec{y}(x_2), \quad \dots, \quad \vec{y}^{N+1} \approx \vec{y}(x_{N+1}),$$

wobei  $\vec{y}: [0, X] \rightarrow \mathbb{R}^n$  die eindeutige Lösung von (79) ist.

**Bemerkung.** Verfeinerte numerische Verfahren passen sowohl Anzahl  $N$  als auch Platzierung  $x_0, \dots, x_{N+1}$  der Argumente den Daten der ODE in sukzessiver Weise an (“Schrittweitensteuerung”). Die Besprechung derartiger Verfahren sprengt den Rahmen dieser Vorlesung.

Statt dessen nehmen wir an, dass es sich bei den Punkten  $x_0, \dots, x_{N+1}$  um ein

“äquidistantes Gitter”

handelt, dass also

$$h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \dots = x_{N+1} - x_N$$

gilt. Wir erhalten

$$X = X - 0 = x_{N+1} - x_0 = (x_{N+1} - x_N) + (x_N - x_{N-1}) + (x_1 - x_0) = (N+1) \cdot h,$$

demnach

$$h = \frac{X}{N+1}.$$

Demnach gilt im Folgenden stets

$$x_k = hk, \quad k = 0, \dots, N+1.$$

Bei den vorgestellten Verfahren handelt es sich um

Einschrittverfahren mit fester Schrittweite  $h$ ,

dh jedes der Verfahren besteht aus zwei Teilen:

1. Fixierung des Startvektors

$$\vec{y}^0 = \vec{y}_0.$$

2. Ist  $\vec{y}^k$ ,  $k = 0, \dots, N+1$  bekannt, so ergibt sich  $\vec{y}^{k+1}$  aus der

einstelligen Rekursionsformel

$$\vec{y}^{k+1} = \vec{y}^k + \Phi(x_k, \vec{y}^k, \vec{F}; h).$$

**Bemerkung.** a) Das ganze know-how des numerischen Verfahrens steckt in der Funktion  $\Phi$ .

b) Die hier besprochenen numerischen Verfahren liefern Näherungswerte für die Lösung von (79) an den Stellen  $x_0, \dots, x_{N+1}$ . Mitunter besteht Interesse an einem Näherungswert für  $\vec{y}(x)$  an einer Stelle

$$x \neq x_0, \dots, x_{N+1}.$$

Es erscheint demnach sinnvoll, die gefundenen Näherungswerte zu einer Näherungsfunktion

$$\vec{w}_h : [0, X] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

zu erweitern. Am einfachsten geschieht dies durch lineare Interpolation:

$$\vec{w}_h(x) = \theta(x) \cdot \vec{y}^{\lfloor x/h \rfloor} + (1 - \theta(x)) \cdot \vec{y}^{\lfloor x/h \rfloor + 1}, \quad 0 \leq x < X,$$

$$\vec{w}_h(X) = \vec{y}^{N+1},$$

wobei

$$\lfloor x/h \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \leq (x/h)\}, \quad \theta(x) = \lfloor x/h \rfloor + 1 - (x/h)$$

für  $0 \leq x < X$  folgende Eigenschaften haben:

- $0 \leq [x/h] \leq N$ ,
- $0 < \theta \leq 1$ .

c) Unter geeigneten Zusatzbedingungen gilt

$$\lim_{h \downarrow 0} \vec{w}_h(x) = \vec{y}(x), \quad x \in [0, X]. \quad (80)$$

d) Gleichung (80) wird gerne zum - nur bedingt gültigen - Anlass genommen, um zu sagen:

“Einen besseren Näherungswert erhalte ich, wenn ich  $h$  kleiner mache.”

Diese Aussage ist nur dann gültig, wenn

- 1) der Grenzübergang  $h \downarrow 0$  monoton ist,
- 2) der Rechner, auf dem das Verfahren läuft, mit beliebiger Genauigkeit rechnet.

1) wird in der Praxis mangels Alternativen gerne übergangen, 2) ist ein echtes Problem, da bei zu kleiner Wahl von  $h$  unerwünschte Rundungsfehler die Approximationsgüte der gefundenen Lösung  $\vec{w}_h$  schlechter werden lässt.

## 5.1 Das explizite Eulerverfahren

Warum können wir (79) nicht “einfach lösen” ? Weil wir zB für  $x = 0$  zwar den Wert Funktion kennen ( $\vec{y}(0) = \vec{y}_0$ ) und aus (79) auch die Ableitung

$$\vec{y}'(0) = \vec{F}(0, \vec{y}_0),$$

an der Stelle  $x = 0$  ausrechnen können, aber sonst nichts weiter über den Funktionsverlauf im Intervall  $[0, h]$  wissen - es gibt nämlich unendlich viele Funktionen, die für  $x = 0$  den Wert  $\vec{y}_0$  annehmen und deren Ableitung gleich  $\vec{F}(0, \vec{y}_0)$  ist.

Andrerseits wissen wir von der Theorie der Taylorreihen, dass wir mit Hilfe von Funktionswert und Ableitung eine lineare Approximation an die Funktion finden können.

Nach dieser Formel gilt

$$\begin{aligned} \vec{y}(x) &\approx \vec{y}(0) + x \cdot \vec{y}'(0) = \vec{y}(0) + x \cdot \vec{F}(0, \vec{y}(0)) \\ &= \vec{y}_0 + x \cdot \vec{F}(0, \vec{y}_0), \quad 0 \leq x \leq h. \end{aligned}$$

Wir erhalten speziell für  $x = h$ ,

$$\vec{y}(h) \approx \vec{y}_0 + h \cdot \vec{F}(0, \vec{y}_0).$$

Es liegt wegen dem beabsichtigten  $\vec{y}(h) \approx \vec{y}^1$  nahe,

$$\vec{y}^1 = \vec{y}_0 + h \cdot \vec{F}(0, \vec{y}_0)$$

zu setzen.

Wir können weiterfortfahren und die Taylorformel auf dem Intervall  $[h, 2h]$  einsetzen:

$$\vec{y}(x) \approx \vec{y}(h) + (x - h) \cdot \vec{y}'(h) = \vec{y}(h) + (x - h) \cdot \vec{F}(h, \vec{y}(h)). \quad (81)$$

Anders als beim ersten Schritt ist hier das Problem, dass wir  $\vec{y}(h)$  nicht kennen. Statt dessen haben wir nur den Näherungswert  $\vec{y}(h) \approx \vec{y}^1$  zur Verfügung.

Also können wir nur diesen verwenden. Wir erhalten

$$\vec{y}(h) + (x - h) \cdot \vec{F}(h, \vec{y}(h)) \approx \vec{y}^1 + (x - h) \cdot \vec{F}(h, \vec{y}^1).$$

Wegen (81) ist zu hoffen, dass zB für  $x = 2h$  gilt

$$\vec{y}(2h) \approx \vec{y}^1 + h \cdot \vec{F}(h, \vec{y}^1).$$

Wegen dem erwünschten  $\vec{y}(2h) \approx \vec{y}^2$  liegt es nahe,

$$\vec{y}^2 = \vec{y}^1 + h \cdot \vec{F}(h, \vec{y}^1)$$

zu setzen.

Allerdings müssen wir unter Umständen damit rechnen, dass  $\vec{y}^2$  "weiter von  $\vec{y}(2h)$  entfernt" ist als  $\vec{y}^1$  von  $\vec{y}(h)$ .

Setzen wir diese Argumentationsfolge weiter fort, so erhalten wir ohne viel Mühe

$$\vec{y}((k+1)h) \approx \vec{y}^{k+1} = \vec{y}^k + h \cdot \vec{F}(kh, \vec{y}^k), \quad 0 \leq k \leq N$$

also mit  $x_k = kh$ ,

$$\Phi(x_k, \vec{y}^k, \vec{F}; h) = h \cdot \vec{F}(x_k, \vec{y}^k).$$

Wir erhalten

**Explizites Eulerverfahren.**

- $\vec{y}^0 = \vec{y}_0$ .
- $\vec{y}^{k+1} = \vec{y}^k + h \cdot \vec{F}(hk, \vec{y}^k)$ ,  $k = 0, \dots, N$ .

**Beispiel.**  $y' = y$ ,  $y(0) = 1$ ,  $x \in [0, 3]$ . Hier ist  $F(x, y) = y$ .

Sei zunächst  $N = 3$ . Dann ist

$$h = \frac{X}{N+1} = \frac{3}{4} = 0.75.$$

Wir erhalten

- $y^0 = y_0 = 1$

- $y^{k+1} = y^k + h \cdot F(hk, y^k) = y^k + hy^k = (1 + h)y^k = 1.75 \cdot y^k$ ,  
 $k = 0, \dots, 3$ .

Also, wenn wir - was im vorliegenden Fall möglich ist - die ODE exakt lösen und die Daten miteinander vergleichen, so erhalten wir

$x_k = hk$	$y(x_k)$	$y^k$
0	1.0000...	1.0000...
0.75	2.1170...	1.7500...
1.5	4.4816...	3.0625...
2.25	9.4877...	5.3593...
3	20.085...	9.3789...

Setzen wir  $N = 100$ , so erhalten wir

$$h = \frac{X}{N} = \frac{3}{100} = 0.03$$

und es ergibt sich das Schema

- $y^0 = y_0 = 1$
- $y^{k+1} = y^k + h \cdot F(hk, y^k) = y^k + hy^k = (1 + h)y^k = 1.03 \cdot y^k$ ,  
 $k = 0, \dots, 100$ .

Wir vergleichen die Resultate mit MATLAB.

Dazu legen wir ein file "rhs.m" an, in dem die rechte Seite der ODE erfasst wird.

```
function u = rhs(x,y)
u = y;
```

Dann schreiben wir ein Programm "expleul.m"

```
X=3;
N=3;
y0=1;
h=X/(N+1);
y=zeros(N+2,1);
y(1)=y0;
for k=1:N+1
    y(k+1)=y(k)+h*rhs(h*k,y(k));
end
```

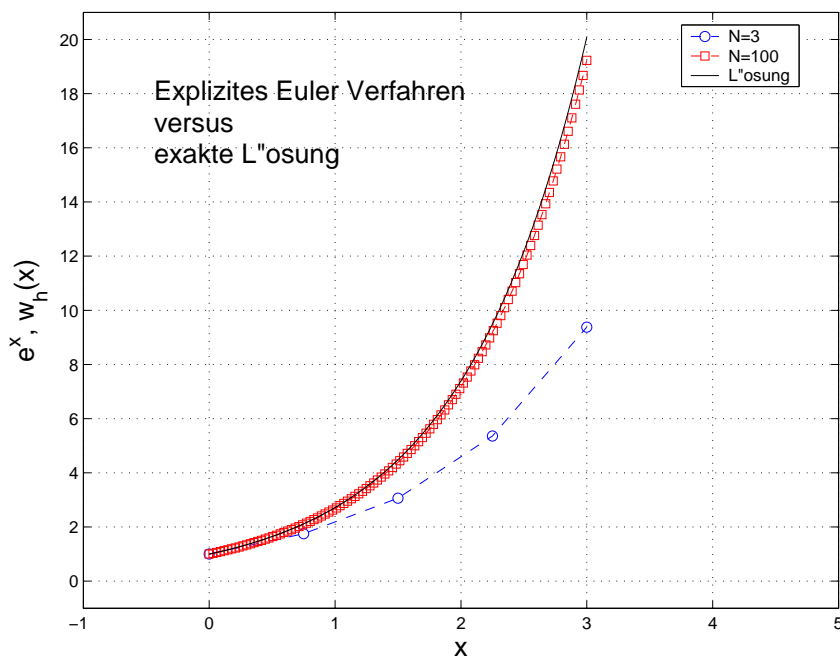
In diesem Programm ist  $N = 3$  gesetzt. Wir starten dieses Programm, plotten das Resultat und speichern die Grafik ...

```
>> expleul;
>> x=[0:3/4:3];
>> plot(x,y);
```

>> hold on;

weil wir danach das Programm mit  $N = 100$  laufen lassen und die resultierende Kurve im gleichen Bild plotten.

Editieren der Grafiken und Einlesen des Graphen der Exponentialfunktion ergibt folgendes Bild.



Wir sehen, dass im vorliegenden, einfachen Fall eine Verkleinerung der Schrittweite  $h$  tatsächlich eine Verbesserung der Approximationsgüte bewirkt.

**Beispiel.**  $y' = x^2 + y^2$ ,  $y(0) = 1$ . Hier ist  $F(x, y) = x^2 + y^2$ .

Hier muss ein sinnvolles Intervall  $[0, X]$  erst ermittelt werden. Die wieder mit MATLAB gefundenen Resultate für unterschiedliche Werte von  $N$  deuten darauf hin, dass sich in der Nähe von  $x = 1$  eine Singularität befindet. Das explizite Eulerverfahren lautet,

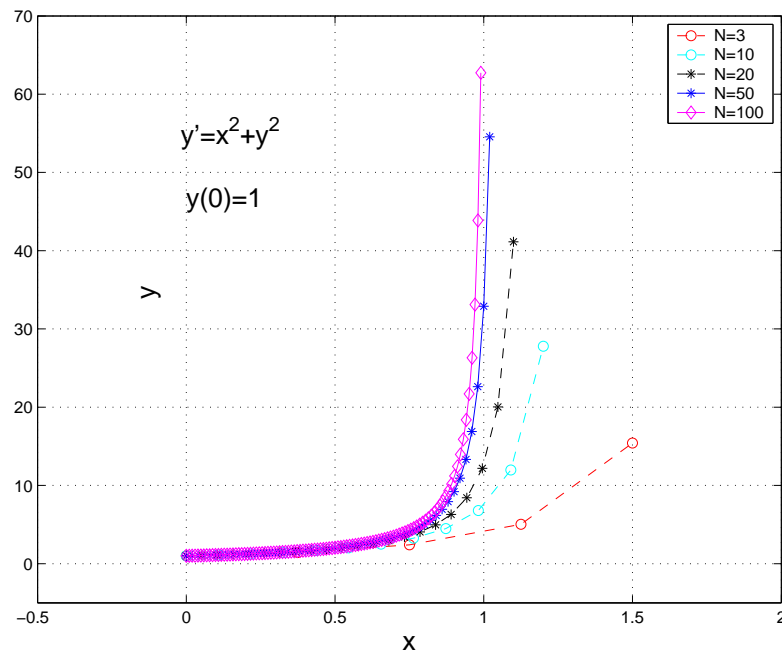
- $y^0 = 1$ ,
- $y^{k+1} = y^k + h \cdot ((hk)^2 + (y^k)^2)$ ,  $k = 0, \dots, N$ ,

wobei  $N, X, h$  wie folgt gewählt wurden.

$N$	$X$	$h$
3	1.5	1.5/4
10	1.2	1.2/11
20	1.1	1.1/21
50	1.02	1.02/51
100	0.99	0.99/101

Das file "rhs.m" wurde modifiziert:

```
function u = rhs(x,y)
u = x.^2+y.^2;
```



## 5.2 Das implizite Eulerverfahren

Das explizite Eulerverfahren hat den Vorteil, leicht verständlich und einfach programmierbar zu sein.

Der Nachteil vom expliziten Eulerverfahren ist, dass es unter Umständen unsinnige Resultate liefert, siehe Übungen.

Ein stabileres Verfahren ist das implizite Eulerverfahren.

Betrachten wir das AWP (79), so können wir dieses durch Integration auf folgende Gestalt bringen:

$$\vec{y}(x) = \vec{y}_0 + \int_0^x \vec{F}(s, \vec{y}(s)) ds, \quad x \in [0, X]. \quad (82)$$

Aus dieser Darstellung erhalten wir sukzessive

$$\begin{aligned}
 \vec{y}(h) &= \vec{y}_0 + \int_0^h \vec{F}(s, \vec{y}(s)) \, ds \\
 \vec{y}(2h) &= \vec{y}_0 + \int_0^{2h} \vec{F}(s, \vec{y}(s)) \, ds \\
 &= \vec{y}_0 + \int_0^h \vec{F}(s, \vec{y}(s)) \, ds + \int_h^{2h} \vec{F}(s, \vec{y}(s)) \, ds \\
 &= \vec{y}(h) + \int_h^{2h} \vec{F}(s, \vec{y}(s)) \, ds \\
 \vec{y}(3h) &= \vec{y}_0 + \int_0^{3h} \vec{F}(s, \vec{y}(s)) \, ds \\
 &= \vec{y}_0 + \int_0^{2h} \vec{F}(s, \vec{y}(s)) \, ds + \int_{2h}^{3h} \vec{F}(s, \vec{y}(s)) \, ds \\
 &= \vec{y}(2h) + \int_{2h}^{3h} \vec{F}(s, \vec{y}(s)) \, ds
 \end{aligned}$$

also

$$\vec{y}((k+1)h) = \vec{y}(kh) + \int_{kh}^{(k+1)h} \vec{F}(s, \vec{y}(s)) \, ds, \quad k = 0, \dots, N. \quad (83)$$

Die entscheidende Frage ist nun:

Wie approximieren wir das Integral ?

Eine Idee ist: Durch eine Treppenfunktion, etwa

$$\int_{kh}^{(k+1)h} \vec{F}(s, \vec{y}(s)) \, ds \approx h \cdot \vec{F}(s_*, \vec{y}(s_*)), \quad s_* = s_*(k) \in [kh, (k+1)h].$$

Doch wie wählen wir  $s_*(k)$  ?

Hier bieten sich zwei Möglichkeiten an:

- $s_*(k)$ =linker Randpunkt des Intervall, als  $s_*(k) = kh$ .
- $s_*(k)$ =rechter Randpunkt des Intervall, als  $s_*(k) = (k+1)h$ .

1.Fall:  $s_*(k) = kh$  In diesem Fall erhalten wir für  $k = 0$ ,

$$\begin{aligned}
 \vec{y}(h) &= \vec{y}_0 + \int_0^h \vec{F}(s, \vec{y}(s)) \, ds \\
 &\approx \vec{y}_0 + h \cdot \vec{F}(0, \vec{y}(0)) \\
 &= \vec{y}^0 + h \cdot \vec{F}(0, \vec{y}^0),
 \end{aligned}$$

also wird nahe gelegt,

$$\vec{y}^1 = \vec{y}^0 + h \cdot \vec{F}(0, \vec{y}^0)$$

zu setzen. Wir erhalten damit den ersten Schritt vom expliziten Eulerverfahren. Für  $k = 1$  approximieren wir weiter

$$\begin{aligned}\vec{y}(2h) &= \vec{y}_0 + \int_0^{2h} \vec{F}(s, \vec{y}(s)) ds \\ &= \vec{y}_0 + \int_0^h \vec{F}(s, \vec{y}(s)) ds + \int_h^{2h} \vec{F}(s, \vec{y}(s)) ds \\ &= \vec{y}(h) + \int_h^{2h} \vec{F}(s, \vec{y}(s)) ds \\ &\approx \vec{y}(h) + h \cdot \vec{F}(h, \vec{y}(h)) \\ &\approx \vec{y}^1 + h \cdot \vec{F}(h, \vec{y}^1),\end{aligned}$$

und es ist nahe liegend

$$\vec{y}^2 = \vec{y}^1 + h \cdot \vec{F}(h, \vec{y}^1)$$

zu setzen. Wir erhalten somit den zweiten Schritt vom expliziten Eulerverfahren.

Setzen wir die Vorgehensweise fort, so stellen wir fest, dass

$$s_*(k) = kh \text{ dem expliziten Eulerverfahren entspricht.}$$

2.Fall:  $s_*(k) = (k+1)h$  Eine ganz ähnliche Argumentation wie im 1.Fall ergibt das

**Implizite Eulerverfahren.**

- $\vec{y}^0 = \vec{y}_0$ .
- $\vec{y}^{k+1} = \vec{y}^k + h \cdot \vec{F}(hk + h, \vec{y}^{k+1})$ .

**Bemerkung.** a) Im Gegensatz zum expliziten Eulerverfahren liegt die entscheidende Gleichung

$$\vec{y}^{k+1} = \vec{y}^k + h \cdot \vec{F}(hk + h, \vec{y}^{k+1}) \quad (84)$$

nicht in der Form  $\vec{y}^{k+1} = \vec{y}^k + \Phi(x_k, \vec{y}^k, \vec{F}; h)$  vor. Statt dessen ist  $\vec{y}^{k+1}$  "implizit" durch (84) definiert. Die Klärung der näheren Umstände, wann (und wie)  $\vec{y}^{k+1}$  aus (84) ermittelt werden kann, sprengt den Rahmen dieser VL.

b) Die Verhältnisse liegen bei linearen ODEs wesentlich einfacher. Deswegen beschränken wir uns in unserer Diskussion auf diese.

**Beispiel.**  $y' = y$ ,  $y(0) = 1$ ,  $x \in [0, 3]$ . Hier ist  $F(x, y) = y$ .

Der entscheidende Schritt von (84) hat die Form

$$y^{k+1} = y^k + h \cdot y^{k+1}.$$

Wir können nach  $y^{k+1}$  auflösen und erhalten das Schema

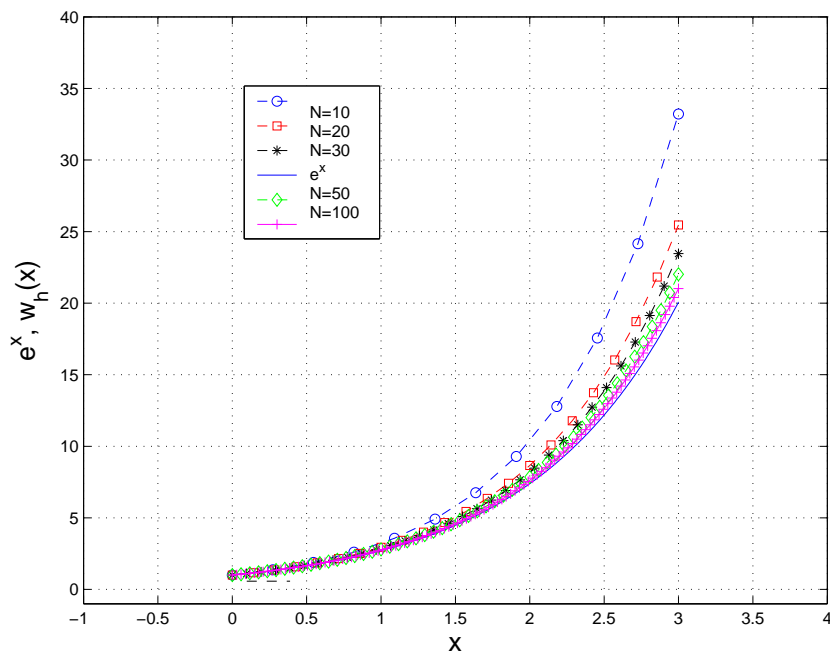
- $y^0 = 1$ .
- $y^{k+1} = \frac{y^k}{1-h}$ .

Natürlich muss hier  $h \neq 1$  sein.

Wir implementieren dieses Verfahren für unterschiedliche Werte für  $N$  in MATLAB. Dafür legen wir ein file "impleu1.m" an, das zB für  $N = 10$  die Form hat

```
X=3;
N=10;
y0=1;
h=X/(N+1);
y=zeros(N+2,1);
y(1)=y0;
for k=1:N+1
    y(k+1)=y(k)/(1-h);
end
```

Die Resultate der Berechnungen für  $N = 10, 20, 30, 50, 100$  sind in der folgenden Grafik fest gehalten.



Die Lösung wird durchgehend überschätzt, die Approximationsgüte nimmt mit steigendem  $N$ , also mit fallendem  $h$ , zu.

**Beispiel.** Wir betrachten das lineare ODE System

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

mit dem Anfangswert

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

mit der offensichtlichen Lösung

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}.$$

Der entscheidende Schritt beim impliziten Eulerverfahren lautet

$$\vec{y}^{k+1} = \vec{y}^k + h \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{y}^{k+1},$$

den wir auch in der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & -h \\ h & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{y}^{k+1} = \vec{y}^k \quad (85)$$

schreiben können. Für theoretische Zwecke ist es günstig, aus dieser Gleichung  $\vec{y}^{k+1}$  explizit zu berechnen:

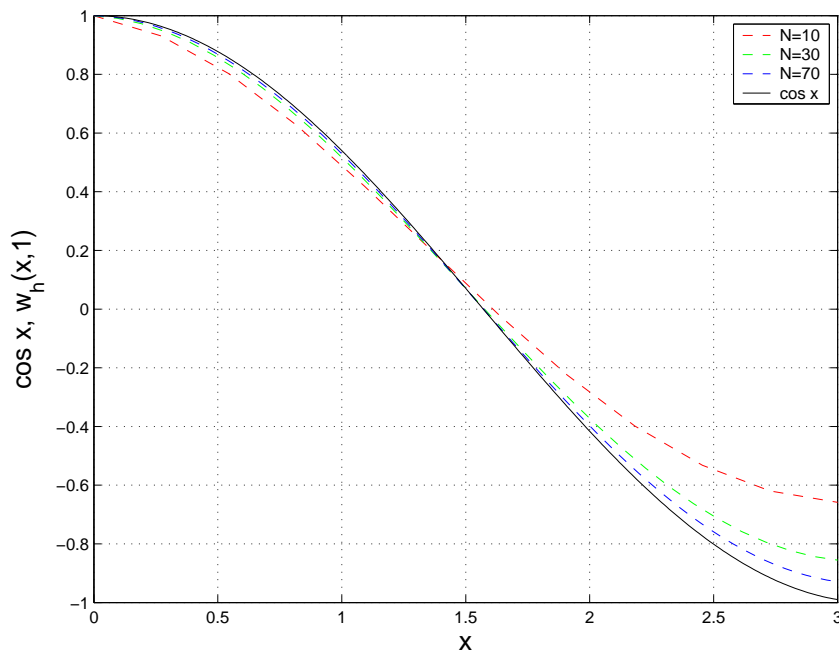
$$\vec{y}^{k+1} = \frac{1}{1+h^2} \begin{pmatrix} 1 & h \\ -h & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{y}^k,$$

weitere Beispiele dazu in den Übungen.

Bei der numerischen Umsetzung mit MATLAB verwenden wir nicht diese explizite Lösungsdarstellung, sondern überlassen es MATLAB, mit dem Gleichungssystem (85) fertig zu werden. Das entsprechende file heisst "impleul2.m".

```
X=3;
N=70;
y10=1;
y20=0;
h=X/(N+1);
y=zeros(N+2,2);
y(1,1)=y10;
y(1,2)=y20;
A = [ 1 -h; h 1];
for k=1:N+1
    y(k+1,:)=(A\u(y(k,:)))';
end
```

Die Resultate der Berechnungen für  $N = 30, 50, 70$  für  $y_1$  und der Vergleich mit  $\cos$  ist der folgenden Grafik zu entnehmen.



### 5.3 Das Runge Kutta Verfahren

Es gibt mehrere Runge Kutta Verfahren. Das hier besprochene Verfahren ist das klassische Runge Kutta Verfahren.

Bei diesem Verfahren handelt es sich um ein “Verfahren 4.Ordnung”.

Wir unternehmen keinen Versuch, diesen Terminus genauer zu erklären.

Wichtig ist: in Standardsituationen zeichnet sich das klassische Runge Kutta Verfahren durch hohe Genauigkeit aus und kann getrost als “das” Standardverfahren bezeichnet werden.

Wir wollen uns die - im Vergleich zu den Eulerverfahren umfangreichen - Berechnungsschritte veranschaulichen.

Dazu kehren wir zur Integralformulierung (83) zurück:

$$\vec{y}((k+1)h) = \vec{y}(kh) + \int_{kh}^{(k+1)h} \vec{F}(s, \vec{y}(s)) ds. \quad (86)$$

Das Integral können wir nicht berechnen, da wir  $\vec{y}$  im Intervall  $[kh, (k+1)h]$  nicht kennen (und selbst wenn, dann müssten wir schon Glück haben, wenn wir eine Stammfunktion explizit angeben und diese auch noch exakt auswerten könnten).

Wir können nur versuchen, das Integral näherungsweise auszuwerten.

Wählen wir wie in den letzten Kapiteln eine Approximation mit Treppenfunktionen, so erhalten wir die Eulerverfahren.

Eine in vieler Hinsicht genauere “Quadraturformel” - das ist eine Formel die es erlaubt, ein bestimmtes Integral näherungsweise auszuwerten - ist die Simpson-Regel (Keplersche Fassregel). Bei dieser Regel wird der Integrand durch ein quadratisches Polynom approximiert. Wir erhalten zB für

eine stetige Funktion  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\int_a^b g(s) ds \approx \frac{b-a}{6} \cdot \left( g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) \right).$$

Wenden wir diese Formel auf (86) an, so erhalten wir mit den Abkürzungen

$$x_k = kh, \quad x_{k+1/2} = \left(k + \frac{1}{2}\right)h, \quad x_{k+1} = (k+1)h,$$

$$\begin{aligned} \vec{y}(x_{k+1}) &\approx \vec{y}(x_k) \\ &+ \frac{h}{6} \cdot \left( \vec{F}(x_k, \vec{y}(x_k)) + 4\vec{F}\left(x_{k+1/2}, \vec{y}(x_{k+1/2})\right) + \vec{F}(x_{k+1}, \vec{y}(x_{k+1})) \right), \end{aligned}$$

woraus wir unter Verwendung der Approximationen

$$\vec{y}(x_k) \approx \vec{y}^k, \quad \vec{y}(x_{k+1}) \approx \vec{y}^{k+1}$$

das Schema

$$\vec{y}^{k+1} \approx \vec{y}^k + \frac{h}{6} \cdot \left( \vec{F}(x_k, \vec{y}^k) + 4\vec{F}\left(x_{k+1/2}, \vec{y}(x_{k+1/2})\right) + \vec{F}(x_{k+1}, \vec{y}^{k+1}) \right) \quad (87)$$

erhalten.

**Bemerkung.** Beim mittleren Term der rechten Seite von (87) wird keine Approximation von  $\vec{y}(x_{k+1/2})$  verwendet. Bei den anderen Termen werden “ $\vec{y}(x_k)$ ” und “ $\vec{y}(x_{k+1})$ ” durch die Approximationen “ $\vec{y}^k$ ” und “ $\vec{y}^{k+1}$ ” ersetzt. Schätzwerte für  $\vec{y}(x_{k+1/2})$  werden erst im 1. und 2. Schritt des Runge Kutta Verfahrens entwickelt.

Die Frage ist nun:

Gesetzt,  $\vec{y}^k$  sei bekannt - wie erhalten wir gute Schätzwerte für  $\vec{y}(x_{k+1/2})$  und  $\vec{y}^{k+1}$  ?

Die Antwort auf diese Frage erfolgt für das Runge Kutta Verfahren in mehreren Schritten.

**1.Schritt.** Wir wollen einen ersten Schätzwert für  $\vec{y}(x_{k+1/2})$  finden. Hierfür gehen wir zunächst von  $\vec{y}^k$  aus. Wir verwenden die ODE  $\vec{y}' = \vec{F}(x, \vec{y})$  und wir nehmen  $\vec{y}^k \approx \vec{y}(x_k)$  an. Es folgt

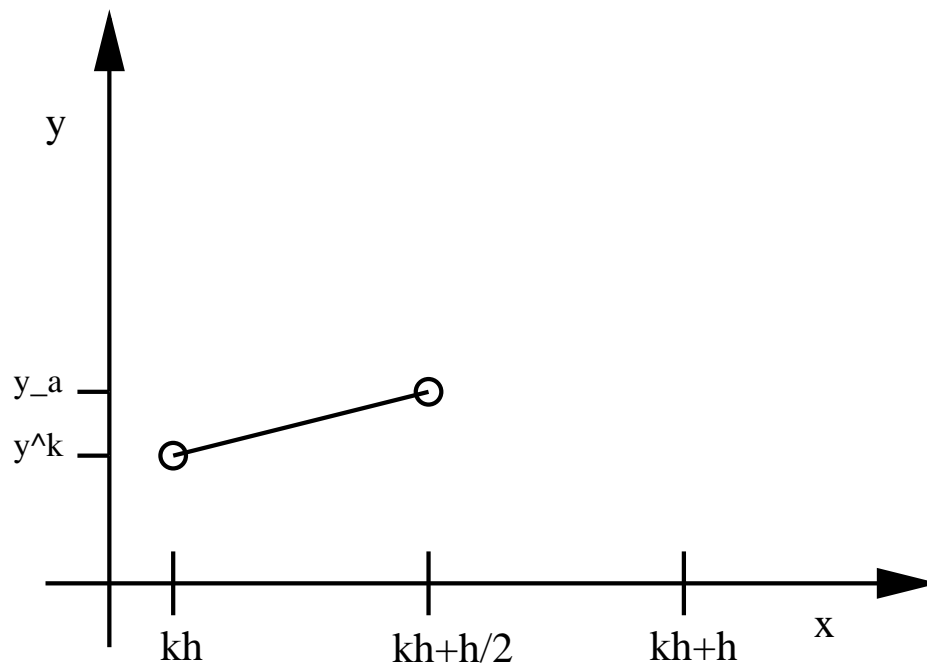
$$\vec{y}'(x_k) = \vec{F}(x_k, \vec{y}(x_k)) \approx \vec{F}(x_k, \vec{y}^k) = \kappa(k, 1).$$

Die Taylorformel liefert

$$\begin{aligned} \vec{y}(x_{k+1/2}) &\approx \vec{y}(x_k) + \frac{h}{2} \vec{y}'(x_k) = \vec{y}(x_k) + \frac{h}{2} \vec{F}(x_k, \vec{y}(x_k)) \\ &\approx \vec{y}^k + \frac{h}{2} \vec{F}(x_k, \vec{y}^k) = \vec{y}^k + \frac{h}{2} \kappa(k, 1), \end{aligned}$$

und diese Formel liefert einen ersten Schätzwert für  $\vec{y}(x_{k+1/2})$ :

$$\vec{y}_a = \vec{y}^k + \frac{h}{2}\kappa(k, 1).$$



**2.Schritt.** Einen weiteren Schätzwert für  $\vec{y}(x_{k+1/2})$  erhalten wir mit Hilfe von  $\vec{y}_a$ .

$$\begin{aligned} \vec{y}'(x_{k+1/2}) &= \vec{F}(x_{k+1/2}, \vec{y}(x_{k+1/2})) \\ &\approx \vec{F}(x_{k+1/2}, \vec{y}_a) = \vec{F}(x_{k+1/2}, \vec{y}^k + \frac{h}{2}\kappa(k, 1)) = \kappa(k, 2). \end{aligned} \quad (88)$$

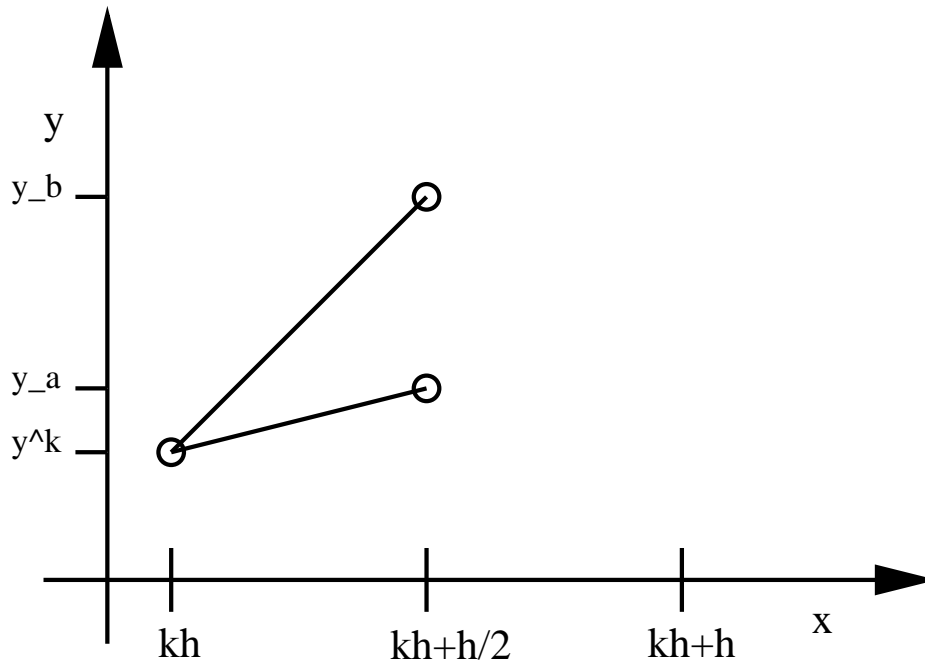
Bei der Ermittlung von  $\vec{y}_a$  verwendeten wir in Taylorformel zur Approximation von  $\vec{y}(x_{k+1/2})$  die Ableitung von  $\vec{y}$  an der Stelle  $x_k$ . Genau so gut können wir die Ableitung von  $\vec{y}$  an der Stelle  $x_{k+1/2}$  verwenden, für die wir nach (88) einen Schätzwert haben.

Wir erhalten

$$\vec{y}(x_{k+1/2}) \approx \vec{y}(x_k) + \frac{h}{2}\vec{y}'(x_{k+1/2}) \approx \vec{y}^k + \frac{h}{2}\kappa(k, 2).$$

Wir erhalten einen weiteren Schätzwert  $\vec{y}_b$  für  $\vec{y}(x_{k+1/2})$ :

$$\vec{y}_b = \vec{y}^k + \frac{h}{2}\kappa(k, 2).$$



**3.Schritt.** Der 3.Schritt ist ähnlich zum 2.Schritt, nur nimmt nun  $\vec{y}_b$  die Rolle von  $\vec{y}_a$  ein:

$\vec{y}_b$  ist ein Schätzwert für  $\vec{y}(x_{k+1/2})$ . Damit ergibt sich ein weiterer Schätzwert für die Ableitung von  $\vec{y}$  an der Stelle  $x_{k+1/2}$ ,

$$\begin{aligned}\vec{y}'(x_{k+1/2}) &= \vec{F}(x_{k+1/2}, \vec{y}(x_{k+1/2})) \\ &\approx \vec{F}(x_{k+1/2}, \vec{y}_b) = \vec{F}(x_{k+1/2}, \vec{y}^k + \frac{h}{2}\kappa(k, 2)) = \kappa(k, 3).\end{aligned}\quad (89)$$

Wir verwenden diesen Schätzwert für  $\vec{y}'(x_{k+1/2})$  in der Taylorformel zur Ermittlung eines Schätzwertes  $\vec{y}_*$  für  $\vec{y}(x_{k+1})$ :

Wir erhalten

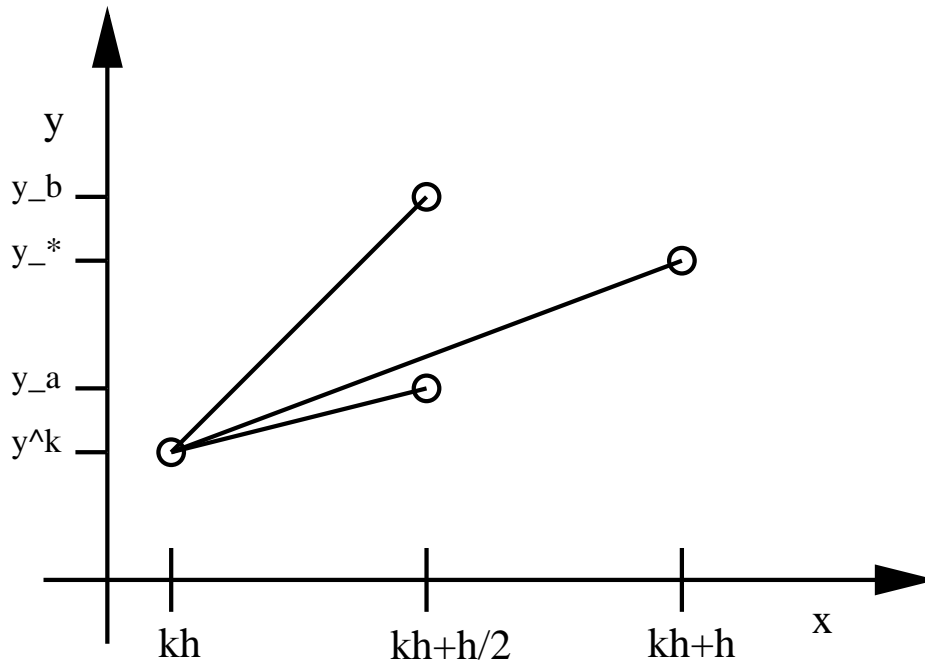
$$\vec{y}(x_{k+1}) \approx \vec{y}(x_k) + h \cdot \vec{y}'(x_{k+1/2}) \approx \vec{y}^k + h\kappa(k, 3).$$

Wir erhalten damit einen Schätzwert  $\vec{y}_*$  für  $\vec{y}(x_{k+1})$ :

$$\vec{y}_* = \vec{y}^k + h\kappa(k, 3).$$

Die geschätzte Steigung von  $\vec{y}$  an der Stelle  $x_{k+1}$  ergibt sich damit zu

$$\vec{y}'(x_{k+1}) \approx \vec{F}(x_{k+1}, \vec{y}_*) = \kappa(k, 4).$$



**4.Schritt.** Wir wiederholen: Um einen Schätzwert für  $\vec{y}(x_{k+1})$  zu erhalten, wollen wir die auf der Simpsonregel (Keplersche Fassregel) beruhende Approximation des Integrals,

$$\vec{y}^{k+1} \approx \vec{y}^k + \frac{h}{6} \cdot \left( \vec{F}(x_k, \vec{y}^k) + 4\vec{F}(x_{k+1/2}, \vec{y}^{k+1/2}) + \vec{F}(x_{k+1}, \vec{y}^{k+1}) \right) \quad (90)$$

verwenden.

Das Problem ist:

Weder  $\vec{F}(x_{k+1/2}, \vec{y}^{k+1/2})$  noch  $\vec{F}(x_{k+1}, \vec{y}^{k+1})$  sind bekannt, müssen also geschätzt werden.

Zur Schätzung verwenden wir die Terme, die wir in den ersten drei Schritten ermittelt hatten.

$\vec{F}(x_{k+1/2}, \vec{y}(x_{k+1/2}))$ .

Für  $\vec{y}(x_{k+1/2})$  stehen zwei Schätzwerte zur Verfügung:  $\vec{y}_a$  und  $\vec{y}_b$ .

Verwenden wir  $\vec{y}_a$  als Schätzwert für  $\vec{y}(x_{k+1/2})$ , so erhalten wir

$$\vec{F}(x_{k+1/2}, \vec{y}(x_{k+1/2})) \approx \vec{F}(x_{k+1/2}, \vec{y}_a), \quad (91)$$

und verwenden wir  $\vec{y}_b$  als Schätzwert für  $\vec{y}(x_{k+1/2})$ , so erhalten wir

$$\vec{F}(x_{k+1/2}, \vec{y}(x_{k+1/2})) \approx \vec{F}(x_{k+1/2}, \vec{y}_b). \quad (92)$$

Da wir keine der beiden Schätzungen (91), (92) bevorzugen wollen, verwenden wir kurzer Hand deren Mittelwert,

$$\vec{F}(x_{k+1/2}, \vec{y}(x_{k+1/2})) \approx \frac{1}{2} \cdot (\vec{F}(x_{k+1/2}, \vec{y}_a) + \vec{F}(x_{k+1/2}, \vec{y}_b)).$$

$\vec{F}(x_{k+1/2}, \vec{y}^{k+1})$ ). Dieser Term beinhaltet den Vektor  $\vec{y}^{k+1}$ , der aber noch nicht verfügbar ist. Also müssen wir  $\vec{y}^{k+1}$  schätzen. Wir verwenden  $\vec{y}_*$  als Schätzwert und erhalten

$$\vec{F}(x_{k+1/2}, \vec{y}^{k+1}) \approx \vec{F}(x_{k+1/2}, \vec{y}_*).$$

Zusammenfassung. Wir erhalten

$$\vec{y}^{k+1} = \vec{y}^k + \frac{h}{6} \cdot \left( \vec{F}(x_k, \vec{y}^k) + 2\vec{F}(x_{k+1/2}, \vec{y}_a) + 2\vec{F}(x_{k+1/2}, \vec{y}_b) + \vec{F}(x_{k+1}, \vec{y}_*) \right).$$

Fassen wir die einzelnen Schritte des Runge Kutta Verfahrens für ein äquidistantes Gitter in einer Tabelle zusammen, so erhalten wir

**Runge Kutta Verfahren.**

- $\vec{y}^0 = \vec{y}_0$ .
- a)  $\kappa(k, 1) = \vec{F}(hk, \vec{y}^k)$ .
- b)  $\kappa(k, 2) = \vec{F}(hk + h/2, \vec{y}^k + h\kappa(k, 1)/2)$ .
- c)  $\kappa(k, 3) = \vec{F}(hk + h/2, \vec{y}^k + h\kappa(k, 2)/2)$ .
- d)  $\kappa(k, 4) = \vec{F}(hk + h, \vec{y}^k + h\kappa(k, 3))$ .
- e)  $\vec{y}^{k+1} = \vec{y}^k + \frac{h}{6} \cdot (\kappa(k, 1) + 2\kappa(k, 2) + 2\kappa(k, 3) + \kappa(k, 4))$ .

**Beispiel.** Wir betrachten das Volterra Lotka Modell

$$\dot{B} = (2 - R - B)B$$

$$\dot{R} = (2B - 1 - R)R$$

mit den Anfangsdaten

$$\begin{pmatrix} B(0) \\ R(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir schreiben für dieses AWP ein Runge Kutta Verfahren. Dafür legen wir zunächst ein file "rbvl.m" (RäuberBeuteVolterraLotka) an

```
function u=rbvl(t,y)
u=[0;0];
a=2;
b=1;
lambda=1;
c=2;
d=1;
mu=1;
u(1)= (a-b*y(2)-lambda*y(1))*y(1);
u(2)= (c*y(1)-d-mu*y(2))*y(2);
```

Dann implementieren wir das Runge Kutta Verfahren im file “RuKuVoLo.m”, mit den Daten

$$x \in [0, X], X = 7, \quad N = 500,$$

```
X=7;
N=500;
h=X/(N+1);
B0=2;
R0=1;
Y=zeros(N+2,2);
kappa=zeros(2,4);
Y(1,1)=B0;
Y(1,2)=R0;
for k=1:N+1
kappa(:,1)=rbvl(h*k,Y(k,:));
kappa(:,2)=rbvl(h*k+(h/2),Y(k,:)+(h*kappa(:,1)')/2);
kappa(:,3)=rbvl(h*k+(h/2),Y(k,:)+(h*kappa(:,2)')/2);
kappa(:,4)=rbvl(h*(k+1),Y(k,:)+h*kappa(:,3)');
Y(k+1,:)=Y(k,:)+(h/6)*(kappa(:,1)'+2*kappa(:,2)'+
+2*kappa(:,3)'+kappa(:,4)');
end
```

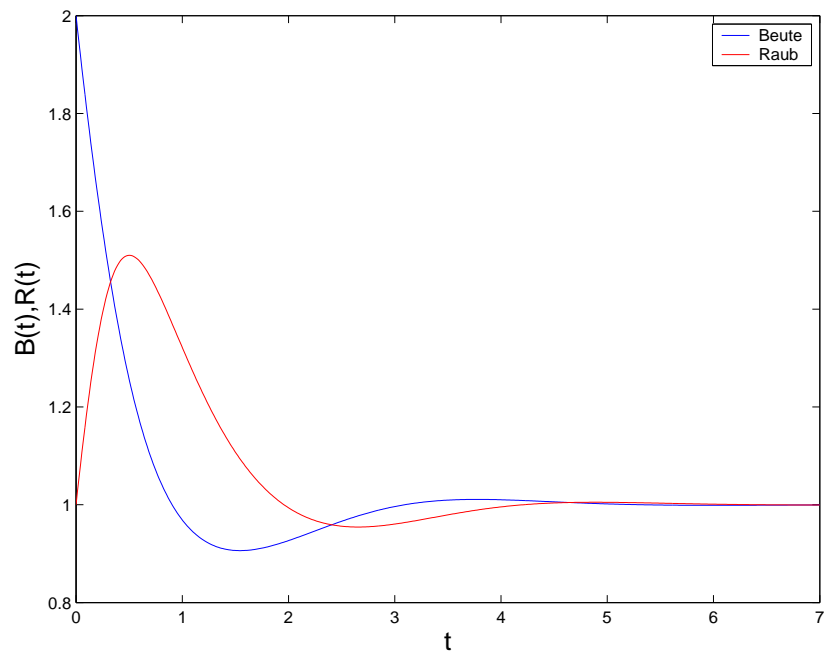
Dann legen wir ein file “runRuKu.m” an, das automatisch einen plot erzeugt

```
RuKuVoLo;
x=[0:h:X];
plot(x,Y(:,1),'blue');
hold on;
plot(x,Y(:,2),'red');
```

Wir starten das Programm mit

```
>> runRuKu;
```

Wir erhalten einen Plot, den wir noch mit Achsenbeschriftungen etc versehen.



## 7. Übung “Differentialgleichungen für Ingenieure”

Ausgabe: 27.05.03

Bearbeitung: 02.06.03-06.06.03

Abgabe: 09.06.03-13.06.03

15. **Explizites Eulerverfahren.** Formulieren Sie das explizite Eulerverfahren für die folgenden AWPe.

Falls es sich um lineare ODEs handelt:

Bestimmen Sie die exakte Lösung und entscheiden Sie, in welchen Fällen das explizite Euler Verfahren eine akzeptable Approximation liefert.

Üa.  $y' = 20x + 1 - 20y, y(0) = 1, x \in [0, 1], N = 5.$

Üb.  $y' = 20x + 1 - 20y, y(0) = 1, x \in [0, 1], N = 20.$

Üc.  $y'' = -\sin(y), y(0) = 1, y'(0) = 1, x \in [0, 2], N = 30.$

Ha.  $y' = -20y, y(0) = 1, x \in [0, 1], N = 5.$

**5 Punkte**

Hb.  $y' = -20y, y(0) = 1, x \in [0, 1], N = 20.$

**4 Punkte**

Hc.  $\ddot{u} + \dot{u}|\dot{u}| + u = 1, u(0) = 0, \dot{u}(0) = 1, t \in [0, 3], N = 100.$

**3 Punkte**

16. **Implizites Eulerverfahren.** Formulieren Sie das implizite Eulerverfahren für die folgenden AWPe für lineare ODEs. Stellen Sie die Rekursion in expliziter Weise dar.

Ü.  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y_1 + 4y_2 \\ 2y_1 - y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$   
 $x \in [0, 3], N = 99.$

H.  $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$   
 $x \in [0, 3], N = 100.$

**3 Punkte**

17. **Runge Kutta Verfahren.** Formulieren Sie das Runge Kutta Verfahren für die folgenden AWPe. Stellen Sie  $y^{k+1}$  in der Form

$$ay^k + bk + c + d \cdot (\kappa(k, 1) + \kappa(k, 2) + \kappa(k, 3))$$

dar.

Ü.  $y' = 20x + 1 - 20y, y(0) = 1, x \in [0, 1], N = 5.$

H.  $y' = -20y, y(0) = 1, x \in [0, 1], N = 99.$

**5 Punkte**

## 6 Die Laplace Transformation

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit einem Verfahren, das es uns erlaubt AWPe linearer ODE Systeme der Ordnung 1 mit konstanten Koeffizienten und speziellen Inhomogenitäten zu lösen.

Dieses Verfahren ist die

Laplace Transformation.

Die Laplace Transformation wird auch dazu verwendet, AWPe für skalare, lineare ODEs mit konstanten Koeffizienten und speziellen Inhomogenitäten zu lösen.

Konventioneller Weise betrachten wir ausschliesslich zeitabhängige Probleme.

Die Lösungen, die mit der Laplace Transformation gefunden werden, unterscheiden sich in mehrfacher Hinsicht von den Lösungen, die wir bisher betrachteten (siehe folgende Liste). Dies rechtfertigt, die Lösungen, die mit der Laplace Transformation gefunden werden,

“Laplace Lösungen”

zu nennen.

- L.0 Jede Laplace Lösung ist eine reelle Funktion, deren Definitionsbereich  $=\mathbb{R}$  ist.
- L.1 Nur für AWPe für ODEs kann es eine Laplace Lösung geben.
- L.2 Der Anfangswert einer Laplace Lösung wird immer bei  $t = 0$  vorgeschrieben.
- L.3 Die Laplace Lösung ist für negative Werte von  $t$  gleich Null.
- L.4 Es gibt Laplace Lösungen für AWPe, die gar keine Lösung im Sinne der bisherigen Definitionen (“klassische Lösungen”) haben.
- L.5 Nicht jedes AWP besitzt eine Laplace Lösung.

Auf jeden Fall gibt es AWPe für ODEs, die sowohl eine klassische als auch Laplace Lösungen besitzen.

**Beispiele.** a)  $\ddot{u} + u = \cos t$ ,  $u(0) = 4$ ,  $\dot{u}(0) = 1$ .

b) Das ODE System

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 1 + \sin t \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In diesen Fällen stimmen klassische und Laplace Lösung für  $t \geq 0$  überein.

Die betrachteten Inhomogenitäten sind von sehr spezieller Gestalt, nämlich (Summen von)

“elementar L-invertierbaren Inhomogenitäten”.

**Bemerkung.** Hier bezieht sich “L” natürlich auf “Laplace”.

Wir wollen die elementar L-invertierbaren Inhomogenitäten im Detail beschreiben.

Dabei handelt es sich einerseits um Funktionen, andererseits um

Dirac’s Delta.

## 6.1 Elementar L-invertierbare Funktionen

**Die Heaviside Funktion** ist die Funktion

$$H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad H(t) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 < t \\ 0 & , \quad t \leq 0 \end{cases} .$$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist eine

elementar L-invertierbare Funktion,

wenn es eine ansatzfähige Inhomogenität  $g$  gibt mit

$$f(t) = g(t), \quad t \geq 0,$$

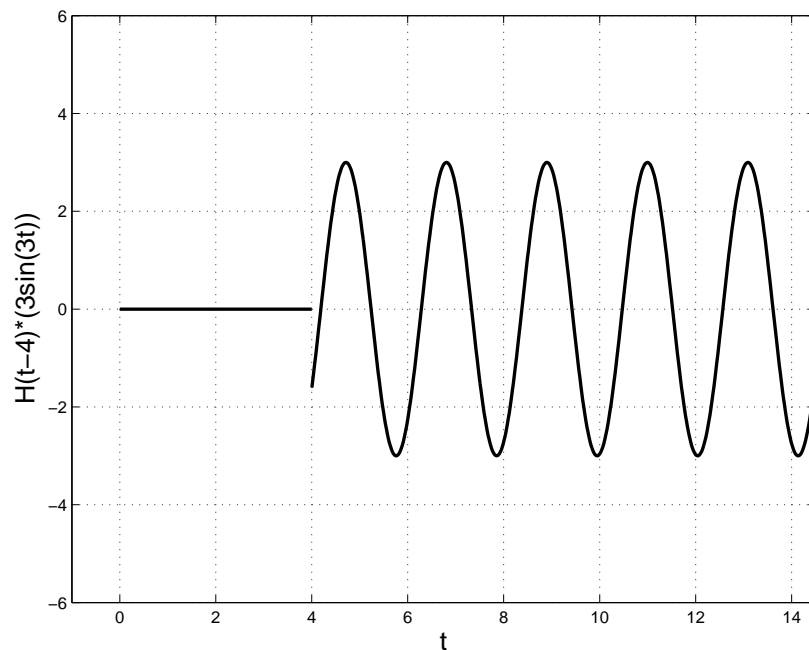
oder wenn es ein  $a \geq 0$  und eine ansatzfähige Inhomogenität  $g$  gibt, so dass

$$f(t) = H(t - a) \cdot g(t), \quad t \in \mathbb{R} .$$

$a$  ist die “Verschiebungskonstante von  $f$ ”.

**Bemerkung.** Jede elementar L-invertierbare Funktion ist=0 für  $t < 0$ .

**Beispiel.**  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(t) = H(t - 4) \cdot (3 \sin(3t))$  sieht folgender Massen aus.



Diese Funktion hat eine Sprungstelle der Höhe  $\sin(4 - \pi)$  an der Stelle  $t = 4$ .

Also besitzt keine skalare, lineare ODE mit konstanten Koeffizienten, deren Inhomogenität gleich  $f$  ist eine klassische Lösung.

## 6.2 Dirac's Delta

Zunächst benötigen wir den Begriff der "Faltung" von Funktionen.

Die Faltung ist am schnellsten mit Hilfe des Lebesgueschen Integralbegriffs zu erklären.

Dieser Integralbegriff steht uns im Rahmen der aktuellen Lehrpläne der Ingenieursausbildung nicht zur Verfügung.

Wir behelfen uns damit, dass wir uns mit

Funktionen, die bis auf endlich viele Sprungstellen stetig sind zufrieden geben.

**Beispiel.** Jede Summe von elementar L-invertierbaren Funktionen ist eine Funktion, die bis auf endlich viele Sprungstellen stetig ist.

Ausserdem benötigen wir

Ist  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , so ist der **Positivteil** von  $g$  die nichtnegative Funktion

$$g^+ : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[, \quad g^+(t) = \max\{0, g(t)\},$$

und der **Negativteil** von  $g$  ist die nichtnegative Funktion

$$g^- : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[, \quad g^-(t) = \max\{0, -g(t)\}.$$

**Bemerkung.** a) Auch der Negativteil  $g^-$  von  $g$  ist eine nichtnegative Funktion, dh  $g^-(t) \geq 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .

b) Es gilt

$$g = g^+ - g^-, \quad |g| = g^+ + g^-.$$

Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, die bis auf endlich viele Sprünge stetig ist, so heisst  $f$

integrierbar,

wenn gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^+(t) dt < +\infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f^-(t) dt < +\infty.$$

Damit können wir die Faltung definieren.

Sind  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen, die bis auf endlich viele Sprünge stetig sind und ist ausserdem

$f$  beschränkt und  $g$  integrierbar

oder

$f$  integrierbar und  $g$  beschränkt,

so ist für jedes  $s \in \mathbb{R}$  die Funktion

$$t \mapsto f(s-t) \cdot g(t)$$

bis auf endlich viele Sprünge stetig und integrierbar und die stetige Funktion

$$f \star g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f \star g)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s-t) \cdot g(t) dt$$

ist die

Faltung von  $f$  und  $g$ .

Im Speziellen wollen wir nun die Faltung einer stetigen, beschränkten Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit einer Folge “nadelartiger” Funktionen

$$H_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad H_n(t) = \begin{cases} n/2 & , \quad |t| < 1/n \\ 0 & , \quad |t| \geq 1/n \end{cases}$$

betrachten. Für  $n \in \mathbb{N}^+$  und  $s \in \mathbb{R}$  gilt mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung für stetige Funktionen,

$$\begin{aligned} (H_n \star f)(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(s-t) \cdot f(t) dt = \frac{n}{2} \int_{s-(1/n)}^{s+(1/n)} f(t) dt \\ &= \frac{n}{2} \cdot \left( \frac{2}{n} f(\xi(s, n)) \right) = f(\xi(s, n)), \end{aligned}$$

wobei

$$s - \frac{1}{n} \leq \xi(s, n) \leq s + \frac{1}{n}, \quad s \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^+.$$

Uns interessiert im Speziellen der Grenzübergang  $n \uparrow +\infty$ . Zunächst stellen wir fest

$$\lim_{n \uparrow +\infty} \xi(s, n) = s, \quad s \in \mathbb{R},$$

demnach wegen der Stetigkeit von  $f$ ,

$$\lim_{n \uparrow +\infty} f(\xi(s, n)) = f\left(\lim_{n \uparrow +\infty} \xi(s, n)\right) = f(s),$$

und wir erhalten folgerichtig

$$\lim_{n \uparrow +\infty} (H_n \star f)(s) = f(s), \quad s \in \mathbb{R},$$

also

$$\lim_{n \uparrow +\infty} (H_n \star f) = f.$$

Dieses Resultat würden wir lieber in der Form

$$\text{“} \lim_{n \uparrow +\infty} (H_n \star f) = (???) \star f \text{“,} \quad \text{“}(???) = \lim_{n \uparrow +\infty} H_n \text{“}$$

schreiben. Der kanonische Kandidat für “(???)” wäre

$$(???) (s) = \lim_{n \uparrow +\infty} H_n(s) = \begin{cases} +\infty & , \quad s = 0 \\ 0 & , \quad s \neq 0 \end{cases},$$

was allerdings keine Funktion von  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$  ist.

Also muss “etwas Anderes” her. Dieses “Andere” ist Dirac’s Delta “ $\delta$ ”:

$$\lim_{n \uparrow +\infty} (H_n \star f) = \delta \star f = f,$$

also für  $s \in \mathbb{R}$ ,

$$\lim_{n \uparrow +\infty} (H_n \star f)(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-s) \cdot f(t) dt = f(s).$$

In Worten: Integration einer stetigen, beschränkten Funktion  $f$  multipliziert mit  $\delta(\cdot - s)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , ergibt  $f(s)$ , im Speziellen für  $s = 0$ ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot f(t) dt = f(0),$$

zB für  $f = 1$ ,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1,$$

aber auch

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - s) dt = 1, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Die am häufigsten verwendete Interpretation von Dirac's Delta in den Anwendungen wird aus der Herleitung ersichtlich.

$\delta$  repräsentiert einen (natürlich idealisierten) auf einen einzigen Zeitpunkt konzentrierten äusseren Kraftstoss, der dem System den Gesamtimpuls 1 zuführt.

Diese Interpretation zeigt einerseits die grosse Bedeutung, die Dirac's Delta in Anwendungen besitzt und rechtfertigt andererseits, ODEs zu lösen, deren Inhomogenität durch " $\delta(t - a)$ " - Kraftstoss zur Zeit  $a$  - gegeben ist.

## 6.3 Die Laplace Transformation

Bei der Laplace Transformation handelt es sich um einen

linearen Operator,

der einer Funktion eine andere Funktion zuordnet, vgl die Differentiation, bei der einer differenzierbaren Funktion deren Ableitungsfunktion zugeordnet wird.

Wie jeder (lineare) Operator hat auch die Laplace Transformation einen

Definitionsbereich  $\text{dom}\mathcal{L}$

und einen

Wertebereich  $\text{ran}\mathcal{L}$ .

Wir geben hier nicht den grösstmöglichen Definitionsbereich an - dieses Unterfangen und würde den Rahmen dieser VL sprengen - sondern wir beschränken uns auf jene Funktionen, die uns bei der Lösung von linearen ODEs mit konstanten Koeffizienten und elementar L-invertierbaren Inhomogenitäten begegnen.

Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine elementar L-invertierbare Funktion, so ist  $f \in \text{dom}\mathcal{L}$ .

Ausserdem gilt

$$\delta(\cdot - a) \in \text{dom}\mathcal{L}, \quad a \in [0, +\infty[$$

und

$\text{dom}\mathcal{L}$  ist ein Vektorraum, dh sind

$$f, g \in \text{dom}\mathcal{L},$$

so gilt

$$f + g \in \text{dom}\mathcal{L}, \quad \mu f \in \text{dom}\mathcal{L}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

**Bemerkung.** Wir können  $\text{dom}\mathcal{L}$  praktisch explizit angeben.  $Y \in \text{dom}\mathcal{L}$  genau dann, wenn es endlich viele nichtnegative Zahlen  $a_1, \dots, a_r$  und  $t_1, \dots, t_s$ , endlich viele ansatzfähige Inhomogenitäten  $g_1, \dots, g_r$  und  $G_1, \dots, G_p$  und endlich viele reelle Zahlen  $\mu_1, \dots, \mu_s$  gibt, so dass

$$\begin{aligned} Y(t) = & G_1(t) + \dots + G_p(t) \\ & + H(t - a_1) \cdot g_1(t) + \dots + H(t - a_r) \cdot g_r(t) \\ & + \mu_1 \cdot \delta(t - t_1) + \dots + \mu_s \cdot \delta(t - t_s), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

**Beispiele.** a) Jede Lösung eines AWP's einer skalaren, linearen ODE mit konstanten Koeffizienten und ansatzfähiger Inhomogenität, die für negative Werte von  $t$  gleich 0 gesetzt wird, ist in  $\text{dom}\mathcal{L}$ .

b) Ohne Beweis gilt folgendes. Wir betrachten  $\vec{u} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , wobei  $\vec{u}$  die Lösung eines AWP's eines linearen ODE Systems mit konstanten Koeffizienten

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \mathbf{A} \cdot \vec{u} + \vec{f}(t), \quad \vec{u}(0) = \vec{u}_0,$$

ist, wobei jede Komponente von  $\vec{f}$  eine ansatzfähige Inhomogenität ist. Dann ist jede Komponente  $u_1, \dots, u_n$  von  $\vec{u}$ , sofern diese=0 für negative Werte von  $t$  gesetzt wird, in  $\text{dom}\mathcal{L}$ .

c) Ist  $p$  ein Polynom, so ist

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \leq 0 \\ p(t) & , \quad t > 0 \end{cases}$$

in  $\text{dom}\mathcal{L}$ .

d) Die Heaviside Funktion  $H$  ist in  $\text{dom}\mathcal{L}$ .

e) Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \leq 0 \\ (t - t^2) \cdot e^{-t} \cdot (4 \cos(2t) - 2 \sin(t)) & , \quad t > 0 \end{cases}$$

ist in  $\text{dom}\mathcal{L}$ .

f) Die Funktion  $Y$ ,

$$Y(t) = \delta(t) - 2\delta(t - 1) + 4\delta(t - 2)$$

ist in  $\text{dom}\mathcal{L}$ .

g) Die Funktion  $Y$ ,

$$Y(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \leq 0 \\ \sin t + \delta(t-2) + H(t-3)e^t & , \quad t > 0 \end{cases}$$

ist in  $\text{dom}\mathcal{L}$ .

**Grundformel Laplace Transformation** Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine elementar L-invertierbare Funktion, so gilt

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot f(t) dt,$$

und zwar für all jene  $s \in [0, +\infty[$ , für die der Integrand integrierbar ist.

Ausserdem gilt für  $a \in [0, +\infty[$ ,

$$\mathcal{L}[\delta(t-a)](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot \delta(t-a) dt = e^{-sa},$$

im Speziellen

$$\mathcal{L}[\delta(t)](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot \delta(t) dt = e^{-s \cdot 0} = 1.$$

Wir wollen einige Rechenregeln herleiten. Dabei setzen wir stets voraus, dass  $s$  in der Grundformel hinreichend gross gewählt ist.  $f, g$  sind elementar L-invertierbare Funktionen und  $\mu$  ist eine reelle Zahl.

**1.** Die Laplace Transformation ist linear, da

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[(f+g)(t)](s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot (f(t) + g(t)) dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot f(t) dt + \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot g(t) dt = \mathcal{L}[f(t)](s) + \mathcal{L}[g(t)](s), \end{aligned}$$

und

$$\mathcal{L}[\mu f(t)](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot (\mu f(t)) dt = \mu \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot f(t) dt = \mu \mathcal{L}[f(t)](s).$$

**2.** Ist  $\mathcal{L}[f(t)](s)$  differenzierbar (dies gilt, wie wir bald sehen werden, für alle elementar L-invertierbaren Inhomogenitäten), so gilt der Multiplika-

tionsatz

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[t f(t)](s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot (t f(t)) dt = \int_0^{+\infty} t e^{-st} \cdot f(t) dt \\ &= - \int_0^{+\infty} \left( \frac{\partial e^{-st}}{\partial s} \right) \cdot f(t) dt = - \frac{d}{ds} \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot f(t) dt \\ &= - \frac{d}{ds} \mathcal{L}[f(t)](s).\end{aligned}$$

3. Es gilt der Dämpfungssatz

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^{\mu t} f(t)](s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot e^{\mu t} f(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-(s-\mu)t} \cdot f(t) dt \\ &= \mathcal{L}[f(t)](s - \mu).\end{aligned}$$

4. Es gilt für  $a \in [0, +\infty[$  der Verschiebungssatz

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[H(t-a)f(t-a)](s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot (H(t-a)f(t-a)) dt = \int_a^{+\infty} e^{-st} \cdot f(t-a) dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-s(u+a)} \cdot f(u) du = \int_0^{+\infty} e^{-s(t+a)} \cdot f(t) dt \\ &= e^{-sa} \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot f(t) dt = e^{-sa} \mathcal{L}[f(t)](s).\end{aligned}$$

Wir fassen diese und weitere Resultate in einer Tabelle zusammen. In dieser Tabelle gilt stets  $f, g \in \text{dom}\mathcal{L}$ .

Name	Formel & Parameter
Linearität I	$\mathcal{L}[f + g] = \mathcal{L}[f] + \mathcal{L}[g]$
Linearität II	$\mathcal{L}[\mu f] = \mu \mathcal{L}[f]$ $\mu \in \mathbb{R}$
Multiplikationssatz	$\mathcal{L}[tf(t)](s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f](s)$
Dämpfungssatz	$\mathcal{L}[e^{\mu t} f](s) = \mathcal{L}[f](s - \mu)$ $\mu \in \mathbb{R}$
Verschiebungssatz	$\mathcal{L}[H(t - a)f(t - a)](s) = e^{-sa}\mathcal{L}[f](s)$ $a \in [0, +\infty[$

Als nächstes gehen wir daran, die Laplace Transformation einiger elementar L-invertierbarer Inhomogenitäten anzugeben.

Einer Konvention folgend verzichten wir darauf, den Wertebereich von  $t$  - also  $t \in ]0, +\infty[$  - anzugeben. Ausserdem verzichten wir darauf, jene Werte von  $s$  anzugeben, für die die Grundformel anwendbar ist. Statt dessen gehen wir jetzt und im Folgenden stets davon aus, dass die Laplace Transformierte für all jene  $s$  definiert ist, für die die angegebene Formel sinnvoll ist.

---

---


$$\mathcal{L}[\delta](s) = 1$$


---

$$\mathcal{L}[\delta(t-a)](s) = e^{-sa}, \quad a \in [0, +\infty[$$


---

$$\mathcal{L}[1](s) = \frac{1}{s}$$


---

$$\mathcal{L}[t^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}$$


---

$$\mathcal{L}[e^{\mu t}](s) = \frac{1}{s - \mu}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$


---

$$\mathcal{L}[t^n e^{\mu t}](s) = \frac{n!}{(s - \mu)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}, \mu \in \mathbb{R}$$


---

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)](s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad \omega \in \mathbb{R}$$


---

$$\mathcal{L}[t \cos(\omega t)](s) = \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}, \quad \omega \in \mathbb{R}$$


---

$$\mathcal{L}[t^2 \cos(\omega t)](s) = \frac{2s \cdot (s^2 - 3\omega^2)}{(s^2 + \omega^2)^3}, \quad \omega \in \mathbb{R}$$


---

$$\mathcal{L}[t^{n+1} \cos(\omega t)](s) = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[t^n \cos(\omega t)](s), \quad \omega \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$


---

$$\mathcal{L}[\sin(\omega t)](s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}, \quad \omega \in \mathbb{R}$$


---

$$\mathcal{L}[t \sin(\omega t)](s) = \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}, \quad \omega \in \mathbb{R}$$


---

$$\mathcal{L}[t^2 \sin(\omega t)](s) = \frac{2\omega \cdot (3s^2 - \omega^2)}{(s^2 + \omega^2)^3}, \quad \omega \in \mathbb{R}$$


---

$$\mathcal{L}[t^{n+1} \sin(\omega t)](s) = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[t^n \sin(\omega t)](s), \quad \omega \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$


---

---

---



---


$$\mathcal{L}[e^{\mu t} \cos(\omega t)](s) = \frac{s - \mu}{(s - \mu)^2 + \omega^2}, \quad \omega, \mu \in \mathbb{R}$$


---

$$\mathcal{L}[te^{\mu t} \cos(\omega t)](s) = \frac{(s - \mu)^2 - \omega^2}{((s - \mu)^2 + \omega^2)^2}, \quad \omega, \mu \in \mathbb{R}$$


---

$$\mathcal{L}[t^2 e^{\mu t} \cos(\omega t)](s) = \frac{2(s - \mu) \cdot ((s - \mu)^2 - 3\omega^2)}{((s - \mu)^2 + \omega^2)^3}, \quad \omega, \mu \in \mathbb{R}$$


---

$$\mathcal{L}[t^{n+1} e^{\mu t} \cos(\omega t)](s) = \mathcal{L}[t^{n+1} \cos(\omega t)](s - \mu), \quad \omega, \mu \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$$


---

$$\mathcal{L}[e^{\mu t} \sin(\omega t)](s) = \frac{\omega}{(s - \mu)^2 + \omega^2} \quad \omega, \mu \in \mathbb{R}$$


---

$$\mathcal{L}[te^{\mu t} \sin(\omega t)](s) = \frac{2\omega \cdot (s - \mu)}{((s - \mu)^2 + \omega^2)^2}, \quad \omega, \mu \in \mathbb{R}$$


---

$$\mathcal{L}[t^2 e^{\mu t} \sin(\omega t)](s) = \frac{2\omega \cdot (3(s - \mu)^2 - \omega^2)}{((s - \mu)^2 + \omega^2)^3}, \quad \omega, \mu \in \mathbb{R}$$


---

$$\mathcal{L}[t^{n+1} e^{\mu t} \sin(\omega t)](s) = \mathcal{L}[t^{n+1} \sin(\omega t)](s - \mu), \quad \omega, \mu \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$


---



---

$$\boxed{\mu, \omega \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, a \in [0, +\infty[}$$

---



---


$$\mathcal{L}[H(t-a)](s) = \frac{e^{-sa}}{s}$$


---

$$\mathcal{L}[H(t-a)(t-a)^n](s) = \frac{n! e^{-sa}}{s^{n+1}}$$


---

$$\mathcal{L}[H(t-a) e^{\mu(t-a)}](s) = \frac{e^{-sa}}{s - \mu}$$


---

$$\mathcal{L}[H(t-a) (t-a)^n e^{\mu(t-a)}](s) = \frac{n! e^{-sa}}{(s - \mu)^{n+1}}$$


---

$$\mathcal{L}[H(t-a) \cos(\omega(t-a))](s) = \frac{s e^{-sa}}{s^2 + \omega^2}$$


---

$$\mathcal{L}[H(t-a) (t-a) \cos(\omega(t-a))](s) = \frac{e^{-sa} (s^2 - \omega^2)}{(s^2 + \omega^2)^2},$$


---

$$\mathcal{L}[H(t-a) (t-a)^2 \cos(\omega(t-a))](s) = \frac{2s e^{-sa} \cdot (s^2 - 3\omega^2)}{(s^2 + \omega^2)^3},$$


---

$$\mathcal{L}[H(t-a) (t-a)^{n+1} \cos(\omega(t-a))](s) = e^{-sa} \mathcal{L}[t^{n+1} \cos(\omega t)](s),$$


---

$$\mathcal{L}[H(t-a) \sin(\omega(t-a))](s) = \frac{\omega e^{-sa}}{s^2 + \omega^2}$$


---

$$\mathcal{L}[H(t-a) (t-a) \sin(\omega(t-a))](s) = \frac{2\omega s e^{-sa}}{(s^2 + \omega^2)^2}$$


---

$$\mathcal{L}[H(t-a) (t-a)^2 \sin(\omega(t-a))](s) = \frac{2\omega e^{-sa} \cdot (3s^2 - \omega^2)}{(s^2 + \omega^2)^3},$$


---

$$\mathcal{L}[H(t-a) (t-a)^{n+1} \sin(\omega(t-a))](s) = e^{-sa} \mathcal{L}[t^{n+1} \sin(\omega t)](s).$$


---



---

$$\boxed{\mu, \omega \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, a \in [0, +\infty[}$$

$$\boxed{\mu, \omega \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, a \in [0, +\infty[}$$

---



---


$$\mathcal{L}[H(t-a) e^{\mu(t-a)} \cos(\omega(t-a))](s) = \frac{e^{-sa} (s-\mu)}{(s-\mu)^2 + \omega^2}$$


---

$$\mathcal{L}[H(t-a) (t-a) e^{\mu(t-a)} \cos(\omega(t-a))](s) = \frac{e^{-sa} ((s-\mu)^2 - \omega^2)}{((s-\mu)^2 + \omega^2)^2}$$


---

$$\mathcal{L}[H(t-a) (t-a)^2 e^{\mu(t-a)} \cos(\omega(t-a))](s) = \frac{2e^{-sa} (s-\mu) \cdot ((s-\mu)^2 - 3\omega^2)}{((s-\mu)^2 + \omega^2)^3}$$


---

$$\mathcal{L}[H(t-a) (t-a)^{n+1} e^{\mu(t-a)} \cos(\omega(t-a))](s) = e^{-sa} \mathcal{L}[t^{n+1} \cos(\omega t)](s-\mu)$$


---

$$\mathcal{L}[H(t-a) e^{\mu(t-a)} \sin(\omega(t-a))](s) = \frac{\omega e^{-sa}}{(s-\mu)^2 + \omega^2}$$


---

$$\mathcal{L}[H(t-a) (t-a) e^{\mu(t-a)} \sin(\omega(t-a))](s) = \frac{2\omega e^{-sa} (s-\mu)}{((s-\mu)^2 + \omega^2)^2}$$


---

$$\mathcal{L}[H(t-a) (t-a)^2 e^{\mu(t-a)} \sin(\omega(t-a))](s) = \frac{2\omega e^{-sa} (3(s-\mu)^2 - \omega^2)}{((s-\mu)^2 + \omega^2)^3}$$


---

$$\mathcal{L}[H(t-a) (t-a)^{n+1} e^{\mu(t-a)} \sin(\omega(t-a))](s) = e^{-sa} \mathcal{L}[t^{n+1} \sin(\omega t)](s-\mu).$$


---



---

$$\boxed{\mu, \omega \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, a \in [0, +\infty[}$$

Wir wollen einige der noch nicht bewiesenen Identitäten nachrechnen.

$f(t) = 1$ . Wir erhalten

$$\mathcal{L}[1](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot 1 dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{s}.$$

$f(t) = t^n$ . Den Fall  $n = 0$  haben wir bereits behandelt, wir setzen mit vollständiger Induktion fort.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^{n+1}](s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot t^{n+1} dt = \left| \begin{array}{l} u'(t) = e^{-st} \quad , \quad u(t) = -\frac{1}{s} e^{-st} \\ v(t) = t^{n+1} \quad , \quad v'(t) = (n+1) t^n \end{array} \right| \\ &= -\frac{t^{n+1} e^{-st}}{s} \Big|_{t=0}^{t=+\infty} + \frac{n+1}{s} \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot t^n dt \\ &= 0 + \frac{n+1}{s} \mathcal{L}[t^n](s) = \frac{n+1}{s} \frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{s^{n+2}}. \end{aligned}$$

$f(t) = t^n e^{\mu t}$ . Mit dem Dämpfungssatz ergibt sich für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathcal{L}[t^n e^{\mu t}](s) = \mathcal{L}[t^n](s - \mu) = \frac{n!}{(s - \mu)^{n+1}}.$$

$f(t) = \cos(\omega t)$  und  $f(t) = \sin(\omega t)$  werden in den Übungen behandelt.

$f(t) = t \cos(\omega t)$ . Mit dem Multiplikationssatz gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t \cos(\omega t)] &= -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[\cos(\omega t)](s) \\ &= -\frac{d}{ds} \frac{s}{s^2 + \omega^2} = -\frac{s^2 + \omega^2 - s \cdot (2s)}{(s^2 + \omega^2)^2} = \frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}. \end{aligned}$$

$f(t) = t \sin(\omega t)$ . Mit dem Multiplikationssatz gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t \sin(\omega t)] &= -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[\sin(\omega t)](s) \\ &= -\frac{d}{ds} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = -\frac{-\omega \cdot (2s)}{(s^2 + \omega^2)^2} = \frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}. \end{aligned}$$

$f(t) = t^n \cos(\omega t)$  und  $f(t) = t^n \sin(\omega t)$  mit  $n \geq 2$  werden in den Übungen behandelt.

Die Resultate der zweiten Tabelle folgen aus den Resultaten der ersten Tabelle durch Anwendung des Dämpfungssatzes.

Die Resultate der dritten und vierten Tabelle folgen aus den Resultaten der ersten und zweiten Tabelle durch Anwendung des Verschiebungssatzes.

## 8. Übung “Differentialgleichungen für Ingenieure”

Ausgabe: 03.06.03

Bearbeitung: 09.06.03-13.06.03

Abgabe: 16.06.03-20.06.03

### 18. Elementare Rechnungen zur Laplace Transformation.

Berechnen Sie unter Verwendung der angegebenen Hilfsresultate die Laplace Transformierte von  $f$ , wobei  $f(t)$  für  $t > 0$  gegeben ist und durchwegs  $f(t) = 0$  für  $t \leq 0$  gilt.

Üa.  $f(t) = \cos(\omega t)$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ .

Üb.  $f(t) = t^2 \cos(\omega t)$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ .

(Hinweis: Laplace Transformierte von  $f(t) = t \cos(\omega t)$  verwenden.)

Ha.  $f(t) = \sin(\omega t)$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ .

(Hinweis: Laplace Transformierte von  $f(t) = \cos(\omega t)$  verwenden.)

**3 Punkte**

Hb.  $f(t) = t^2 \sin(\omega t)$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ .

(Hinweis: Laplace Transformierte von  $f(t) = t \sin(\omega t)$  verwenden.)

**3 Punkte**

### 19. Laplace Transformationen mit Hilfe der Tabellen.

Ermitteln Sie unter zu Hilfe Nahme der Transformationstabellen der Vorlesung die Laplace Transformierte von  $f$ , wobei  $f(t)$  für  $t > 0$  gegeben ist und durchwegs  $f(t) = 0$  für  $t \leq 0$  gilt.

Üa.  $f(t) = 2 - 3H(t - 1) + 4\delta(t - 2)$ .

Üb.  $f(t) = (1 - 4t) e^{-t}$ .

Üc.  $f(t) = H(t - 1) t^2$ .

Üd.  $f(t) = H(t - 2) t e^{-t}$ .

Üe.  $f(t) = H(t - 3) \cos(2t)$ .

Üf.  $f(t) = H(t - 1) t e^{2t} \sin(3t)$ .

Ha.  $f(t) = 1 + H(t - 2) + 3\delta(t - 4)$ .

**1 Punkt**

Hb.  $f(t) = (1 - 4t) e^{2t}$ .

**1 Punkt**

Hc.  $f(t) = H(t - 2) t^2$ .

**2 Punkte**

Hd.  $f(t) = H(t - 1) t^2 e^t$ .

**2 Punkte**

He.  $f(t) = H(t - 2) \sin t$ .

**2 Punkte**

Hf.  $f(t) = H(t - 1) t e^t \cos t$ .

**3 Punkte**

## 6.4 Verallgemeinerte Ableitungen

Es besteht in Anwendungen oft Interesse am Lösen von linearen ODEs mit Inhomogenitäten, die durch Sprungfunktionen (Einschaltvorgänge) oder Dirac's Delta gegeben sind.

In diesen Fällen versagt der klassische Lösungsbegriff, da es keine differenzierbare Funktion gibt, deren Ableitung eine Sprungfunktion oder Dirac's Delta ist.

Es entsteht die Notwendigkeit, den Ableitungsbegriff zu erweitern.

Im Rahmen dieser Vorlesung können wir dieses Thema nur streifen und im Rahmen der Laplace Transformation behandeln.

Zur Verschönerung des Designs der Darstellung bezeichnen wir Ableitungen ausnahmsweise mit Strichen.

Wir definieren

**Verallgemeinerte Ableitung** Ist  $f \in \text{dom}\mathcal{L}$  eine reelle Funktion (insbesondere nicht Dirac's Delta), so gilt

$$s \mathcal{L}[f](s) - f(0) \in \text{ran}\mathcal{L},$$

und es gibt genau ein  $g \in \text{dom}\mathcal{L}$  mit

$$\mathcal{L}[g](s) = s \mathcal{L}[f](s) - f(0).$$

Diese Funktion  $g$  ist die verallgemeinerte Ableitung von  $f$  und wird im Folgenden mit  $f'$  bezeichnet:

$$\mathcal{L}[f'](s) = s \mathcal{L}[f](s) - f(0).$$

**Bemerkung.** Ist  $f \in \text{dom}\mathcal{L}$  auf  $[0, +\infty[$  differenzierbar, so ist auch  $f' \in \text{dom}\mathcal{L}$  (für  $t < 0$  setzen wir konventioneller Weise  $f'(t) = 0$ ) und wir berechnen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'](s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot f'(t) dt \\ &= f(t) e^{-st} \Big|_{t=0}^{t=+\infty} + s \cdot \int_0^{+\infty} e^{-st} \cdot f(t) dt \\ &= -f(0) + s \mathcal{L}[f](s) = s \mathcal{L}[f](s) - f(0), \end{aligned}$$

dh die definierende Eigenschaft der verallgemeinerten Ableitung ist für differenzierbare Funktionen durch die Ableitungsfunktion erfüllt. Damit handelt es sich bei der obigen Begriffsbildung in der Tat um eine Verallgemeinerung des Ableitungsbegriffs.

**Beispiel.** Die Heaviside Funktion  $H(t-a)$  ist für  $a \in [0, +\infty[$  sicher nicht auf  $[0, +\infty[$  differenzierbar. Was ist die verallgemeinerte Ableitung von

$H(\cdot - a)$ ? Wir stellen fest

$$s\mathcal{L}[H(t-a)](s) - H(0-a) = s \cdot \frac{e^{-sa}}{s} - 0 = e^{-sa} = \mathcal{L}[\delta(t-a)](s),$$

also ist  $\delta(\cdot - a)$  die verallgemeinerte Ableitung von  $H(\cdot - a)$ . Prägnanter geschrieben:

$$H'(t-a) = \delta(t-a).$$

**Beispiel.** Die Funktion  $t \mapsto H(t-1) \cdot (t-1)$  ist in  $\text{dom}\mathcal{L}$  und auf  $[0, +\infty[$  wegen des Knicks an  $t=1$  nicht differenzierbar. Immerhin ist diese Funktion stetig. Wir berechnen

$$\begin{aligned} s\mathcal{L}[H(t-1) \cdot (t-1)](s) - H(0-1)(0-1) &= s e^{-s} \mathcal{L}[t](s) - 0 = \frac{s e^{-s}}{s^2} = \frac{e^{-s}}{s} \\ &= \mathcal{L}[H(t-1)](s), \end{aligned}$$

also

$$(H(t-1) \cdot (t-1))' = H(t-1).$$

**Bemerkung.** Wir haben  $\mathcal{L}[1](s) = 1$  und  $\mathcal{L}[H](s) = 1$ , jedoch  $1' = 0$  und  $H' = \delta$ . Konsequenter Weise können Funktionen mit gleicher Laplace Transformierter unterschiedliche verallgemeinerte Ableitungen haben.

Höhere Ableitungen werden per Rekursion definiert: Ist die verallgemeinerte Ableitung  $f'$  von  $f \in \text{dom}\mathcal{L}$  (dh  $f$  muss eine reelle Funktion sein) wieder eine reelle Funktion, so ist deren Ableitung die zweite verallgemeinerte Ableitung von  $f$ . Wir erhalten die definierende Eigenschaft dieser verallgemeinerten zweiten Ableitung durch Einsetzen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f''](s) &= s\mathcal{L}[f'](s) - f'(0) \\ &= s \cdot (s\mathcal{L}[f](s) - f(0)) - f'(0) = s^2\mathcal{L}[f](s) - (sf(0) + f'(0)). \end{aligned}$$

**Höhere verallgemeinerte Ableitungen.** Ist  $f \in \text{dom}\mathcal{L}$  eine reelle Funktion und sind die verallgemeinerten Ableitungen  $f', \dots, f^{(k-1)}$  von  $f$  ebenfalls reelle Funktionen, so sind  $f', \dots, f^{(k-1)} \in \text{dom}\mathcal{L}$  und es gibt genau ein  $g \in \text{dom}\mathcal{L}$  mit

$$\mathcal{L}[g](s) = s^k \mathcal{L}[f](s) - (s^{k-1} f(0) + s^{(k-2)} f'(0) + \dots + f^{(k-1)}(0)).$$

Diese Funktion  $g$  ist die verallgemeinerte  $k$ te Ableitung von  $f$  und wird im Folgenden mit  $f^{(k)}$  bezeichnet:

$$\mathcal{L}[f^{(k)}](s) = s^k \mathcal{L}[f](s) - (s^{k-1} f(0) + s^{(k-2)} f'(0) + \dots + f^{(k-1)}(0))$$

## 6.5 Die Inverse Laplace-Transformation auf $\text{ran } \mathcal{L}$

Als letzten, vorbereitenden Schritt auf dem Weg zum Einsatz der Laplace Transformation als Lösungsmethode für Systeme linearer ODE Systeme mit konstanten Koeffizienten und speziellen Inhomogenitäten betrachten wir die Umkehrung der Laplace Transformation auf  $\text{ran } \mathcal{L}$ .

Im Prinzip können wir die Laplace Transformation gar nicht umkehren, da es sich nicht um eine injektive Abbildung handelt.

Damit ist Folgendes gemeint.

Wir wissen bereits

$$\mathcal{L}[1](s) = \mathcal{L}[H](s) = \frac{1}{s},$$

dh sowohl die konstante Funktion 1 (für  $t \geq 0$ , für  $t < 0$  setzen wir diese Funktion=0) als auch die Heaviside Funktion werden auf die Funktion  $\frac{1}{s}$  abgebildet.

Dies bedeutet: Wir wissen nicht, wie die Funktion  $\frac{1}{s}$  durch die Laplace Transformation zu Stande gekommen ist. Als Bild von 1 oder als Bild von  $H$  ?

Das war die schlechte Nachricht.

Die gute Nachricht ist: Die beiden Funktionen 1 und  $H$  unterscheiden sich "sehr wenig" voneinander. Ausser für  $t = 0$  stimmen sie überein.

Vor die Wahl gestellt, welche der beiden Funktionen wir nun als die "inverse Laplace Transformation" von  $\frac{1}{s}$  akzeptieren, wählen wir die konstante Funktion 1, weil diese an der Stelle 0 rechtsseitig stetig ist, dh weil gilt

$$f(0) = f(0+) = \lim_{t \downarrow 0} f(t).$$

Wir bevorzugen die an 0 rechtsstetigen Funktionen, weil wir die inverse Laplace Transformation zum Lösen von ODE Systemen einsetzen und wir von der Lösung erwarten, dass sich diese stetig für  $t \geq 0$  vom Anfangswert entfernt.

**Satz 12.** (Folgerung aus dem allgemeineren Satz von Lerch)

Zu jeder Funktion  $z \in \text{ran } \mathcal{L}$  gibt es genau ein  $f \in \text{dom } \mathcal{L}$  und endlich viele (eventuell auch gar keine) reelle Zahlen  $\mu_1, \dots, \mu_\sigma$  und nichtnegative reelle Zahlen  $t_1, \dots, t_\sigma \in [0, +\infty[$ , so dass gilt:

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,
- $f$  ist an 0 rechtsseitig stetig,
- $\mathcal{L}[f(t) + \mu_1\delta(t - t_1) + \dots + \mu_\sigma\delta(t - t_\sigma)](s) = z(s)$ .

Wir setzen

$$f(t) + \mu_1\delta(t - t_1) + \dots + \mu_\sigma\delta(t - t_\sigma) = \mathcal{L}^{-1}[z(s)](t).$$

$\mathcal{L}^{-1}$  ist linear, dh für alle  $z, z_1 \in \text{ran } \mathcal{L}$  und für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt

$$\mathcal{L}^{-1}[z + z_1] = \mathcal{L}^{-1}[z] + \mathcal{L}^{-1}[z_1], \quad \mathcal{L}^{-1}[\alpha \cdot z] = \alpha \cdot \mathcal{L}^{-1}[z].$$

**Beispiel.** Wir wollen die inverse Laplace Transformierte von

$$\frac{1 + e^{-s}}{s^2 + s}$$

bestimmen. Dies vollbringen wir mit Hilfe einer

### Partialbruchzerlegung

und unter Verwendung der

#### Tabellen zur Laplace Transformation.

**Bemerkung.** Auch hier gilt: Übung macht den Meister.  
Ansatz für Partialbruchzerlegung des Nenners:

$$\frac{1}{s^2 + s} = \frac{1}{s \cdot (s + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 1}.$$

Wir multiplizieren diesen Ansatz mit dem Hauptnenner  $s \cdot (s + 1)$  und wir erhalten

$$1 = A \cdot (s + 1) + B \cdot s.$$

Setzen wir  $s = -1$ , so ergibt sich

$$1 = -B, \quad B = -1$$

und setzen wir  $s = 0$ , so erhalten wir

$$1 = A.$$

Also

$$\frac{1}{s^2 + s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1}.$$

Demnach

$$\frac{1 + e^{-s}}{s^2 + s} = \frac{1 + e^{-s}}{s} - \frac{1 + e^{-s}}{s + 1} = \frac{1}{s} + \frac{e^{-s}}{s} - \frac{1}{s + 1} - \frac{e^{-s}}{s + 1}.$$

Mit Hilfe der Linearität von  $\mathcal{L}^{-1}$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1 + e^{-s}}{s^2 + s} \right] &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s} + \frac{e^{-s}}{s} - \frac{1}{s + 1} - \frac{e^{-s}}{s + 1} \right] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{e^{-s}}{s} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{s + 1} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{e^{-s}}{s + 1} \right] \\ &= 1 + H(t - 1) - e^{-t} - H(t - 1) \cdot e^{-(t-1)}. \end{aligned}$$

## 6.6 Laplace Lösungen einiger ODE Systeme der Ordnung 1

Nun setzen wir die Laplace Transformation ein, um einige lineare ODE Systeme der Ordnung 1 mit konstanten Koeffizienten und elementar L-invertierbaren Inhomogenitäten zu lösen, genauer:

um deren Laplace Lösung zu bestimmen.

Allzu viele Erklärungen vorab sind wenig hilfreich. Also präsentieren wir die Methode an Hand eines Beispiels.

Weitere Beispiele werden in den Übungen behandelt.

**Beispiel.**

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ 1 + \sin t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir schreiben dieses System zeilenweise als

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= u_1 + u_2 + t, & u_1(0) &= 1 \\ \dot{u}_2 &= 2u_1 - u_2 + 1 + \sin t, & u_2(0) &= 1 \end{aligned}$$

Wir wenden auf jede dieser beiden Gleichungen die Laplace Transformation an.

Wir setzen

$$z_1 = \mathcal{L}[u_1], \quad z_2 = \mathcal{L}[u_2].$$

Wir benützen die Linearität der Laplace Transformation und die verallgemeinerte Ableitung.

Wir erhalten damit zB

$$\mathcal{L}[\dot{u}_1](s) = s \mathcal{L}[u_1](s) - u_1(0) = s z_1(s) - 1.$$

Es ergibt sich das lineare Gleichungssystem in  $z_1, z_2$ ,

$$\begin{aligned}sz_1 - 1 &= z_1 + z_2 + \frac{1}{s^2}, \\sz_2 - 1 &= 2z_1 - z_2 + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2 + 1}\end{aligned}$$

Die Anwendung eines Gauss Verfahrens zur Bestimmung von  $z_1, z_2$  ist ein wenig problematisch, da die auftretenden Matrizen die Variable  $s$  als Parameter beinhalten.

Einfacher scheint es, aus der ersten Gleichung  $z_2$  in Abhängigkeit von  $z_1$  und  $s$  auszudrücken,

$$z_2 = (s - 1)z_1 - 1 - \frac{1}{s^2},$$

und dies in die zweite Gleichung einzusetzen,

$$s \cdot (s - 1)z_1 - s - \frac{s}{s^2} - 1 = 2z_1 - (s - 1)z_1 + 1 + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Wir fassen zusammen,

$$(s^2 - s - 2 + s - 1)z_1 = \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s} + 2 + s,$$

also

$$z_1 = \frac{1}{(s^2 + 1)(s^2 - 3)} + \frac{1}{s^2(s^2 - 3)} + \frac{2}{s(s^2 - 3)} + \frac{2}{s^2 - 3} + \frac{s}{s^2 - 3}.$$

Nun können wir daran gehen, durch eine Partialbruchzerlegung die inverse Laplace Transformation vorzubereiten.

Dazu stellen wir fest, dass es sich bei allen Termen von  $z_1, z_2$  um echte Brüche handelt, dh der Grad des Nennerpolynoms ist stets grösser als der Grad des Zählerpolynoms.

Der Hauptnenner von  $z_1, z_2$  ist

$$s^2(s^2 - 3)(s^2 + 1) = s^2(s - \sqrt{3})(s + \sqrt{3})(s^2 + 1).$$

Also gilt

$$z_1 = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{D}{s - \sqrt{3}} + \frac{E}{s + \sqrt{3}} + \frac{Fs + G}{s^2 + 1}.$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner ergibt

$$\begin{aligned}s^2 + (s^2 + 1) + 2s(s^2 + 1) + 2s^2(s^2 + 1) + s^3(s^2 + 1) \\= As(s^2 - 3)(s^2 + 1) + B(s^2 - 3)(s^2 + 1) \\+ Ds^2(s^2 + 1)(s + \sqrt{3}) + Es^2(s^2 + 1)(s - \sqrt{3}) + (Fs + G)s^2(s^2 - 3).\end{aligned}$$

Setzen wir  $s = 0$ , so erhalten wir

$$1 = -3B, \quad B = -\frac{1}{3},$$

mit  $s = \sqrt{3}$  erhalten wir

$$3 + 4 + 8\sqrt{3} + 24 + 12\sqrt{3} = 24\sqrt{3}D,$$

also

$$D = \frac{5}{6} + \frac{31\sqrt{3}}{72}.$$

Mit  $s = -\sqrt{3}$  ergibt sich

$$3 + 4 - 8\sqrt{3} + 24 - 12\sqrt{3} = -24\sqrt{3}E,$$

also

$$E = \frac{5}{6} - \frac{31\sqrt{3}}{72}.$$

Setzen wir  $s = i$ , so ergibt sich

$$-1 = 4(iF + G),$$

also

$$F = 0, \quad G = -\frac{1}{4}.$$

Um  $A$  zu ermitteln, wählen wir  $s = 1$ ,

$$1 + 2 + 4 + 4 + 2 = -4A - 4B + 2D(1 + \sqrt{3}) + 2E(1 - \sqrt{3}) - 2(F + G),$$

also

$$13 = -4A + \frac{4}{3} + \left(\frac{5}{3} + \frac{31\sqrt{3}}{36}\right)(1 + \sqrt{3}) + \left(\frac{5}{3} - \frac{31\sqrt{3}}{36}\right)(1 - \sqrt{3}) + \frac{1}{2},$$

demnach

$$\frac{78}{6} - \frac{8}{6} - \frac{3}{6} = -4A + 2\left(\frac{5}{3} + \frac{31\sqrt{3}}{36}\sqrt{3}\right) = -4A + \frac{10}{3} + \frac{93}{18} = -4A + \frac{10}{3} + \frac{31}{6},$$

so dass

$$\frac{78 - 8 - 3 - 20 - 31}{6} = -4A,$$

und damit

$$A = -\frac{2}{3}.$$

Wir erhalten die kanonische Darstellung von  $z_1$ ,

$$z_1 = -\frac{2}{3} \frac{1}{s} - \frac{1}{3} \frac{1}{s^2} + \left(\frac{5}{6} + \frac{31\sqrt{3}}{72}\right) \frac{1}{s - \sqrt{3}} + \left(\frac{5}{6} - \frac{31\sqrt{3}}{72}\right) \frac{1}{s + \sqrt{3}} - \frac{1}{4} \frac{1}{s^2 + 1}.$$

Durch Rücktransformieren erhalten wir

$$u_1(t) = -\frac{2}{3} - \frac{t}{3} + \left(\frac{5}{6} + \frac{31\sqrt{3}}{72}\right) e^{\sqrt{3}t} + \left(\frac{5}{6} - \frac{31\sqrt{3}}{72}\right) e^{-\sqrt{3}t} - \frac{1}{4} \sin t.$$

Natürlich könnten wir nun  $z_2$  mit einer ähnlichen Partialbruchzerlegung wie  $z_1$  ermitteln.

Wesentlich kürzer ist es allerdings,  $u_2$  mit Hilfe der Differentialgleichung via  $u_1, \dot{u}_1$  und der Inhomogenität darzustellen:

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \dot{u}_1(t) - u_1(t) - t \\ &= -\frac{1}{3} + \sqrt{3} \cdot \left(\frac{5}{6} + \frac{31\sqrt{3}}{72}\right) e^{\sqrt{3}t} - \sqrt{3} \cdot \left(\frac{5}{6} - \frac{31\sqrt{3}}{72}\right) e^{-\sqrt{3}t} - \frac{1}{4} \cos t \\ &\quad + \frac{2}{3} + \frac{t}{3} - \left(\frac{5}{6} + \frac{31\sqrt{3}}{72}\right) e^{\sqrt{3}t} - \left(\frac{5}{6} - \frac{31\sqrt{3}}{72}\right) e^{-\sqrt{3}t} + \frac{1}{4} \sin t - t \\ &= \frac{1}{3} - \frac{2}{3}t + \left(\frac{33 + 29\sqrt{3}}{72}\right) e^{\sqrt{3}t} + \left(\frac{33 - 29\sqrt{3}}{72}\right) e^{-\sqrt{3}t} + \frac{1}{4}(\sin t - \cos t). \end{aligned}$$

Weitere Beispiele dazu in den Übungen.

## 6.7 Laplace Lösungen einiger ODEs höherer Ordnung

Wir führen die Methode an Hand zweier Beispiele vor.

**Beispiel.**  $\ddot{u} + u = \cos t$ ,  $u(0) = 4$ ,  $\dot{u} = 1$ .

Wir setzen

$$z = \mathcal{L}[u].$$

Dann gilt nach den Rechenregeln für die verallgemeinerten Ableitungen,

$$\mathcal{L}[\dot{u}] = sz - u(0) = sz - 4, \quad \mathcal{L}[\ddot{u}] = s^2z - (su(0) + \dot{u}(0)) = s^2z - 4s - 1.$$

Wir Laplace transformieren die ODE,

$$\mathcal{L}[\ddot{u}] + \mathcal{L}[u] = \mathcal{L}[\cos t],$$

also

$$s^2z - 4s - 1 + z = \frac{s}{s^2 + 1}.$$

Wir erhalten

$$(s^2 + 1)z = 4s + 1 + \frac{s}{s^2 + 1},$$

also

$$z = \frac{4s + 1}{s^2 + 1} + \frac{s}{(s^2 + 1)^2}.$$

Erfreulicherweise ist  $z$  bereits fast in der Form, die eine Rücktransformation erlaubt.

$$z = 4 \frac{s}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{1}{2} \frac{2s}{(s^2 + 1)^2}.$$

Wir erhalten damit

$$u(t) = 4 \cos t + \sin t + \frac{1}{2} t \sin t.$$

**Beispiel.**  $\ddot{u} + 2\dot{u} + u = \delta(t) + H(t - 1)$ ,  $u(0) = 0$ ,  $\dot{u} = 0$ .

Wir erhalten mit  $z = \mathcal{L}[u]$ ,

$$s^2 z + 2sz + z = 1 + \frac{e^{-s}}{s},$$

somit

$$z = \frac{1}{s^2 + 2s + 1} + \frac{e^{-s}}{s \cdot (s^2 + 2s + 1)},$$

also

$$z = \frac{1}{(s + 1)^2} + \frac{e^{-s}}{s \cdot (s + 1)^2}.$$

Wir benötigen eine Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{s(s + 1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + 1} + \frac{D}{(s + 1)^2},$$

demnach

$$1 = A(s + 1)^2 + Bs(s + 1) + Ds.$$

Mit  $s = 0$ ,

$$1 = A,$$

mit  $s = -1$ ,

$$1 = -D, \quad D = -1$$

und mit  $s = 1$ ,

$$1 = 4A + 2B + D = 4 + 2B - 1, \quad B = -1.$$

Wir erhalten

$$z = \frac{1}{(s + 1)^2} + \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s + 1} - \frac{e^{-s}}{(s + 1)^2}.$$

Damit können wir  $u(t)$  bestimmen.

$$\begin{aligned} u(t) &= te^{-t} + H(t - 1) - H(t - 1)e^{1-t} - H(t - 1)(t - 1)e^{1-t} \\ &= te^{-t} + H(t - 1) \cdot (1 - te^{1-t}). \end{aligned}$$

Wir sehen:  $\delta(t)$  verhindert, dass  $\dot{u}(0) = 0$  gelten kann. Im Rahmen dieser Vorlesung können wir auf dieses interessante Phänomen nicht weiter eingehen.

## 9. Übung "Differentialgleichungen für Ingenieure"

Ausgabe: 10.06.03

Bearbeitung: 16.06.03-20.06.03

Abgabe: 23.06.03-27.06.03

### 20. Inverse Laplace Transformation.

Bestimmen Sie die inverse Laplace Transformierte folgender Funktionen.

$$\ddot{U}. \quad z(s) = \frac{s-1}{(s^2+1)(s^2-3)}.$$

$$\text{Ha.} \quad z(s) = \frac{s(s-1)}{s^2-3} - 1. \quad \mathbf{5 \text{ Punkte}}$$

$$\text{Hb.} \quad z(s) = \frac{2(s^2-2)}{(s+1)(s^2-5)}. \quad \mathbf{7 \text{ Punkte}}$$

$$\text{Hc.} \quad z(s) = \frac{s^2+2s+3}{s^2(s^2+2)}. \quad \mathbf{7 \text{ Punkte}}$$

### 21. Laplace Lösung linearer Systeme.

Bestimmen Sie die Laplace Lösung folgender ODE Systeme.

$$\ddot{U}. \quad \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 + e^{-t} \\ \sin t \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{H.} \quad \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t-1 \\ t^2-t^3 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \mathbf{13 \text{ Punkte}}$$

### 22. Laplace Lösung von ODEs höherer Ordnung.

Bestimmen Sie die Laplace Lösung folgender AWPes.

$$\ddot{U}. \quad \ddot{u} + 2\dot{u} + 5u = e^{-t} + H(t-1) \cdot t, \quad u(0) = \dot{u}(0) = 1.$$

$$\text{Ha.} \quad \ddot{u} + 2\dot{u} + 2u = e^{-t} + H(t-1) \cdot t, \quad u(0) = \dot{u}(0) = 1.$$

**15 Punkte**

$$\text{Hb.} \quad \ddot{u} + 2\dot{u} + u = e^{-t} + H(t-1) \cdot t, \quad u(0) = \dot{u}(0) = 1. \quad \mathbf{17 \text{ Punkte}}$$

## 7 Randwertprobleme für ODEs

### 7.1 Die Wärmeleitungsgleichung

Wir wollen in grober Form ein Modell für die zeitliche und räumliche Temperaturentwicklung eines physikalischen Objekts entwickeln.

In dem uns zur Bearbeitung verfügbaren Rahmen beschränken wir uns auf sehr einfache Objekte, zum Beispiel auf einen Raum mit Heizung und Kühlung.

Der Einfachheit halber (diese Phrase heisst sehr häufig: in unrealistischer Weise) gehen wir davon aus, dass sowohl Heizung als auch Kühlung von einem "Ofen" im Raum bewerkstelligt werden.

Der erste, wichtige Schritt der Modellierung besteht darin, dem betrachteten Objekt - hier: dem beheizten Raum - zeitliche und räumliche Koordinaten zuzuordnen.

Wir gehen davon aus, dass wir den Raum ab einem Zeitpunkt  $t = 0$  betrachten. Wie lange es sinnvoll ist, die Modellierung aufrecht zu erhalten, lassen wir offen und drücken dieses Nichtwissen durch die Wahl  $[0, +\infty[$  des Zeitintervalls aus.

$$t \in [0, +\infty[.$$

Modifikationen können später erfolgen.

Die Wahl der räumlichen Koordinaten ist durch das betrachtete Objekt - hier: der beheizte Raum - vorgegeben. Die Form dieses Objekts sei durch die Menge  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  gegeben.

Aus Gründen der Differenzierbarkeit (auf offenen Mengen brauchen wir keine Vorschriften zur Differentiation an Randpunkten beachten) gehen wir davon aus, dass  $\Omega$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^3$  ist.

Im konkreten Fall eines beheizbaren Raumes ist es sicher zulässig, sich unter  $\Omega$  einen Quader vorzustellen.

Was interessiert uns eigentlich, wenn wir von der zeitlichen und räumlichen Entwicklung der Temperatur sprechen?

Die Antwort ist einfach: Wir wollen die Temperaturfunktion

$$\theta : [0, +\infty[ \times \Omega \rightarrow [0, +\infty[$$

bestimmen.

**Bemerkung.** Wir messen die Temperatur in Kelvin. Also ist die Temperatur stets nicht negativ.

In expliziter Weise wird dies kaum möglich sein. Also benötigen wir ein Modell, das  $\theta$  beschreibt.

Dieses Modell ist die

**Wärmeleitungsgleichung.**

Die Herleitung beruht auf folgenden Argumenten.

1. Die einzig relevante thermodynamische Grösse ist die thermische Energie

$$T = k_B \theta,$$

wobei  $k_B \approx 1.38 \times 10^{-23}$  Joule pro Kelvin die Boltzmann Konstante ist.

2. Die zeitliche Änderung der in jedem Testvolumen vorhandenen thermischen Energie erfolgt ausschliesslich durch Zu/Abfluss thermischer Energie durch die Oberfläche des Testvolumens und durch Erzeugung/Absorption thermischer Energie durch Quellen/Senken (heizender/kühlender Ofen).
3. Der thermische Energiefluss wird durch eine vektorwertige Funktion

$$\vec{Q} : [0, +\infty[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$$

beschrieben.

4. Es gilt das **Fouriersche Gesetz**

$$\vec{Q} = -\kappa \cdot \nabla T$$

mit einer Materialkonstanten  $\kappa \in \mathbb{R}^+$ .

5. Die Quellen/Senken werden durch eine skalare Funktion

$$f : [0, +\infty[ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

beschrieben: Ist  $\Omega' \subseteq \Omega$  ein offenes Testvolumen und ist  $[t_1, t_2] \subseteq [0, +\infty[$  ein zeitliches Beobachtungsintervall, so ist

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega'} f(s, \vec{x}') d\vec{x}' ds$$

die thermische Energie, die durch die Quellen/Senken im zeitlichen Beobachtungsintervall  $[t_1, t_2]$  im Testvolumen  $\Omega'$  produziert bzw absorbiert wird.

**Bemerkung.** a) Das Fouriersche Gesetz garantiert, dass der thermische Energiefluss von Bereichen hoher Temperatur zu Bereichen tiefer Temperatur gerichtet ist.

b)  $f \geq 0$  bedeutet, dass thermische Energie erzeugt wird (der Ofen heizt) und  $f \leq 0$  bedeutet, dass thermische Energie absorbiert wird (der Ofen kühlt).

Mit diesen fünf Annahmen ergibt sich unter Verwendung einer Bilanzgleichung (in der wir  $\Delta t \downarrow 0$  durchführen) und mit Hilfe des Gauss'schen Integralsatzes die Wärmeleitungsgleichung

$$\dot{T} = \kappa \Delta T + f(t, \vec{x}), \quad (t, \vec{x}) \in ]0, +\infty[ \times \Omega. \quad (93)$$

Hier ist “ $\Delta$ ” der Laplace Operator

$$\Delta T = \partial_{xx}T + \partial_{yy}T + \partial_{zz}T.$$

Die Wärmeleitungsgleichung (93) beschreibt die Temperaturentwicklung in  $\Omega$  und ist ohne Weiteres für sehr viele thermische Systeme verwendbar.

Das ist durchaus positiv.

Andererseits wird in (93) nicht auf spezifische Anwendungen Rücksicht genommen. Im Speziellen bleiben zwei Fragen offen:

- a) Die zeitliche und räumliche Entwicklung der Temperatur hängt sicher von der Anfangstemperatur  $T$  bei  $t = 0$  ab. In einem anfänglich kalten Raum wird die Wirkung des Ofens anders sein als in einem anfänglich gut beheizten Raum. Wie kann diese Anfangsbedingung in das Modell einfließen ?
- b) Wie gut oder wie schlecht der Ofen den Raum heizt bzw. abkühlt hängt nicht nur von den thermischen Eigenschaften der Luft - die in unserem Modell durch  $\kappa$  ausgedrückt werden - ab, sondern auch davon, wie gut der Raum isoliert ist bzw welche Aussentemperaturen herrschen. Wie können diese Randbedingungen in das Modell einfließen ?

Wir beantworten diese Fragen, indem wir die Wärmeleitungsgleichung (93) mit Zusatzbedingungen versehen und damit die PDE in ein

Anfangsrandwertproblem

überführen.

Die Anfangsbedingung lautet

$$T(0, \vec{x}) = T_0(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Omega$$

wobei  $T_0 : \Omega \rightarrow [0, +\infty[$  die zur Zeit  $t = 0$  im Raum vorhandene Temperatur bezeichnet.

Bei der Wahl der Randwerte stehen uns mehrere Möglichkeiten offen. Wir wollen zwei davon besprechen. Wird die Temperatur am Rand von  $\Omega$  (etwa an den Zimmerwänden) vorgegeben, dann erhalten wir

Dirichlet Randbedingungen,

$$T(t, \vec{z}) = T_b(t, \vec{z}), \quad (t, \vec{z}) \in ]0, +\infty[ \times \partial\Omega.$$

Andererseits könnte der Wärmefluss senkrecht durch den Rand von  $\Omega$  vorgeschrieben werden.

**Bemerkung.** Perfekte Isolation=kein Wärmefluss.

Der Wärmefluss ist in unserem Modell gleich  $-\kappa \nabla T$ . Wir erhalten die

Neumann Randbedingungen

$$-\kappa (\nabla T \cdot \nu)(t, \vec{z}) = \gamma_b(t, \vec{z}), \quad (t, \vec{z}) \in ]0, +\infty[ \times \partial\Omega,$$

wobei  $\nu = \nu(\vec{z})$  der nach aussen gerichtete Normalenvektor von  $\Omega$  im Punkt  $\vec{z} \in \partial\Omega$  ist.

## 7.2 Das Randwertproblem und $t \uparrow +\infty$

Bevor wir uns einem Lösungsverfahren für das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned} \dot{T} &= \kappa \Delta T + f(t, \vec{x}), & (t, \vec{x}) &\in ]0, +\infty[ \times \Omega, \\ T(0, \vec{x}) &= T_0(\vec{x}), & \vec{x} &\in \Omega, \\ T(t, \vec{z}) &= T_b(t, \vec{z}), & (t, \vec{z}) &\in [0, +\infty[ \times \partial\Omega \end{aligned} \quad (94)$$

zuwenden, stellen wir uns eine (wie sich herausstellen wird: vorbereitende) andere Frage.

Nehmen wir an, dass sowohl Wärmequellen als auch die

### Dirichlet Randbedingungen

(bei Neumann Randbedingungen liegen die Dinge anders, siehe Übungen) nicht von der Zeit abhängen, als "stationär" sind. Dann liegt konstante Heizung bzw. Kühlung in einer sich nicht ändernden Umgebung vor. Wir erwarten, dass sich in dieser Situation die Temperatur  $T$  einer sich zeitlich nicht mehr ändernden Grenztemperatur annähert.

Für diese Grenztemperatur  $T_\infty$  wollen wir eine Gleichung herleiten. Wir erwarten einerseits

$$\lim_{t \uparrow +\infty} T(t, \vec{x}) = T_\infty(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Omega,$$

andererseits erwarten wir, dass sich die Temperatur im Laufe der Zeit immer weniger ändert,

$$\lim_{t \uparrow +\infty} \dot{T}(t, \vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in \Omega.$$

Setzen wir diese beiden Grenzwerte ohne viel Federlesens in (94) ein, so erhalten wir für  $T_\infty$

$$-\kappa \Delta T_\infty = f(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Omega, \quad T_\infty(\vec{z}) = T_b(\vec{z}), \quad \vec{z} \in \partial\Omega. \quad (95)$$

In einer Raumdimension liest sich diese Gleichung zB für ein Intervall  $\Omega = ]0, L[$  wesentlich freundlicher,

$$-\kappa y''(x) = f(x), \quad x \in ]0, L[, \quad y(0) = y_0, \quad y(L) = y_L, \quad (96)$$

wobei  $y_0, y_L \in \mathbb{R}$ .

Im nächsten Abschnitt werden wir uns mit derartigen (und anderen)

### Randwertproblemen

beschäftigen.

### 7.3 Das Sturmsche Randwertproblem

Wir wollen einiges zur Theorie linearer Randwertprobleme von ODEs der Ordnung zwei darlegen.

Dazu ist es günstig, die Aufgabenstellung in das

Sturmsche Randwertproblem

überzuführen.

Dabei gehen wir in diesem Abschnitt von den folgenden Voraussetzungen aus.

- $a, b$  sind reelle Zahlen mit  $a < b$ .
- $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig differenzierbar und positiv.
- $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig.

Wir definieren den Differentialoperator  $L$ , der einer differenzierbaren Funktion  $y$  eine andere Funktion zuordnet auf folgende Weise:

$$L(y) = -(p(x)y')' + q(x)y, \quad x \in ]a, b[$$

Zur Aufrechterhaltung der mathematischen Genauigkeit muss einiges zum Definitions- und Wertebereich von  $L$  gesagt werden.

$\text{dom } L$  besteht aus all jenen stetig differenzierbaren Funktionen  $y : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ , die auf  $]a, b[$  zweimal differenzierbar sind.

**Bemerkung.** Die hier entwickelte Theorie kann auf allgemeinere Funktionen  $p$  (zB mit  $p(a) = p(b) = 0$  und  $p > 0$  auf  $]a, b[$ ) und  $q$  (zB nur auf  $]a, b[$  definiert und dort stetig und unbeschränkt) erweitert werden.

$L(y)$  ist eine Funktion, die nur dort definiert sein kann, wo  $y$  zweimal differenzierbar ist. Also ist

$$L(y) : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R},$$

dh  $\text{ran } L$  ist eine Teilmenge der Menge aller reellwertigen Funktionen, die auf  $]a, b[$  definiert sind.

Eigentlich wollen wir Randwertprobleme lösen, dh wir suchen Funktionen  $y \in \text{dom } L$ , welche die ODE

$$L(y) = f(x), \quad x \in ]a, b[$$

(mit gegebenem, stetigen  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$ ) lösen und für die zusätzlich zB gilt

$$y(a) = y_a, y(b) = y_b$$

wobei die Zahlen  $y_a, y_b \in \mathbb{R}$  gegeben sind.

Wir wollen die Untersuchungen im Rahmen unserer Möglichkeiten so allgemein wie möglich halten.

Wir betrachten lineare Randwertprobleme der Form

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = Y_a, \quad \gamma y(b) + \delta y'(b) = Y_b,$$

wobei  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$  gegeben sind und in nicht degenerierter Form vorliegen:

$$\boxed{\alpha^2 + \beta^2 > 0, \quad \gamma^2 + \delta^2 > 0}$$

**Bemerkung.** Mit

$$\alpha = \gamma = 1, \quad \beta = \delta = 0$$

erhalten wir das Dirichlet Problem

$$y(a) = Y_a, y(b) = Y_b,$$

und mit

$$\alpha = \gamma = 0, \quad \beta = \delta = 1$$

erhalten wir das Neumann Problem

$$y'(a) = Y_a, y'(b) = Y_b.$$

Die hier betrachteten Randbedingungen sind also allgemeiner als Dirichlet- oder Neumann Randbedingungen.

Wir definieren

Unter den in diesem Abschnitt gültigen Voraussetzungen, speziell unter den Bedingungen

- $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  ist stetig,
- $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$  sind nicht degeneriert, ie  $\alpha^2 + \beta^2 > 0$  und  $\gamma^2 + \delta^2 > 0$ ,
- $Y_a, Y_b \in \mathbb{R}$ ,

heisst das Randwertproblem

$$L(y) = f(x), \quad \alpha y(a) + \beta y'(a) = Y_a, \quad \gamma y(b) + \delta y'(b) = Y_b,$$

**Sturmsches Randwertproblem.**

$y$  ist eine Lösung dieses Sturmschen Randwertproblems, wenn gilt:

- $y \in \text{dom } L$ ,
- $L(y) = f$ , also für alle  $x \in ]a, b[$ ,

$$-p(x)y''(x) - p'(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x),$$

- $\alpha y(a) + \beta y'(a) = Y_a$  und  $\gamma y(b) + \delta y'(b) = Y_b$ .

**Beispiele.** a) Wir betrachten das RWP

$$-y'' = 1, \quad y(0) = 0, y'(1) = 1.$$

Offenbar handelt es sich hierbei um ein Sturmsches RWP mit  $a = 0, b = 1$  und

$$p(x) = 1, q(x) = 0, \alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0, \delta = 1$$

und  $Y_a = 0, Y_b = 1$ .

Versuchen wir, dieses RWP zu lösen.

Falls dieses RWP eine Lösung hat, muss wegen  $y'' = -1$  offenbar gelten

$$y'(x) = -x + c_1,$$

wobei  $c_1 \in \mathbb{R}$ . Konsequenterweise erhalten wir

$$y(x) = -\frac{x^2}{2} + c_1x + c_2,$$

wobei auch  $c_2 \in \mathbb{R}$ . Es muss  $y(0) = 0$  gelten,

$$y(0) = c_2 = 0,$$

und wegen  $y'(1) = 1$  folgt

$$y'(1) = -1 + c_1 = 1,$$

also  $c_1 = 2$ . Wir erkennen: Dieses AWP ist eindeutig lösbar:

$$y(x) = -\frac{x^2}{2} + 2x.$$

b) Nun betrachten wir eine lineare ODE der Ordnung zwei,

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

wobei die reellen, stetigen Funktionen  $a_0, a_1, a_2$  zumindest auf einem Intervall  $]a, b[$  definiert sind.

Diese ODE ist nicht von der Form, die im Sturmschen Randwertproblem vorkommt.

Allerdings ist eine Transformation unter bestimmten Voraussetzungen an  $a_2, a_1, a_0$  möglich.

Wir differenzieren die gewünschte Form und klammern ebenso  $-p$  aus,

$$L(y) = (-py')' + qy = -py'' - p'y' + qy = -p \cdot (y'' + (p'/p)y' - (q/p)y).$$

Verwenden wir, dass  $p$  positiv ist, so gilt

$$p'/p = (\ln(p))',$$

also wenn wir

$$s = \ln(p)$$

setzen, so erhalten wir

$$L(y) = -p \cdot (y'' + s'y' - (q/p)y).$$

Setzen wir voraus, dass auch  $a_2$  auf  $]a, b[$  positiv ist, so ist die ursprüngliche ODE äquivalent mit

$$y'' + (a_1/a_2)y' + (a_0/a_2)y = f/a_2,$$

bzw mit

$$-p \cdot (y'' + (a_1/a_2)y' + (a_0/a_2)y) = -pf/a_2.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir

$$s' = a_1/a_2, \quad q = -pa_0/a_2.$$

Durch Integration ergibt sich  $s$ , woraus wir via

$$p = e^s$$

die Funktion  $p$  erhalten, die uns durch  $q = -pa_0/a_2$  die Funktion  $q$  liefert.

c) Wir transformieren das RWP

$$y'' + y' + xy = 1, \quad y'(0) = y'(1) = 0$$

in ein Sturmsches RWP. Offenbar gilt  $a_2 = a_1 = 1$  und  $a_0(x) = x$ . Wir erhalten

$$s' = 1, \quad q = -xp.$$

Also  $s = x$ ,  $p = e^x$ ,  $q = -xe^x$ , und somit

$$(-e^x y')' - xe^x y = -e^x, \quad y'(0) = y'(1) = 0.$$

### 7.3.1 Lösungsverhalten

Das Lösungsverhalten Sturmscher RWPe unterscheidet sich wesentlich vom Lösungsverhalten von AWPen.

Unter den in diesem Abschnitt gültigen VSen und unter der Annahme, dass  $f$  auf  $[a, b]$  stetig fortsetzbar ist, besitzt das AWP

$$L(y) = f(x), \quad y(a) = y_0, y'(a) = y_1$$

genau eine globale Lösung.

Dagegen kann bei dem Sturmschen RWP

$$L(y) = f(x), \quad \alpha y(a) + \beta y'(a) = Y_a, \quad \gamma y(b) + \delta y'(b) = Y_b$$

jeder der folgenden drei Fälle eintreten:

- Genau eine Lösung.
- Keine Lösung.

- Unendlich viele Lösungen.

Der interessierte Leser wird durch diese drei Möglichkeiten an lineare Gleichungssysteme erinnert werden.

Das ist kein Zufall, denn die Menge aller Lösungen der ODE

$$L(y) = f(x), \quad x \in ]a, b[$$

hat die Gestalt

$$y(x) = y_p(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Berechnen wir hieraus  $y'(x)$  und werten die Randbedingungen an  $a, b$  aus, so erhalten wir ein Gleichungssystem von zwei Gleichungen in den zwei Unbekannten  $c_1, c_2$ . Anders als bei AWPen kann jeder der beim Lösen derartiger Gleichungssysteme mögliche Fall auftreten.

WELCHER der drei Fälle eintritt, hängt von der Differentialgleichung, von  $f$ , von den Randbedingungen und von der Intervalllänge ab.

**Beispiele.** a)  $-y'' = 0$ ,  $y'(0) = y'(1) = 1$ . Wir erhalten die allgemeine Lösung der ODE:  $y(x) = c_1 x + c_2$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .  $y'(x) = c_1$  ergibt  $c_1 = 1$  und das RWP hat unendlich viele Lösungen

$$y(x) = x + c_2, \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

b)  $-y'' = 2$ ,  $y'(0) = y'(1) = 0$ . Die allgemeine Lösung der ODE ist

$$y(x) = -x^2 + c_1 x + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Die Randwertbedingungen ergeben das Gleichungssystem

$$y'(0) = c_1 = 0, \quad y'(1) = -2 + c_1 = 0.$$

Dieses Gleichungssystem besitzt keine Lösung. Also hat das RWP keine Lösung.

c)  $-y'' - y = 0$ ,  $y(0) = y(\pi/2) = 1$ . Die allgemein Lösung der ODE ist

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen der Randwerte liefert

$$y(0) = c_2 = 1, \quad y(\pi/2) = c_1 = 1,$$

also ist

$$y(x) = \sin x + \cos x$$

die eindeutige Lösung dieses Randwertproblems.

d)  $-y'' - y = 0$ ,  $y(0) = y(\pi) = 1$ . Die allgemein Lösung der ODE ist

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen der Randwerte liefert

$$y(0) = c_2 = 1, \quad y(\pi) = -c_2 = 1,$$

und dieses Gleichungssystem ist nicht lösbar, also gibt es keine Lösung des RWPs.

e)  $-y'' - y = 0$ ,  $y(0) = y(2\pi) = 1$ . Die allgemein Lösung der ODE ist

$$y(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen der Randwerte liefert

$$y(0) = c_2 = 1, \quad y(2\pi) = c_2 = 1,$$

und dieses Gleichungssystem besitzt unendlich viele Lösungen, dh das RWP hat die unendlich vielen Lösungen

$$y(x) = c_1 \sin x + \cos x, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

## 10. Übung "Differentialgleichungen für Ingenieure"

Ausgabe: 17.06.03

Bearbeitung: 23.06.03-27.06.03

Abgabe: 30.06.03-04.07.03

### 23. Stationäre Wärmeleitungsgleichung.

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender RWPe, indem Sie zunächst die allgemeine Lösung  $y$  der ODE und  $y'$  ermitteln und dann die freien Parameter anpassen.

Die ODE ist gegeben durch

$$-y'' = f(x), \quad -1 < x < +1,$$

die Funktion  $f$  und die Randwerte sehen folgender Massen aus.

$$\ddot{U}. \quad f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq -1/2 \\ +1 & , \quad -1/2 < x \leq 0 \\ -1 & , \quad 0 < x < 1/2 \\ 0 & , \quad 1/2 \leq x \end{cases} .$$

$\ddot{U}0$ . Bestimmung der allgemeinen Lösung und deren Ableitung.

$\ddot{U}a$ .  $y(-1) = y(+1) = 0$ .

$\ddot{U}b$ .  $y'(-1) = y'(1) = 0$ .

$$H. \quad f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq -1/2 \\ +1 & , \quad -1/2 < x < 1/2 \\ 0 & , \quad 1/2 \leq x \end{cases} .$$

H0. Bestimmung der allgemeinen Lösung und deren Ableitung.

**6 Punkte**

Ha.  $y(-1) = y(+1) = 0$ .

**3 Punkte**

Hb.  $y'(-1) = y'(1) = 0$ .

**2 Punkte**

### 24. Einfache RWPe.

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender RWPe.

$\ddot{U}a$ .  $y'' + 4y = 0, y(0) = 1, y(1) = 0$ .

$\ddot{U}b$ .  $y'' + 2y' + y = 1, y(0) + y'(0) = 1, y(1) - y'(1) = 0$ .

Ha.  $y'' + 4y = \cos(2x), y(0) = 1, y(1) = 0$ .

**7 Punkte**

Hb.  $y'' - 2y' + y = x, y(0) - y'(0) = 0, 2y(1) - y'(1) = 1$ . **9 Punkte**

### 25. Lösungsmenge von AWPen in Abhängigkeit der Daten.

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender AWPen in Abhängigkeit der angegebenen Parameter.

$\ddot{U}a$ .  $y'' - y = 0, 2y(0) + y'(0) = 0, \gamma y(1) + y'(1) = 0$ .

$\ddot{U}b$ .  $y'' - y = 0, 2y(0) + y'(0) = Y_a, ((3+e^2)/(3-e^2))y(1) + y'(1) = Y_b$ .

Ha.  $y'' = 0, y(0) + y'(L) = 0, y(L) = 0$ .

**5 Punkte**

Hb.  $y'' = 0, y(0) + y'(0) = Y_a, y(1) = Y_b$ .

**5 Punkte**

## 7.4 Die Entwicklung nach Eigenfunktionen

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit jenen Eigenschaften des Sturm-Liouvilleschen Differentialoperators  $L$  befassen, die zum Einsatz einer bestimmten Lösungsmethode für einige PDEs, der

Trennung der Veränderlichen,

wichtig sind.

Als Vorbereitung benötigen wir eine

**Definition.** Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ist

quadratisch integrierbar

wenn

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < +\infty.$$

Wir definieren für  $f \in L^2[a, b]$  die

$L^2$  Seminorm von  $f$

als

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}.$$

Die Menge aller quadratisch integrierbaren Funktionen ist  $L^2[a, b]$  und für  $f, g \in L^2[a, b]$  setzen wir

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx.$$

**Bemerkung.** a)  $L^2[a, b]$  ist ein Vektorraum, dh mit  $f, g \in L^2[a, b]$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  sind auch  $f + g \in L^2[a, b]$  und  $\alpha \cdot f \in L^2[a, b]$ .

b) Sind  $f, g \in L^2[a, b]$ , so ist  $f \cdot g$  integrierbar und damit ist  $\langle f, g \rangle$  definiert.

c) Für  $f \in L^2[a, b]$  gilt offenbar

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

d) Es kann vorkommen, dass  $\|f\|_2 = 0$ , aber  $f \neq$  Nullfunktion, zB  $f(a) = f(b) = 1$  und  $f(x) = 0$  für  $a < x < b$ . Es gilt nämlich: Falls  $\|f\|_2 = 0$ , so ist  $f(x) = 0$  für

**fast alle**  $x \in [a, b]$ .

Das kann heissen: für manche  $x \in [a, b]$  gilt  $f(x) \neq 0$ . Entsprechend ist  $\|\cdot\|_2$  keine Norm, sondern eine Seminorm.

Ausserdem benötigen wir

$$\text{dom}_0 L = \{y \in \text{dom } L : \alpha y(a) + \beta y'(a) = \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0\},$$

dh  $\text{dom}_0 L$  besteht aus all jenen Funktionen aus  $\text{dom } L$ , welche homogene Randbedingungen erfüllen.

**Bemerkung.** Klarer Weise hängt  $\text{dom}_0 L$  von  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  ab.

**Definition.**  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist ein Eigenwert von  $L$  bezüglich der Randbedingungen  $\alpha y(a) + \beta y'(a) = \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0$ , wenn es  $u \in \text{dom}_0 L$  gibt mit

$$L(u) = \lambda \cdot u, \quad \|u\|_2 = 1.$$

$u$  ist eine normierte Eigenfunktion von  $L$  bezüglich der Randbedingungen  $\alpha y(a) + \beta y'(a) = \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0$ , wenn

$$u \in \text{dom}_0 L \quad \text{und} \quad \|u\|_2 = 1$$

und wenn es  $\lambda \in \mathbb{R}$  gibt mit

$$L(u) = \lambda \cdot u.$$

$(\lambda, u)$  ist ein normiertes Eigenpaar von  $L$  bezüglich der Randbedingungen  $\alpha y(a) + \beta y'(a) = \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0$ , wenn

$$\lambda \in \mathbb{R}, u \in \text{dom}_0 L, L(u) = \lambda \cdot u, \|u\|_2 = 1.$$

Wir sehen: die Begriffe “Eigenwert” und “(normierte) Eigenfunktion” sind untrennbar miteinander verknüpft.

Bei den Berechnungen ist folgende Beobachtung wichtig:

- $\lambda$  ist **kein** Eigenwert von  $L$  bezüglich der Randbedingungen  $\alpha y(a) + \beta y'(a) = \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0$ , wenn aus

$$L(u) = \lambda \cdot u, \quad u \in \text{dom}_L$$

folgt:  $u = 0$ .

Denn in diesem Fall ist die  $L^2$  Seminorm von  $u=0$ , also ungleich 1.

Der Hauptsatz dieses Abschnitts ist

**Satz 13.** *Unter den in diesem Abschnitt gültigen Voraussetzungen gibt es eine Folge  $(\lambda_n, u_n)_{0 < n \in \mathbb{N}}$  normierter Eigenpaare von  $L$  bezüglich der Randbedingungen  $\alpha y(a) + \beta y'(a) = \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0$  mit folgenden Eigenschaften:*

- $(\lambda_n, u_n)_{0 < n \in \mathbb{N}}$  ist vollständig, dh  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$  sind alle Eigenwerte von  $L$ ,
- $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$
- $\lim_{n \uparrow +\infty} \lambda_n = +\infty$ .
- Die normierten Eigenfunktionen bilden eine Orthonormalbasis des  $L^2[a, b]$ , dh

$$\|u_n\|_2 = 1, \quad \langle u_n, u_m \rangle = 0, \quad 0 < n \in \mathbb{N}, 0 < m \in \mathbb{N}, n \neq m,$$

und

$$\forall f \in L^2[a, b] : \lim_{N \uparrow +\infty} \left\| f - \sum_{n=1}^N \langle f, u_n \rangle \cdot u_n \right\|_2 = 0.$$

**Bemerkung.** Die Reihe

$$\left( \sum_{n=1}^N \langle f, u_n \rangle u_n \right)_{N \in \mathbb{N}}$$

ist die Fourier Reihe von  $f$  bezüglich der Orthonormalbasis  $u_1, u_2, u_3, \dots$  und die Zahlen

$$\langle f, u_n \rangle, \quad 0 < n \in \mathbb{N}$$

sind die Fourier Koeffizienten von  $f$  bezüglich der Orthonormalbasis  $u_1, u_2, u_3, \dots$

**Bemerkung.** Ist  $\left( \sum_{n=1}^N \langle f, u_n \rangle u_n \right)_{N \in \mathbb{N}}$  die Fourierreihe von  $f \in L^2[a, b]$  bezüglich der Orthonormalbasis  $u_1, u_2, u_3, \dots$ , so gilt die Besselsche Gleichung

$$\|f\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, u_n \rangle|^2},$$

bzw es gilt allgemeiner für jedes  $g \in L^2[a, b]$ ,

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, u_n \rangle \cdot \langle g, u_n \rangle.$$

**Beispiel.** Wir betrachten  $L(y) = -y''$  bezüglich der Randbedingungen  $y(0) = y(L) = 0$ , also

$$\text{dom}_0 L = \{y \in \text{dom } L : y(0) = y(L) = 0\}.$$

Gesucht ist eine vollständige Folge normierter Eigenpaare von  $L$  bezüglich dieser Randbedingungen. Wir müssen zunächst die Eigenwerte von  $L$  bezüglich der RBen  $y(0) = y(L) = 0$  bestimmen.

Zunächst suchen wir nach Eigenwerten  $\leq 0$ .

Falls  $\lambda = -\omega^2 < 0$ ,  $0 < \omega$ , ein Eigenwert von  $L$  bezüglich der RBen  $y(0) = y(L) = 0$  ist, dann gibt es  $u \in \text{dom}_0 L$  mit

$$L(u) = -u'' = \lambda \cdot u = -\omega^2 \cdot u.$$

Wegen  $0 < \omega$  erhalten wir  $u = c_1 e^{\omega x} + c_2 e^{-\omega x}$ , woraus wir wegen  $u(0) = u(L) = 0$  das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ e^{\omega L} c_1 + e^{-\omega L} c_2 &= 0 \end{aligned}$$

erhalten. Aus der ersten Gleichung folgt  $c_2 = -c_1$ . Setzen wir dies in die zweite Gleichung ein, so erhalten wir

$$c_1 \cdot (e^{\omega L} - e^{-\omega L}) = 0,$$

woraus wegen  $e^{\omega L} \neq e^{-\omega L}$  (da  $\omega L \neq 0$ ) folgt:  $c_1 = 0$ , also auch  $c_2 = 0$ . Wir erhalten  $u = 0$ . Also ist nach einer vorhergehenden Bemerkung  $-\omega^2$  kein Eigenwert.

Wir fragen uns, ob 0 ein Eigenwert ist. Dann gibt es  $u \in \text{dom}_0 L$  mit

$$L(u) = 0 \cdot u = 0.$$

Wegen  $L(u) = -u''$  folgt  $u = c_1 + c_2 x$ , woraus wegen  $u(0) = u(L) = 0$  folgt:  $u = 0$ . Also ist 0 kein Eigenwert.

Nun setzen wir  $\lambda > 0$  voraus. Dann sind alle Lösungen von

$$L(u) = -u'' = \lambda u$$

gegeben durch

$$u(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Da  $u \in \text{dom}_0 L$  gelten soll, folgt  $u(0) = u(L) = 0$ . Wir erhalten die linearen Gleichungen

$$u(0) = c_1 = 0, \quad u(L) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}L) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0.$$

Schreiben wir diese Gleichungen in Matrixform, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos(\sqrt{\lambda}L) & \sin(\sqrt{\lambda}L) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieses lineare, homogene Gleichungssystem besitzt entweder genau eine Lösung - nämlich  $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  - oder unendlich viele Lösungen.

Im ersten Fall ist erhalten wir  $c_1 = c_2 = 0$ , also  $u = 0$  und  $\lambda$  ist kein Eigenwert.

Im zweiten Fall gibt es nichttriviale Lösungen und  $\lambda$  ist ein Eigenwert.

Dieser zweite Fall ist durch

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos(\sqrt{\lambda}L) & \sin(\sqrt{\lambda}L) \end{pmatrix} = 0$$

gekennzeichnet. Wir erhalten

$$\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0,$$

also wegen  $\lambda \neq 0$ ,

$$\sqrt{\lambda}L = n\pi, \quad 0 < n \in \mathbb{N},$$

dh

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad 0 < n \in \mathbb{N}.$$

Die zugehörigen lineare Gleichungssysteme für die Koeffizienten  $c_{1,n}, c_{2,n}$  der entsprechenden Eigenfunktionen

$$u_n = c_{1,n} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + c_{2,n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad 0 < n \in \mathbb{N}$$

haben die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (-1)^n & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{1,n} \\ c_{2,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 < n \in \mathbb{N}.$$

Wir lesen unschwer  $c_{1,n} = 0$  ab. Also

$$u_n = c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad 0 < n \in \mathbb{N}.$$

$c_n$  kann so gewählt werden, dass

$$\|u_n\|_2 = 1, \quad 0 < n \in \mathbb{N}$$

gilt. Wir berechnen

$$\begin{aligned} 1 = \|u_n\|_2^2 &= \int_0^L u_n^2(x) dx = c_n^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \\ &= \dots \left| \begin{array}{l} \sigma = \frac{n\pi x}{L} \\ x = \frac{L\sigma}{n\pi} \\ dx = \frac{L}{n\pi} d\sigma \end{array} \right| \dots = \frac{c_n^2 L}{n\pi} \int_0^{n\pi} \sin^2 \sigma d\sigma \\ &= \frac{c_n^2 L}{2n\pi} \left( \sigma - \frac{1}{2} \sin(2\sigma) \right) \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=n\pi} = \frac{c_n^2 L}{2n\pi} \cdot (n\pi) = \frac{c_n^2 L}{2}, \end{aligned}$$

und wir erhalten, wenn wir uns positives  $c_n$ ,  $0 < n \in \mathbb{N}$  wünschen,

$$c_n = \sqrt{2/L}, \quad 0 < n \in \mathbb{N}.$$

Eine vollständige Folge von  $L$  von Eigenpaaren bezüglich der RBen  $u(0) = u(L) = 0$  ist somit

$$\left( n^2 \pi^2 / L^2, \sqrt{2/L} \sin(n\pi x / L) \right)_{0 < n \in \mathbb{N}}.$$

## 8 Die Separationsmethode

In diesem Abschnitt wollen wir ein Verfahren zum Lösen gewisser PDEs kennen lernen. Die mit dieser

### Separationsmethode

gewonnene Lösungsdarstellung ist für viele theoretische Untersuchungen von grossem Nutzen und historisch bedeutend.

Für moderne, praktische Zwecke wird sie seltener eingesetzt.

Wir wiederholen:

Der Sturm Liouville Operator  $L$  ist gegeben durch

$$L(y) = (-p(x)y')' + q(x)y,$$

wobei  $p, q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben sind,  $p$  stetig differenzierbar und positiv ist und  $q$  stetig ist. Die Randbedingungen sind von der Form

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = Y_a, \quad \gamma y(b) + \delta y'(b) = Y_b,$$

mit gegebenen Daten  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  und  $Y_a, Y_b$ .

Wir erläutern die Separationsmethode an Hand eines Beispiels und behandeln Weiterführendes in den Übungen.

**Beispiel.** Wir suchen die Separationslösung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung

$$\dot{u} - u'' = 1, \quad u(0, x) = 4 + \sin x + (2x/\pi), \quad u(t, 0) = 1, u(t, \pi) = 2.$$

(Wir wählen die seltsame Intervalllänge  $\pi$  um den Schreibaufwand zu reduzieren.)

### 1.Schritt: Homogenisierung der Randdaten.

Wir suchen eine möglichst einfache Funktion  $v : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , welche die Randbedingungen erfüllt, also für die gilt

$$v(0) = 1, v(\pi) = 2.$$

Wir wählen  $v(x) = (x + \pi)/\pi$ ,  $x \in [0, \pi]$ .

Nun betrachten wir die Funktion

$$w(t, x) = u(t, x) - v(x), \quad (t, x) \in ]0, +\infty[ \times ]0, \pi[$$

und sehen sofort, dass  $w$  das ARWP

$$\dot{w} - w'' = 1, \quad w(0, x) = 3 + \sin x + (x/\pi), \quad w(t, 0) = w(t, \pi) = 0$$

löst.

## 2.Schritt: Eigenpaare des Sturm Liouville Operators.

Wir schreiben das ARWP für  $0 < t$  in der Form

$$\dot{w} + L(w) = f(t, x), \quad w(t, 0) = w(t, \pi) = 0, \quad L(w) = -w'',$$

(wobei hier  $f$  nicht wirklich von  $t, x$  abhängt, da  $f = 1$ ) also soll für  $0 < t$  gelten

$$w(t, \cdot) \in \text{dom}_0 L = \{y \in \text{dom } L : y(0) = y(\pi) = 0\},$$

und es stellt sich nun die Frage nach einer vollständigen Folge normierter Eigenpaare von  $L$  bezüglich der Randbedingung  $y(0) = y(\pi) = 0$ .

Diese Folge ermittelten wir bereits im letzten Abschnitt:

$$\left( n^2, \sqrt{2/\pi} \sin(nx) \right)_{0 < n \in \mathbb{N}},$$

und wir sehen, dass durch die Wahl  $L = \pi$  (Intervalllänge) tatsächlich einiges einfacher wird.

## 3.Schritt: Ansatz und erste Berechnungen.

Die Idee des Separationsansatzes ist sehr einfach in Form eines Ansatzes erklärt:

$$w(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \cdot u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle w(t, \cdot), u_n \rangle \cdot u_n(x),$$

$$t \in ]0, +\infty[, \quad \text{in } L^2[0, \pi]$$

wobei  $u_1, u_2, u_3, \dots$  die im 2.Schritt gefundenen normierten Eigenvektoren sind,  $w_1(t), w_2(t), w_3(t), \dots$  die Folge der Fourierkoeffizienten von  $w(t, \cdot)$  bezüglich  $u_1, u_2, u_3, \dots$  ist, also

$$w_n(t) = \langle w(t, \cdot), u_n \rangle = \int_0^{\pi} w(t, x) \cdot u_n(x) dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} w(t, x) \cdot \sin(nx) dx, \quad 0 < n \in \mathbb{N},$$

und das Gleichheitszeichen nicht allzu wörtlich sondern im  $L^2$  Sinn zu verstehen ist, dh

$$\lim_{N \uparrow +\infty} \left\| w(t, \cdot) - \sum_{n=1}^N w_n(t) \cdot u_n \right\|_2 = 0, \quad 0 < t.$$

Ausserdem entwickeln wir die Anfangsbedingung - zunächst noch formal - in eine entsprechende Fourierreihe,

$$w(0, x) = \sum_{n=1}^N \langle w_0, u_n \rangle \cdot u_n,$$

und verfahren ganz analog mit der rechten Seite der PDE

$$f(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f(t, \cdot), u_n \rangle \cdot u_n.$$

Nun ersetzen wir die im ARWP auftretenden Funktionen durch ihre Fourierreihen bezüglich  $u_1, u_2, u_3, \dots$

Bei  $w_0$  und  $f$  ist hier nichts Neues zu tun. Interessanter ist die PDE. Wir rechnen formal, da  $u_n$ ,  $0 < n \in \mathbb{N}$ , nicht von der Zeit abhängt,

$$\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \cdot u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{w}_n(t) \cdot u_n.$$

Nun berechnen wir formal  $L(u)$ , wobei wir

$$L(u_n) = \lambda_n u_n, \quad 0 < n \in \mathbb{N}$$

und die Linearität von  $L$  verwenden,

$$\begin{aligned} L(w) &= L\left(\sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \cdot u_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} L(w_n(t) \cdot u_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \cdot L(u_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n w_n(t) \cdot u_n. \end{aligned}$$

Einsetzen und zusammenfassen ergibt

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (\dot{w}_n(t) + \lambda_n w_n(t) - f_n(t)) \cdot u_n &= 0, \\ \sum_{n=1}^{\infty} (w_n(0) - \langle w_0, u_n \rangle) \cdot u_n &= 0, \end{aligned}$$

was nur dann möglich ist, wenn

$$\dot{w}_n(t) + \lambda_n w_n(t) - f_n(t) = 0, \quad w_n(0) = \langle w_0, u_n \rangle, \quad 0 < n \in \mathbb{N}$$

gilt.

Wir erkennen (und darin liegt die theoretische und historische Bedeutung des Separationsansatzes): die ursprüngliche PDE wurde durch den Fourier-Ansatz in eine ODE für die Fourierkoeffizienten übergeführt.

Unter Verwendung der allgemeinen Lösungsformel für derartige AWPE linearer ODEs der Ordnung 1 erhalten wir

$$w_n(t) = \langle w_0, u_n \rangle \cdot e^{-\lambda_n t} + \int_0^t e^{-\lambda_n \cdot (t-s)} f(s) ds,$$

was sich, wenn  $f$  nicht von  $t$  abhängt, einfacher schreiben lässt:

$$w_n(t) = \langle w_0, u_n \rangle \cdot e^{-\lambda_n t} + (f_n/\lambda_n), \quad 0 < n \in \mathbb{N},$$

sofern alle  $\lambda_n \neq 0$  sind.

Eventuell ist  $\lambda_1 = 0$  (Beispiel in den Übungen) und wir erhalten für zeitunabhängiges  $f$ ,

$$w_1(t) = \langle w_0, u_n \rangle + t \cdot f_1.$$

Ausser in diesem Fall nehmen alle Fourierkoeffizienten im Laufe der Zeit ab.

#### 4.Schritt: Berechnung der Fourierkoeffizienten.

Da  $f = 1$  erhalten wir für  $0 < n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} f_n = \langle f, u_n \rangle &= \sqrt{2/\pi} \int_0^\pi f(x) \cdot \sin(nx) dx = \sqrt{2/\pi} \int_0^\pi \sin(nx) dx \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}} \cos(nx) \Big|_{x=0}^{x=\pi} = -\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}} \cdot ((-1)^n - 1) \\ &= \frac{\sqrt{2}(1 - (-1)^n)}{n\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

Nun berechnen wir  $\langle w_0, u_n \rangle$ ,  $0 < n \in \mathbb{N}$ .

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \langle w_0, u_n \rangle &= \sqrt{2/\pi} \int_0^\pi (3 + \sin x + (x/\pi)) \cdot \sin(nx) dx \\ &= 3 \cdot \sqrt{2/\pi} \int_0^\pi \sin(nx) dx + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \langle u_1, u_n \rangle \\ &\quad + \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}} \int_0^\pi x \sin(nx) dx \\ &= 3f_n + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \langle u_1, u_n \rangle + \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}n^2} \int_0^{n\pi} \sigma \sin \sigma d\sigma \\ &= \frac{3\sqrt{2}(1 - (-1)^n)}{n\sqrt{\pi}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \langle u_1, u_n \rangle + \frac{\sqrt{2}(-1)^{n+1}}{n\sqrt{\pi}} \\ &= \frac{\sqrt{2}(3 + 4(-1)^{n+1})}{n\sqrt{\pi}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \langle u_1, u_n \rangle. \end{aligned}$$

wobei wir einerseits die bereits bekannten Terme für  $f_n$ ,  $0 < n \in \mathbb{N}$ , und das folgende bestimmte Integral verwendeten:

$$\begin{aligned} \int_0^{n\pi} \sigma \sin \sigma d\sigma &= \dots \left| \begin{array}{l} u = \sigma, \quad v' = \sin \sigma \\ u' = 1, \quad v = -\cos \sigma \end{array} \right| \dots \\ &= -\sigma \cos \sigma \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=n\pi} + \int_0^{n\pi} \cos \sigma d\sigma \\ &= -n\pi(-1)^n + \sin \sigma \Big|_{\sigma=0}^{\sigma=n\pi} = (-1)^{n+1}n\pi. \end{aligned}$$

Wegen

$$\langle u_1, u_1 \rangle = 1, \quad \langle u_1, u_n \rangle = 0, \quad 1 < n \in \mathbb{N}$$

erhalten wir schliesslich

$$\langle w_0, u_1 \rangle = \frac{14\sqrt{2} + \pi}{2\sqrt{\pi}},$$

sowie

$$\langle w_0, u_{2k} \rangle = -\frac{1}{k\sqrt{2\pi}}, \quad \langle w_0, u_{2k+1} \rangle = \frac{7\sqrt{2}}{(2k+1)\sqrt{\pi}}, \quad 0 < k \in \mathbb{N}.$$

Ausgerüstet mit diesen Zwischenresultaten erhalten wir

$$\begin{aligned} w(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \cdot u_n(x) \\ &= w_1(t) \cdot u_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (w_{2k}(t) \cdot u_{2k}(x) + w_{2k+1}(t) \cdot u_{2k+1}(x)) \\ &= \left( \langle w_0, u_1 \rangle \cdot e^{-\lambda_1 t} + (f_1/\lambda_1) \right) \cdot u_1(x) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \left( \langle w_0, u_{2k} \rangle \cdot e^{-\lambda_{2k} t} + (f_{2k}/\lambda_{2k}) \right) \cdot u_{2k}(x) \right. \\ &\quad \left. + \left( \langle w_0, u_{2k+1} \rangle \cdot e^{-\lambda_{2k+1} t} + (f_{2k+1}/\lambda_{2k+1}) \right) \cdot u_{2k+1}(x) \right) \\ &= \left( \frac{14\sqrt{2} + \pi}{2\sqrt{\pi}} \cdot e^{-t} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \right) \cdot \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x \right) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{k\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-4k^2 t} \cdot \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(2kx) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{7\sqrt{2}}{(2k+1)\sqrt{\pi}} \cdot e^{-(2k+1)^2 t} + \frac{2\sqrt{2}}{(2k+1)\sqrt{\pi}} \right) \cdot \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin((2k+1)x) \right) \right) \\ &= \left( \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{14}{\pi} \right) \cdot e^{-t} + \frac{4}{\pi} \right) \sin x \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left( -\frac{1}{k\pi} \cdot e^{-4k^2 t} \cdot \sin(2kx) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{14}{(2k+1)\pi} \cdot e^{-(2k+1)^2 t} + \frac{4}{(2k+1)\pi} \right) \cdot \sin((2k+1)x) \right). \end{aligned}$$

**Diskussion.** Zugegebener Massen ist die erhaltene Lösungsformel für  $w(t, x)$  nicht gerade anschaulich. Dennoch beinhaltet die Formel für  $w$  vom theoretischen Standpunkt aus einige interessante Details.

Zum Beispiel ist  $w(t, x)$  von der Form

$$w(t, x) = w_{\infty}(x) + w_*(t, x),$$

wobei die in  $w_*(t, x)$  vorkommenden Koeffizienten ausnahmslos exponentiell in der Zeit fallen und zwar mindestens mit einer Rate, die durch den kleinsten Eigenwert - hier: 1 - gegeben ist.

Ohne allzu viel Mühe erhalten wir daraus: Die Funktion  $w_*$  ist auf  $]0, +\infty[ \times ]0, \pi[$  unendlich oft differenzierbar - dies ist die wohlbekanntes Glättungseigenschaft der Wärmeleitungsgleichung - und

$$\|w(t, x) - w_\infty(x)\|_2 \leq C \cdot e^{-t}, \quad 0 < t,$$

wobei  $C \in \mathbb{R}^+$  eine Konstante ist.

In Worten: Die Lösung nähert sich exponentiell schnell (zumindest im Sinne der  $L^2$  Seminorm) einer Grenzverteilung an.

$w_\infty$  kann leicht bestimmt werden (aus der Fourierreihe ist nicht wirklich explizites zu gewinnen), indem wir wie im Kapitel über die Herleitung der Wärmeleitungsgleichung die stationäre Grenzlösung bestimmen:

$$-w_\infty''(x) = 1, \quad w_\infty(0) = w_\infty(\pi) = 0,$$

dessen eindeutige Lösung gegeben ist durch

$$w_\infty(x) = \frac{x \cdot (\pi - x)}{2}.$$

Re-interpretieren wir diese Ergebnisse für die ursprüngliche Funktion  $u$ , so erhalten wir

$$\|u(t, x) - u_\infty(x)\|_2 \leq C \cdot e^{-t}, \quad 0 < t$$

wobei

$$u_\infty(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{3\pi x}{2} + 1.$$

## 11. Übung “Differentialgleichungen für Ingenieure”

Ausgabe: 24.06.03

Bearbeitung: 30.06.03-04.07.03

Abgabe: 07.07.03-11.07.03

### 26. Vollständige Folgen von Eigenpaaren.

Bestimmen Sie eine vollständige Folge von Eigenpaaren von  $L(u) = -u''$  bezüglich der angegebenen RBen.

Üa.  $u'(0) = u'(L) = 0$ .

Ha.  $u(0) = u(L) = 0$ .

**7 Punkte**

Hb.  $u'(0) = u(L) = 0$ .

**7 Punkte**

### 27. Eindimensionale Wärmeleitungsgleichung.

Lösen Sie mit Hilfe des Separationsverfahrens die hier speziell als  $\dot{u} - u'' = f$  gewählte Wärmeleitungsgleichung bezüglich der gegebenen Funktion  $f$  und der spezifizierten Anfangs- und Randwerte. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Grenzgleichung  $t \uparrow +\infty$ .

Üa.  $f = 1, u(0, x) = 0, u'(t, 0) = u'(t, \pi) = 0$ .

Üb.  $f = 1 - (2x/\pi), u(0, x) = 0, u'(t, 0) = u'(t, \pi) = 0$ .

Ha.  $f = 1, u(0, x) = 0, u(t, 0) = u(t, \pi) = 0$ .

**5 Punkte**

Hb.  $f = 0, u(0, x) = 1, u'(t, 0) = u(t, \pi) = 0$ .

**5 Punkte**

**Zu erreichende Punkteanzahl: 138 Punkte  
ie rund 39.77% 1.-11.Übungsblatt  
12.Übungsblatt: Zusatzpunkte.**

## 8.1 Der Laplace Operator auf einem Rechteck

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit einer Verallgemeinerung der Separationsmethode beschäftigen.

Wir beschäftigen uns mit dem Laplace Operator in einem Rechtecksbereich.

Im Speziellen interessiert uns das Eigenwertproblem

$$-\Delta u = \lambda u, \quad u = u(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Omega = ]0, a[ \times ]0, b[, \quad u \neq 0. \quad (97)$$

Wir beschränken uns hier auf homogene Dirichlet Randbedingungen

$$u(\vec{z}) = 0, \quad \vec{z} \in \partial\Omega. \quad (98)$$

Ohne tiefer in die zugrunde liegende, nicht triviale Mathematik eindringen zu können, wollen wir

- 1) zeigen, wie mit Hilfe der Separationsmethode (97) auf zwei Eigenwertprobleme für ODEs transformiert werden kann,
- 2) uns mit der Feststellung begnügen, dass unter den gegebenen Voraussetzungen stets eine vollständige Folge von orthonormierten Eigenpaaren  $(\lambda_k, u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  von (97), (98) existiert und dass wir diese Folge von Eigenpaaren mit der angegebenen Methode auffinden können.

**Bemerkungen.** a) Der Begriff "orthonormiert" bezieht sich hier auf den Vektorraum  $L^2(\Omega)$ , in dem das (degenerierte) innere Produkt gegeben ist durch

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(\vec{x}) \cdot g(\vec{x}) \, d\vec{x}.$$

Klarerweise handelt es sich um ein zweidimensionales Integral.

b) Mit der Separationsmethode können prinzipiell nur sehr spezielle RBen behandelt werden. In praktischen Situationen sind oftmals andere Randbedingungen von Bedeutung. Dies schränkt den Einsatz der Separationsmethode zur Lösung praktischer Probleme sehr ein.

Wir erinnern, dass

$$\Omega = ]0, a[ \times ]0, b[,$$

wobei  $a, b \in \mathbb{R}^+$ .

Bei diesem zweidimensionalen Problem hat der Laplace Operator die Form

$$\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy}.$$

Die Eigenwertgleichung (97) hat die Gestalt

$$-\partial_{xx}u - \partial_{yy}u = \lambda u.$$

Wir suchen eine ganz spezielle Lösungen dieser Gleichung:

$$u(x, y) = v(x) \cdot w(y).$$

Mit diesem Ansatz trennen (“separieren”) wir die Abhängigkeit von  $x$  und  $y$ . Wir setzen in die Eigenwertgleichung ein und erhalten

$$-v''(x) \cdot w(y) - v(x) \cdot w''(y) = \lambda v(x) \cdot w(y),$$

wobei hier die Ableitungen nach den jeweiligen Variablen mit Strichen bezeichnet werden.

Wir erhalten nach Division zumindest an jenen Stellen, an denen  $v(x) \cdot w(y) \neq 0$  ist,

$$-\frac{v''(x)}{v(x)} - \frac{w''(y)}{w(y)} = \lambda.$$

Dass die Summe zweier Funktionen, von denen die eine von  $x$  und die andere von  $y$  abhängt insgesamt konstant ist, ist unabhängig davon, wo  $v(x) \cdot w(y) \neq 0$  gilt, nur dann vorstellbar, wenn beide Funktionen jeweils konstant sind.

Wir erhalten nach jeweiliger Multiplikation mit dem Nenner die zwei (!) Eigenwertprobleme für ODEs (!),

$$-v''(x) = \lambda_x \cdot v(x), \quad -w''(y) = \lambda_y \cdot w(y),$$

wobei wir wegen der homogenen Dirichlet Daten die Randwerte

$$v(0) = v(a) = w(0) = w(b) = 0$$

erhalten.

Diese Eigenwertprobleme haben wir bereits im vorherigen Kapitel gelöst, wo wir die vollständigen Folgen normierter Eigenpaare

$$\left( k^2 \pi^2 / a^2, \sqrt{2/a} \sin(k\pi x/a) \right)_{k \in \mathbb{N}}, \quad \left( l^2 \pi^2 / b^2, \sqrt{2/b} \sin(l\pi y/b) \right)_{l \in \mathbb{N}}$$

erhielten.

Erinnern wir uns an

$$u(x, y) = v(x) \cdot w(y),$$

so erhalten wir eine vollständige (Doppel)Folge normierter Eigenpaare:

$$\left( \pi^2 \cdot \left( \frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right), \frac{2}{\sqrt{ab}} \cdot \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{l\pi y}{b}\right) \right)_{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}.$$

Damit haben wir das Eigenwertproblem vollständig gelöst.

Die Kenntnis der vollständigen Folge normierter Eigenpaare erlaubt es uns einerseits die Poissongleichung

$$-\Delta u = f, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

für beliebige  $f \in L^2(\Omega)$  in Form von Fourierreihen zu lösen, andererseits können wir ganz genau so wie im letzten Abschnitt vorgehen um zB die Wärmeleitungsgleichung

$$\dot{u} - \Delta u = f(t, \vec{x}), \quad u(t, \cdot) = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

mit Anfangsdaten  $u(0, \vec{x}) = v(\vec{x}) \in L^2(\Omega)$  in Form einer doppelt indizierten Fourierreihen lösen:

$$u(t, x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sum_{k,l=1}^{\infty} u_{k,l}(t) \cdot \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{l\pi y}{b}\right),$$

wobei für  $k, l \in \mathbb{N}^+$ ,

$$u_{k,l}(t) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \int_{\Omega} u(t, x, y) \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{l\pi y}{b}\right) dx dy,$$

genauer, nach Koeffizientenvergleich und Lösen des AWP

$$u_{k,l}' + \lambda_{k,l} u_{k,l} = f_{k,l}(t), \quad u_{k,l}(0) = v_{k,l},$$

wobei für  $k, l \in \mathbb{N}^+$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\lambda_{k,l} = \pi^2 \cdot \left( \frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right),$$

$$f(t, x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sum_{k,l=1}^{\infty} f_{k,l}(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{l\pi y}{b}\right),$$

$$f_{k,l}(t) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \int_{\Omega} f(t, x, y) \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{l\pi y}{b}\right) dx dy,$$

$$v(x, y) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sum_{k,l=1}^{\infty} v_{k,l} \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{l\pi y}{b}\right),$$

$$v_{k,l} = \frac{2}{\sqrt{ab}} \int_{\Omega} v(x, y) \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{l\pi y}{b}\right) dx dy.$$

Wir erhalten für  $k, l \in \mathbb{N}^+$ ,  $t \in \mathbb{R}^+$ ,

$$u_{k,l}(t) = v_{k,l} e^{-\lambda_{k,l} t} + \int_0^t e^{-\lambda_{k,l}(t-s)} \cdot f_{k,l}(s) ds.$$

Irgendwie ist diese Darstellung nicht sehr handlich.

Immerhin sehen wir, dass der Einfluss der Anfangsbedingung exponentiell abklingt.

## 9 $-\Delta u = f$ als Variationsproblem

Betrachten wir noch einmal die Poisson Gleichung, zB mit homogenen Dirichlet Randbedingungen

$$-\Delta u = f(x), \quad u = u(x), \quad x \in \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega.$$

Wie bereits früher angedeutet, beschreibt diese PDE zB den Grenzzustand für  $t \uparrow +\infty$  einer Wärmeleitungsgleichung.

Die in den vorherigen Kapiteln angedeutete Theorie der Sturm-Liouville Operatoren kann im Wesentlichen auch auf diese Poisson Gleichung ausgedehnt werden.

Im Speziellen ist bekannt, dass es unter eher geringfügigen Bedingungen an  $\Omega$  (das hier allerdings beschränkt sein muss) eine vollständige Folge normierter Eigenpaare  $(\lambda_k, u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  des negativen Laplace Operators  $-\Delta$  bezüglich der homogenen Dirichletdaten gibt.

Genauer:

- $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots$
- $\{u_k : k \in \mathbb{N}\}$  ist bezüglich des (degenerierten) inneren Produkts in  $L^2(\Omega)$ ,

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(\vec{x}) \cdot g(\vec{x}) d\vec{x} \quad (\text{mehrdimensionale Integration})$$

eine vollständige Orthonormalbasis des  $L^2(\Omega)$ , dh für jede Funktion  $f \in L^2(\Omega)$  gilt im  $L^2(\Omega)$  Sinn

$$f = \lim_{N \uparrow +\infty} \sum_{k=1}^N \langle f, u_k \rangle \cdot u_k.$$

- Für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt  $u_k = 0$  auf  $\partial\Omega$ .

Mit Hilfe dieser vollständigen ONB und unter Zuhilfenahme der Positivität der Eigenwerte  $\lambda_1, \dots$  können wir - zumindest theoretisch - die eindeutige Lösung der Poisson Gleichung bestimmen.

Wir setzen unbestimmt an

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot u_k,$$

bestimmen die Fourierkoeffizienten  $\langle f, u_k \rangle$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , von  $f$  bezüglich der Orthonormalbasis  $u_1, u_2, u_3, \dots$  und ersetzen  $u$  und  $f$  durch ihre Fourierreihen.

$$-\Delta \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot u_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, u_k \rangle \cdot u_k,$$

vertauschen skrupellos (unter Ausnützung der Linearität) den linearen Operator  $-\Delta$  mit der Summation und erhalten

$$\begin{aligned} -\Delta \left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot u_k \right) &= \sum_{k=1}^{\infty} -\Delta(a_k \cdot u_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot (-\Delta u_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \lambda_k \cdot u_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle f, u_k \rangle \cdot u_k, \end{aligned}$$

woraus wir durch Koeffizientenvergleich der Basiselemente  $u_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , erhalten

$$a_k \cdot \lambda_k = \langle f, u_k \rangle, \quad k \in \mathbb{N},$$

also

$$a_k = \frac{\langle f, u_k \rangle}{\lambda_k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Damit haben wir die Fourierreihe von  $u$  bezüglich  $u_1, u_2, u_3, \dots$  erhalten.

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle f, u_k \rangle}{\lambda_k} \cdot u_k, \quad \text{in } L^2(\Omega).$$

Dieses Verfahren hat einige Nachteile.

- Die Eigenwerte von  $-\Delta$  bezüglich homogener Dirichlet RBen müssen bekannt sein oder mit beliebiger Genauigkeit approximiert werden können.
- Die Eigenfunktionen von  $-\Delta$  bezüglich homogener Dirichlet RBen müssen bekannt sein oder mit beliebiger Genauigkeit ausgewertet werden können.
- Die Summation darf keine numerischen Instabilitäten aufwerfen.
- Die Berechnung eines Funktionswertes von  $u$  mit Hilfe der Fourierreihe ist recht aufwendig, da zB die Auswertung von  $u_k$  an einer bestimmten Stelle unter Umständen den Einsatz rekursiver Methoden verlangt.

Eigenwerte und Eigenfunktionen sind nur für ganz spezielle Gebiete  $\Omega$  bekannt. Für die Summation der Fourierreihe stehen in diesen Fällen hochentwickelte und entsprechend genaue Verfahren zur Verfügung.

Sobald  $\Omega$  von den Standardgebieten (Quader, Kugel, Zylinder, Ellipsoid etc) abweicht, sind weder Eigenfunktionen noch Eigenwerte hinreichend genau bekannt und die Darstellung als Fourierreihe verkommt zu einer rein theoretischen Repräsentation.

Erschwerend kommt bei dieser Methode hinzu, dass nur sehr wenige Randbedingungen gibt, die auf bekannte Eigenwerte und Eigenfunktionen führen.

Bei gemischten Randbedingungen (Teile von  $\partial\Omega$  sind mit Dirichlet RBen versehen, andere Teile von  $\partial\Omega$  mit Neumann RBen) sind in den allermeisten Fällen weder Eigenwerte noch Eigenfunktionen verfügbar.

Diese Einsichten sind Motivation genug, sich die moderneren Theorien der Poissongleichung anzusehen.

Dies ist zugegebener Massen im Rahmen dieser Vorlesung nicht einmal ansatzweise möglich, da die entsprechenden Hilfsmittel, i.e.

Distributionen, distributionelle Ableitungen, schwache Formulierung der  
PDE, Sobolevräume

nicht zur Verfügung stehen.

Nichtsdestotrotz können wir ohne allzu viel Aufwand den für die moderne Theorie sehr wichtigen

Variationszugang

vorstellen.

Die Variationsformulierung nimmt die schwache Formulierung der PDE in Sobolev Räume vorweg. Damit sind die folgenden Darlegungen ein Einstieg in die moderne Theorie der Poisson Gleichung.

Wir beschränken uns zunächst auf den eindimensionalen Fall. Ausnahmsweise sind bereits bei der Behandlung dieses eindimensionalen Falls alle wesentlichen Argumente enthalten.

Wir untersuchen

$$-u'' = f, \quad u(0) = u(1) = 0. \quad (99)$$

Gehen wir zunächst von stetigem  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  aus, so besitzt dieses RWP eine eindeutige Lösung, die durch zweimaliges Integrieren formal hingeschrieben - eine explizite Darstellung ist in den allermeisten Fällen nicht verfügbar - werden kann.

Nun multiplizieren wir (99) mit einer

Testfunktion  $\Phi \in C_0^1[0, 1]$ ,

wobei  $C_0^1[0, 1]$  jene stetig differenzierbaren Funktionen  $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  sind, für die  $\phi(0) = \phi(1) = 0$ .

Wir erhalten nach Integration

$$-\int_0^1 u''(x) \cdot \Phi(x) \, dx = \int_0^1 f(x) \cdot \Phi(x) \, dx,$$

und wenn wir einmal partiell integrieren erhalten wir wegen  $\Phi(0) = \Phi(1) = 0$ ,

$$\begin{aligned} -\int_0^1 u''(x) \cdot \Phi(x) \, dx &= -u''(x) \cdot \Phi(x) \Big|_{x=0}^{x=1} + \int_0^1 u'(x) \cdot \Phi'(x) \, dx \\ &= \boxed{\int_0^1 u'(x) \cdot \Phi'(x) \, dx = \int_0^1 f(x) \cdot \Phi(x) \, dx}. \end{aligned}$$

Wir definieren nun

Ist  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  stückweise stetig, so heisst  $u \in C_0^1[0, 1]$

variationelle Lösung von (99),

wenn

$$\int_0^1 u'(x) \cdot \Phi'(x) dx = \int_0^1 f(x) \cdot \Phi(x) dx, \quad \text{für alle } \Phi \in C_0^1[0, 1] \quad (100)$$

An dieser Formulierung sind mehrere Dinge bemerkenswert.

- Es tritt nur mehr die erste Ableitung von  $u$  auf. Eine variationelle Lösung von (99) muss also nicht zweimal differenzierbar sein.
- Die Funktion  $f$  muss nicht stetig sein, sondern  $f$  kann zB Sprünge haben. In diesen Fällen gibt es gar keine zweimal differenzierbare Lösung von (99). Dennoch gibt es eine variationelle Lösung von (99).
- Ist  $u$  eine klassische, zweimal differenzierbare Lösung von (99), so ist  $u$  auch eine variationelle Lösung von (99). Umgekehrt hat, wie oben angedeutet, (99) für etliche Funktionen  $f$  gar keine klassische Lösung, aber dennoch eine variationelle Lösung. Damit ist der Begriff “variationelle Lösung” eine Verallgemeinerung des klassischen Lösungsbegriffs.

Wir wollen noch kurz den Begriff “variationelle Lösung” erläutern.

Die Variationsrechnung hat ihre Wurzeln in der Beschreibung von Naturvorgängen. Etliche, wichtige Prozesse laufen so ab, dass eine bestimmte “Energie” oder “Entropie” etc insgesamt kleinstmöglich wird. Ist bekannt, um welche “Energie”, “Entropie” etc es sich handelt, so fließt dieses Wissen in die Modellierung des Vorgangs ein.

Mittlerweile ist die Variationsrechnung ein Teilgebiet der Mathematik, bei dem es darum geht, Funktionen zu finden, die bestimmte Ausdrücke minimieren oder maximieren.

Ein klassisches, mathematisches Beispiel hierfür ist die Frage:

Gegeben sei der Punkt  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ . Mit welcher stetig differenzierbaren Kurve  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  muss ich  $(0, 0)$  mit  $(x_0, y_0)$  verbinden, so dass diese Kurve die kleinstmögliche Länge hat ?

(Die richtige Antwort ist offensichtlich: “Mit einer geraden Strecke.”)

Mathematisch handelt es sich darum, unter all jenen stetig differenzierbaren Kurven  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit  $c(0) = (0, 0)$ ,  $c(1) = (x_0, y_0)$  jene zu finden, für die die Bogenlänge

$$\int_0^1 |\dot{c}(t)| dt \rightarrow \text{minimal!}$$

Die besondere Herausforderung besteht darin, eine Funktion und keinen Punkt im  $\mathbb{R}^n$  zu finden, so dass ein bestimmter Ausdruck minimal oder maximal wird.

Es gibt einen bemerkenswerten, namensgebenden Zusammenhang zwischen der Variationsrechnung und den variationellen Lösungen von (99): Die variationellen Lösungen von (99) sind genau jene Funktionen, welche ein zugeordnetes Funktional minimieren.

Mit anderen Worten: Jede variationelle Lösung von (99) minimiert dieses Funktional und jede Funktion, die dieses Funktional minimiert, ist eine variationelle Lösung von (99).

Das Funktional, um das es hier geht ist

$$\begin{aligned} F : C_0^1[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(v) &= \frac{1}{2} \int_0^1 (v'(x))^2 dx - \int_0^1 f(x) \cdot v(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \langle v', v' \rangle - \langle f, v \rangle. \end{aligned}$$

Dann gilt:

- Falls  $u$  ein Minimierer von  $F$  ist, dh wenn

$$F(u) \leq F(v), \quad \text{für alle } v \in C_0^1[0, 1],$$

dann gilt offenbar für alle  $0 < t \in \mathbb{R}$  und für alle  $\Phi \in C_0^1[0, 1]$ ,

$$F(u) \leq F(u \pm t\Phi),$$

woraus wir durch Subtraktion und Division durch  $t$  die Ungleichungen

$$\frac{F(u \pm t\Phi) - F(u)}{t} \leq 0, \quad 0 < t \in \mathbb{R}$$

erhalten. Schreiben wir diese Ungleichungen mit Hilfe von  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , so erhalten wir

$$\pm \langle u', \Phi' \rangle + \frac{t}{2} \langle \Phi, \Phi \rangle \mp \langle f, \Phi \rangle \leq 0.$$

Führen wir in diesen Ungleichungen  $t \downarrow 0$  aus, so erhalten wir

$$\pm (\langle u', \Phi' \rangle - \langle f, \Phi \rangle) \leq 0,$$

also

$$\langle u', \Phi' \rangle - \langle f, \Phi \rangle = 0.$$

Dies ist aber genau Gleichung (100)!

Also: Jeder Minimierer von  $F$  in  $C_0^1[0, 1]$  ist eine variationelle Lösung von (99).

- Umgekehrt sei nun  $u$  eine variationelle Lösung von (99), dh

$$\langle u', \Phi' \rangle - \langle f, \Phi \rangle = 0, \quad \text{für alle } \Phi \in C_0^1[0, 1].$$

Wir wollen nun zeigen, dass dann  $u'$  ein Minimierer von  $F$  ist, dh dass

$$F(u) \leq F(v), \quad \text{für alle } v \in C_0^1[0, 1].$$

Dazu setzen wir

$$w = v - u \in C_0^1[0, 1]$$

und betrachten wir die Abbildung

$$K : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad K(t) = F(u + tw).$$

Offensichtlich ist  $K$  (ausser für  $\langle w', w' \rangle = 0$ ) ein quadratisches Polynom:

$$F(u + tw) = \frac{1}{2} \langle u', u' \rangle + \langle f, u \rangle + t \cdot (\langle u', w' \rangle - \langle f, w \rangle) + \frac{t^2}{2} \langle w', w' \rangle.$$

Da  $u$  eine variationelle Lösung von (99) ist, verschwindet der Koeffizient von  $t$ . Somit gilt für alle  $t \in [0, 1]$ ,

$$\begin{aligned} F(u + tw) = K(t) &= \frac{1}{2} \langle u', u' \rangle + \langle f, u \rangle + \frac{t^2}{2} \langle w', w' \rangle \\ &\geq \frac{1}{2} \langle u', u' \rangle + \langle f, u \rangle = K(0) = F(u). \end{aligned}$$

Im Speziellen folgt

$$F(v) = F(u + (v - u)) = F(u + 1 \cdot w) \geq F(u).$$

- Eine genauere Untersuchung ergibt, dass die vorherige Argumentation deswegen so einfach zu führen war, weil  $F$  konvex ist, dh für alle  $\theta \in [0, 1]$  und alle  $v, w \in C_0^1[0, 1]$  gilt:

$$F(\theta \cdot v + (1 - \theta) \cdot w) \leq \theta \cdot F(v) + (1 - \theta) \cdot F(w).$$

Darüber hinaus gehend hat  $F$  sogar die Eigenschaft strikt konvex zu sein, dh

$$F\left(\frac{1}{2} \cdot v + \frac{1}{2} \cdot w\right) < \frac{1}{2} \cdot F(v) + \frac{1}{2} \cdot F(w), \quad \forall v \neq w, \quad v, w \in C_0^1[0, 1].$$

Diese strikte Konvexität hat eine bemerkenswerte Konsequenz:  $F$  hat höchstens einen Minimierer.

Seien nämlich  $v, w$  zwei verschiedene Minimierer von  $F$  in  $C_0^1[0, 1]$ , dann gilt  $F(v) = F(w)$ , aber andererseits wegen  $v \neq w$  und wegen der strikten Konvexität von  $F$ ,

$$F\left(\frac{1}{2} \cdot v + \frac{1}{2} \cdot w\right) < \frac{1}{2} \cdot F(v) + \frac{1}{2} \cdot F(w) = F(v),$$

dh der Wert von  $F$  an der Stelle  $\frac{1}{2} \cdot v + \frac{1}{2} \cdot w$  unterschreite den kleinstmöglichen Wert. Das kann nicht sein.

Damit ist auch klar: Es gibt höchstens eine variationelle Lösung von (99).

- Besitzt das Funktional  $F$  einen Minimierer? Gibt es eine variationelle Lösung von (99)? Die Antwort lautet: Ja, für stückweise stetiges  $f$  ist genau jenes  $u$ , das wir durch zweimaliges Integrieren und Anpassen an die Randdaten erhalten, diese variationelle Lösung. Den etwas länglichen Beweis bleiben wir aus Zeitgründen schuldig.

Nun wollen wir den interessanteren, höherdimensionalen Fall untersuchen. Der grösste Unterschied beim Übergang von einer zu mehreren Raumdimensionen ist die enorme Vielfalt an offenen, beschränkten Gebieten  $\Omega$ .

Um die Dinge einfach zu halten, beschränken wir uns entweder auf polygonale Gebiete (Quader, Parallelotop, Tetraeder etc) oder auf Gebiete, deren Berandung zumindest stetig differenzierbare Tangentialräume und Normalenvektorfelder besitzt. (Auf eine genauere Begriffsbildung muss verzichtet werden.)

Nicht nur eine Einschränkung der Gebiete ist notwendig, es muss auch Einiges über  $f$  vorausgesetzt werden. Der Begriff "stückweise stetig" lässt sich nämlich nicht ohne Weiteres auf höhere Dimensionen verallgemeinern, da die Unstetigkeitsmengen von  $f$  sehr vielfältig sein können.

Wir wollen die Dinge nicht zu kompliziert machen und beschränken uns deshalb auf stetige Funktionen  $f: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ , dh  $f$  ist nicht nur auf  $\Omega$  sondern auch am Rand von  $\Omega$  definiert und ausserdem überall stetig.

Wir definieren wieder

$C_0^1(\bar{\Omega}) =$  Menge der stetig differenzierbaren  $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ , die auf  $\partial\Omega=0$  sind.

Dann ist die variationelle Formulierung von

$$-\Delta u = f, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \quad (101)$$

gegeben durch

$$\int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \Phi)(\vec{x}) \, d\vec{x} = \int_{\Omega} f(\vec{x}) \cdot \Phi(\vec{x}) \, d\vec{x}, \quad \text{für alle } \Phi \in C_0^1(\bar{\Omega}), \quad (102)$$

wobei es sich bei den Integralen natürlich um mehrdimensionale Integrale handelt.

Ganz wie im eindimensionalen Fall gilt:

$u \in C_0^1(\bar{\Omega})$  ist genau dann variationelle Lösung von (101), wenn  $u$  das Funktional

$$\begin{aligned} F: C_0^1(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(v) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2(\vec{x}) \, d\vec{x} - \int_{\Omega} f(\vec{x}) \cdot v(\vec{x}) \, d\vec{x} \\ &= \frac{1}{2} \langle v', v' \rangle - \langle f, v \rangle \end{aligned}$$

minimiert, dh wenn

$$F(u) \leq F(v), \quad \text{für alle } v \in C_0^1(\bar{\Omega}).$$

Neuerlich ist  $F$  strikt konvex, so dass sowohl  $F$  höchstens einen Minimierer besitzt als auch höchstens eine variationelle Lösung von (101) existiert.

Ungleich schwieriger ist die Frage zu beantworten (die Antwort ist unter den getroffenen Voraussetzungen: Ja), ob es eine variationelle Lösung von (101) gibt.

Dass diese Frage so schwer zu beantworten ist liegt vor allem daran, dass es anders als im eindimensionalen Fall kein Verfahren (wie zB Integrieren) gibt, mit dessen Hilfe wir die Lösung halbwegs explizit hinschreiben können.

Insofern sind wir was die Berechenbarkeit angeht keinen Schritt weiter als bei der Entwicklung nach Eigenfunktionen.

Andrerseits erlaubt die Variationsformulierung auf sehr einfache Weise die Konstruktion numerischer Verfahren, die mittlerweile zu den wichtigsten Lösungsverfahren gehören.

Diese Verfahren sind die Finite Element Methoden, die wir im nächsten Abschnitt kennen lernen.

## 12. Übung “Differentialgleichungen für Ingenieure”

Ausgabe: 01.07.03

Bearbeitung: 07.07.03-11.07.03

Abgabe: —

**Dieses Übungsblatt ist zur Wiederholung und zum Ergattern von Zusatzpunkten.  
Jede Aufgabe bringt ausschliesslich als Tafelleistung 10 Punkte.**

28. Finden Sie alle Lösungen der ODE  $y' - xy = x$ .  
29. Wir betrachten das ODE System

$$\frac{d\vec{y}}{dt} = \mathbf{M} \cdot \vec{y}, \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ist  $\vec{0}$  eine global asymptotisch stabile Lösung ?

30. Bestimmen Sie die maximale Lösung von  $y' = xy$ ,  $y(0) = -1$ .  
31. Bestimmen Sie die stationären Punkte des ODE Systems erster Ordnung.  
Klassifizieren Sie die stationären Punkte nach folgendem Schema:
- asymptotisch stabil;
  - instabil;
  - keine Aussage nach der Stabilitätsbedingung autonomer System (Satz 8) möglich.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= xy - x^2 + 2x \\ \dot{y} &= 3xy + 2y^2 - y \end{aligned}$$

32. Lösen Sie das folgende homogene AWP.  
 $\ddot{u} + 4\dot{u} + 5u = 0$ ,  $u(0) = 1$ ,  $\dot{u}(0) = 0$ .  
33. Bestimmen Sie mit dem Ansatzverfahren die allgemeine Lösung folgender ODE.  
 $y'' + y = 3 \cos x$ .  
34. Lösen Sie mit dem Ansatzverfahren folgendes AWP.  
 $y'' + 2y' + y = e^x + x e^x$ .  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -7/4$ .

35. Formulieren Sie das implizite Eulerverfahren für das folgende AWP. Stellen Sie die Rekursion in expliziter Weise dar.

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y_1 + 4y_2 \\ 2y_1 - y_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$x \in [0, 3], N = 99.$

36. Berechnen Sie mit Hilfe der Grundformel die Laplace Transformierte von  $f$ , wobei  $f(t)$  für  $t > 0$  gegeben ist und  $f(t) = 0$  für  $t \leq 0$  gilt:  
 $f(t) = 2 \cos t - \sin(2t).$
37. Ermitteln Sie die Laplace Transformierte von  $f$ , wobei  $f(t)$  für  $t > 0$  gegeben ist und  $f(t) = 0$  für  $t \leq 0$  gilt:  
 $f(t) = H(t - 2)t^2.$
38. Bestimmen Sie die inverse Laplace Transformierte von

$$z(s) = \frac{s^2 + 2s + 3}{s^2(s^2 + 2)}.$$

39. Bestimmen Sie die Laplace Lösung von folgendem AWP (ODE System).

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t - 1 \\ t^2 - t^3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

40. Bestimmen Sie die Laplace Lösung von folgendem AWP.  
 $\ddot{u} + 2\dot{u} + 2u = e^{-t} + H(t - 1) \cdot t, \quad u(0) = \dot{u}(0) = 1.$
41. Bestimmen Sie die Lösungsmenge von folgendem RWP.  
 $y'' + 4y = \cos(2x), \quad y(0) = 1, y(1) = 0.$
42. Bestimmen Sie die Lösungsmenge in Abhängigkeit von  $L$ .  
 $y'' = 0, \quad y(0) + y'(L) = 0, \quad y(L) = 0.$
43. Bestimmen Sie eine vollständige Folge von Eigenpaaren von  $L(u) = -u''$  bezüglich  $u'(0) = u'(L) = 0$ .
44. Lösen Sie mit Hilfe des Separationsverfahrens die hier speziell als  $\dot{u} - u'' = f$  gewählte Wärmeleitungsgleichung bezüglich der gegebenen Funktion  $f$  und der spezifizierten Anfangs- und Randwerte. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Grenzgleichung  $t \uparrow +\infty$ .  
 $f = 0, \quad u(0, x) = 1, \quad u'(t, 0) = u(t, \pi) = 0.$

## 10 Die Finite Element Methode

In endlicher Zeit können wir nur endlich viele Grundrechnungsarten von einigen rationalen Zahlen endlicher Mantissenlänge (oder ähnlich einfache algebraische Umformungen einiger vordefinierter Terme) vornehmen.

Also können wir (von wenigen trivialen Fällen abgesehen) von einer Funktion, die Lösung einer Differentialgleichung ist, nur für endlich viele Argumente mit endlich vielen Grundrechnungsoperationen Näherungswerte für den Funktionswert bestimmen.

Damit wird die Frage wichtig, wie dies auf möglichst genaue und effiziente Weise erfolgen kann.

Eine allgemein gültige Antwort kann nicht gegeben werden. In vielen Fällen liefert die

### Finite Element Methode

für PDEs durchaus brauchbare Resultate.

**Bemerkung.** Für elementare Funktionen - etwa die Exponentialfunktion oder die Winkelfunktionen  $\sin$ ,  $\cos$  stehen Potenzreihen zur Verfügung. Für die Lösungen von PDEs sind derartige Darstellungen eher selten zu haben.

**1.Idee der FEM.** Wir suchen eine approximierende Lösung einer Differentialgleichung nicht in einem unendlichdimensionalen Vektorraum (etwa in der Menge aller differenzierbarer Funktionen mit vorgegebenem Definitionsbereich), sondern in einem endlichdimensionalen Vektorraum.

**Beispiel, eindimensional auf Intervall  $[0, 1]$ .**

$F_N[0, 1]$  = Menge der stetigen Funktionen, die auf jedem Teilintervall  $[jh, (j+1)h]$ ,  $0 \leq j \leq N$ ,  $h = 1/(N+1)$ , affin sind.

**Bemerkung.** Wieso ist  $F_N[0, 1]$  endlichdimensional? Jede der Funktionen aus  $F_N[0, 1]$  ist durch  $N+2$  Parameter, nämlich die Funktionswerte an  $0, h, 2h, \dots, Nh, 1$  eindeutig festgelegt. Also  $\dim F_N[0, 1] = N+2$ .

In  $F_N[0, 1]$  gibt es eine wichtige Basis, nämlich die  $N+2$  "Hutfunktionen"

$$b_k \in F_N[0, 1], \quad b_k(jh) = \begin{cases} 1 & , \quad j = k \\ 0 & , \quad j \neq k \end{cases}, \quad 0 \leq k \leq N+1.$$

Diese Hutfunktionen erlauben es sehr schnell, zwischen den Funktionswerten und den Koeffizienten der Basisdarstellung hin und her zu schalten.

Sind  $f_0, \dots, f_{N+1}$  die Funktionswerte einer Funktion  $f \in F_N[0, 1]$  an den Stellen  $0, h, 2h, \dots, Nh, 1$ , so ist

$$f = f_0 \cdot b_0 + f_1 \cdot b_1 + \dots + f_{N+1} \cdot b_{N+1}.$$

## 2.Idee der FEM an Hand von

$$-y'' = f(x), \quad y(0) = a, y(1) = b.$$

Wir gehen zur Variationsformulierung über:

$$\int_0^1 y'(x)\Phi'(x) dx = \int_0^1 f(x) \cdot \Phi(x) dx,$$

für alle  $\Phi \in C^1[0, 1]$  mit  $\Phi(0) = \Phi(1) = 0$ ,

wobei

$$y \in C^1[0, 1], \quad y(0) = a, y(1) = b.$$

In dieser Variationsformulierung ersetzen wir den unendlichdimensionalen Vektorraum “ $C^1[0, 1]$ ” durch den endlichdimensionalen Vektorraum “ $F_N[0, 1]$ ”. Wir erhalten

$$\left. \begin{array}{l} \int_0^1 Y'(x)\phi'(x) dx = \int_0^1 f(x) \cdot \phi(x) dx, \\ \text{für alle } \phi \in F_N[0, 1] \text{ mit } \phi(0) = \phi(1) = 0 \\ Y \in F_N[0, 1], \quad Y(0) = a, Y(1) = b. \end{array} \right\} \quad (\text{FEM}).$$

In dieser Formulierung ist ein wenig Vorsicht geboten, da “ $Y'$ ” und “ $\phi'$ ” auftreten, ohne dass zu erwarten ist, dass eine dieser Funktionen tatsächlich differenzierbar ist.

Ohne auf weitere Details eingehen zu können: Die Funktionen aus  $F_N[0, 1]$  sind “fast” differenzierbar und wir können in (FEM) die Ableitungen durch stückweise konstante Funktionen, die wir an den eventuellen Sprungstellen  $h, 2h, \dots, Nh$  der Ableitung zB durch “0” definieren, ersetzen.

Diese Konstruktion führt zB für  $b_k$  auf die Funktion

$$b'_k(x) = \begin{cases} N+1 & , \quad (k-1)h < x < kh \\ -(N+1) & , \quad kh < x < (k+1)h \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Ganz ähnlich wie in der letzten Vorlesung zeigen wir, dass es genau eine Lösung von (FEM) gibt.

Wie ist diese zu berechnen ?

Interessanter Weise führt die Berechnung auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems.

Dazu gehen wir von dem Ansatz

$$Y(x) = \sum_{j=0}^{N+1} y_j \cdot b_j(x)$$

mit zu bestimmenden Koeffizienten  $y_0, \dots, y_{N+1} \in \mathbb{R}$  aus.

Offenbar gilt  $Y(jh) = y_j$ ,  $0 \leq j \leq N+1$ .

Betrachten wir (FEM) zunächst nur für die endlich vielen Testfunktionen  $\phi(x) = b_k(x)$ ,  $1 \leq k \leq N$  (dies sind genau jene Hutfunktionen, die für  $x = 0$  und  $x = 1$  verschwinden). Dann erhalten wir die  $N$  Gleichungen

$$\int_0^1 Y'(x) \cdot b_k(x) dx = f_k, \quad 1 \leq k \leq N, \quad (103)$$

wobei wir

$$f_k = \int_0^1 f(x) \cdot b_k(x) dx, \quad 1 \leq k \leq N,$$

verwendeten.

Nehmen wir an, dass diese  $N$  Gleichungen erfüllt sind, dann gilt für beliebiges  $\phi \in F_N[0, 1]$  mit  $\phi(0) = \phi(1) = 0$ :

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^N \phi(jh) \cdot b_j(x),$$

und damit

$$\begin{aligned} \int_0^1 Y'(x) \cdot \phi'(x) dx &= \int_0^1 Y'(x) \cdot \left( \sum_{j=1}^N \phi(jh) \cdot b_j(x) \right)' dx \\ &= \int_0^1 Y'(x) \cdot \left( \sum_{j=1}^N \phi(jh) \cdot b_j'(x) \right) dx = \sum_{j=1}^N \phi(jh) \int_0^1 Y'(x) \cdot b_j'(x) dx \\ &= \sum_{j=1}^N \phi(jh) f_j = \sum_{j=1}^N \phi(jh) \int_0^1 f(x) \cdot b_j(x) dx \\ &= \int_0^1 f(x) \cdot \left( \sum_{j=1}^N \phi(jh) \cdot b_j(x) \right) dx = \int_0^1 f(x) \cdot \phi(x) dx, \end{aligned}$$

Konsequenz: Wir müssen nur die  $N$  Gleichungen (103) berücksichtigen.

Da wir  $Y \in F_N[0, 1]$  mit  $Y(0) = a, Y(1) = b$  so bestimmen wollen, dass (103) gilt, modifizieren wir den Ansatz für  $Y$  und erhalten

$$Y(x) = a \cdot b_0(x) + \sum_{j=1}^N y_j \cdot b_j(x) + b \cdot b_{N+1}(x).$$

Setzen wir dies in die  $N$  Gleichungen von (103) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} a \cdot \int_0^1 b_0'(x) \cdot b_k'(x) dx + \sum_{j=1}^N y_j \int_0^1 b_j'(x) \cdot b_k'(x) dx + b \cdot \int_0^1 b_{N+1}'(x) \cdot b_k'(x) dx \\ = f_k, \quad 1 \leq k \leq N. \end{aligned}$$

Setzen wir für  $0 \leq j, k \leq N + 1$

$$m_{j,k} = \int_0^1 b'_j(x) \cdot b'_k(x) dx,$$

so können wir dieses Gleichungssystem schreiben als

$$\mathbf{M} \cdot \vec{y} = \vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 - a \cdot m_{1,0} - b \cdot m_{1,N+1} \\ \vdots \\ f_N - a \cdot m_{N,0} - b \cdot m_{N,N+1} \end{pmatrix},$$

wobei

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{N,1} & \dots & m_{N,N} \end{pmatrix}.$$

Wir erinnern daran, dass die Komponenten des Lösungsvektors dieses linearen Gleichungssystems die Approximationen an die Lösung der ODE an den Knotenpunkten  $0, h, 2h, \dots, Nh, 1$  sind.

Frage: Ist dieses lineare Gleichungssystem überhaupt eindeutig lösbar?

Antwort: Ja, weil  $\mathbf{M}$  eine gutartige Tridiagonalgestalt hat:

$$m_{k,k} = 2(N + 1), \quad 1 \leq k \leq N,$$

$$m_{k,k+1} = m_{k+1,k} = -(N + 1), \quad 1 \leq k \leq N - 1,$$

$$m_{j,k} = 0, \quad \text{für } |j - k| > 1, \quad 1 \leq j, k \leq N.$$

**Bemerkung.** Die Variationsformulierung (FEM) bezieht sich auf die Aufgabe, das Funktional

$$E_N : F_{N,a,b}[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad E_N(w) = \frac{1}{2} \int_0^1 |w'(x)|^2 dx - \int_0^1 f(x) \cdot w(x) dx$$

in der Menge

$$F_{N,a,b}[0, 1] = \{w \in F_N[0, 1] : w(0) = a, w(1) = b\}$$

zu minimieren. Wie im letzten Abschnitt kann ohne viel Mühe gezeigt werden, dass  $E_N$  genau einen Minimierer  $Y[N]$  in  $F_{N,a,b}[0, 1]$  besitzt und dieser genau durch (FEM) charakterisiert ist.

Diese Einsicht erlaubt es auf einfache (uns aber nichtsdestotrotz nicht verfügbare) Weise zu beweisen, dass

$$Y[N] \rightarrow y, \quad \text{für } N \uparrow +\infty,$$

wobei  $y$  die eindeutige Lösung von  $-y'' = f(x)$ ,  $y(0) = a$ ,  $y(1) = b$  ist.

**Bemerkung.** Zur Lösung von  $-\Delta u = f(x)$  auf  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ,  $d \in \mathbb{N}^+$ ,  $u = u_0$  auf  $\partial\Omega$ , kann auf ähnliche Weise eine FEM definiert werden. Allerdings sind hier etliche geometrische Triangulierungsprobleme zu lösen. Für  $d = 2, 3$  gibt es hierfür gut verstandene und oft getestete, recht zuverlässige Programme.

Zum Abschluss dieses Kapitels beschäftigen wir uns noch einmal mit einer eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung

$$\dot{u} - u'' = f(t, x), \quad u(0) = u(1) = 0, \quad u(0, x) = v(x). \quad (104)$$

Wir wollen für diese Gleichung die FEM vorstellen.

Dazu multiplizieren wir (104) für festes  $t \in \mathbb{R}_0^+$  mit  $\Phi \in C_0^1[0, 1]$  und integrieren von 0 bis 1 und erhalten

$$\int_0^1 \dot{u}(t, x) \cdot \Phi(x) dx + \int_0^1 u'(t, x) \cdot \Phi'(x) dx = \int_0^1 f(t, x) \cdot \Phi(x) dx. \quad (105)$$

Nun suchen wir eine FEM Lösung von der Form

$$\sum_{j=1}^N u_j(t) \cdot b_j(x), \quad u_j : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad 1 \leq j \leq N,$$

indem wir fordern, dass (105) für  $\Phi = b_k$ ,  $1 \leq k \leq N$ , gültig ist.

Wir erhalten nach elementaren Umformungen

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \dot{u}_j(t) \int_0^1 b_j(x) \cdot b_k(x) dx + \sum_{j=1}^N \dot{u}_j(t) \int_0^1 b_j'(x) \cdot b_k'(x) dx \\ = f_k(t), \quad 1 \leq k \leq N, \end{aligned}$$

wobei

$$f_k(t) = \int_0^1 f(t, x) \cdot b_k(x) dx, \quad t \in \mathbb{R}_0^+, \quad 1 \leq k \leq N.$$

Verwenden wir die schon früher definierte Matrix  $\mathbf{M}$  und definieren wir zusätzlich

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{N,1} & \dots & b_{N,N} \end{pmatrix},$$

$$b_{j,k} = \int_0^1 b_j(x) \cdot b_k(x) dx, \quad 0 \leq j, k \leq N + 1,$$

so erhalten wir die Differentialgleichung mit Anfangsbedingung

$$\mathbf{B} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} + \mathbf{M} \cdot \vec{u} = \vec{f}(t), \quad \vec{u}(0) = \vec{v}, \quad (106)$$

wobei

$$\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_N(t) \end{pmatrix}$$

jener zeitabhängige Vektor ist, dessen Koordinaten Approximationen an die Lösung  $u$  von (104) an den Knoten  $0, h, 2h, \dots, Nh, 1$  ist,

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_N(t) \end{pmatrix},$$

und die Koordinaten  $v_1, \dots, v_N$  von  $\vec{v}$  via

$$\sum_{j=1}^N v_j \cdot b_j(x)$$

eine Approximation an die Anfangsbedingung repräsentiert.

Es ist relativ einfach zu sehen, dass die Matrix  $\mathbf{B}$  invertierbar ist. Wir erhalten das lineare AWP

$$\frac{d\vec{u}}{dt} + (\mathbf{B}^{-1}\mathbf{M}) \cdot \vec{u} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \vec{f}(t), \quad \vec{u}(0) = \vec{v}.$$

Dieses ist natürlich eindeutig global lösbar.

**Bemerkung.** In der Praxis wird (106) zuverlässig durch geeignete Algorithmen, die auf die Berechnung von  $\mathbf{B}^{-1}$  verzichten, gelöst.

**Bemerkung.** Bei der Herleitung von (106) hatten wir stillschweigend vorausgesetzt, dass auch die Anfangsfunktion  $v$  die richtigen Randbedingungen erfüllt, i.e. dass  $v(0) = v(1) = 0$  gilt. Ist dies NICHT der Fall, so sind Modifikationen erforderlich.

## 11 Hyperbolische PDEs

Bei der mathematischen Beschreibung von Strömungsphänomenen - zB von Flüssigkeiten oder Gasen - wird zunächst von Erhaltungsgrößen - zB der Masse - ausgegangen.

Die resultierenden Gleichungen sind vom "hyperbolischen Typ". Das Charakteristische dieses Gleichungstypus liegt darin, dass sich die Erhaltungsgrößen im Lösungsverhalten widerspiegeln.

Wir wollen eine der wichtigsten hyperbolischen Gleichungen, die

### Kontinuitätsgleichung

kennen lernen.

Die Kontinuitätsgleichung wird aus dem Prinzip der Massenerhaltung hergeleitet. Auf eine genaue Herleitung muss aus Zeitgründen verzichtet werden.

Die betrachtete Flüssigkeit wird im Zeitintervall  $[0, +\infty[ = \mathbb{R}_0^+$ , in einem räumlichen Gebiet  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  betrachtet.

Im Rahmen unseres Modells versuchen wir, die Flüssigkeit durch zwei physikalische Größen zu erfassen:

- a) Das Geschwindigkeitsfeld

$$\vec{V} : \mathbb{R}_0^+ \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

beschreibt die Bewegung der Flüssigkeit in folgendem Sinn: Befindet sich ein Flüssigkeitsteilchen zur Zeit  $t \in \mathbb{R}_0^+$  am Ort  $\vec{x} \in \bar{\Omega}$ , so ist seine Geschwindigkeit  $\vec{V}(t, \vec{x})$ .

- b) Die Massendichte

$$\rho : \mathbb{R}_0^+ \times \bar{\Omega} \rightarrow [0, +\infty[$$

beschreibt die Massenverteilung in der Flüssigkeit. In einem Teilvolumen  $\Omega' \subseteq \Omega$  befindet sich zur Zeit  $t \in \mathbb{R}_0^+$  eine Flüssigkeitsmenge der Gesamtmasse

$$\int_{\Omega'} \rho(t, \vec{x}') d\vec{x}'.$$

Unter Zuhilfenahme des Gauss'schen Integralsatzes (auf Genaueres muss, wie gesagt, verzichtet werden) erhalten wir die Kontinuitätsgleichung

$$\dot{\rho} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0. \quad (107)$$

Im Folgenden betrachten wir die Kontinuitätsgleichung in EINER Raumdimension zu untersuchen.

### 11.1 $\dot{\rho} + V(t) \cdot \rho' = 0$

Reduzieren wir die Kontinuitätsgleichung (107) auf den (räumlich) eindimensionalen Fall, so wird aus dem Flüssigkeitsgebiet  $\Omega$  ein offenes Intervall  $]a, b[$  und das Geschwindigkeitsfeld ist nicht mehr vektorwertig, sondern skalar:  $V : \mathbb{R}_0^+ \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass  $a = 0, b = 1$ .

Die Kontinuitätsgleichung erhält die etwas freundlichere Gestalt

$$\dot{\rho} + (V \cdot \rho)' = 0. \quad (108)$$

Damit wir nicht gleich bei den auf Grund legendes Verständnis abzielenden einfachsten Argumenten in allzu vielen rechentechnischen Schritten versinken, nehmen wir einmal an, dass das Geschwindigkeitsfeld  $V$  räumlich homogen ist, dh nur von der Zeit  $t$  abhängt.

In diesem Fall reduziert sich (108) auf

$$\dot{\rho} + V(t) \cdot \rho' = 0. \quad (109)$$

Wir wollen diese PDE mit der

#### Charakteristikenmethode

lösen und dabei wollen wir en passant die Frage diskutieren, welche Art von Anfangs- und Randbedingungen sinnvoll vorgeschrieben werden können.

Die Grundidee der Charakteristikenmethode ist sehr einfach. Wir suchen Kurven

$$\vec{c} : I \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \times [0, 1], \quad \vec{c}(s) = (t(s), x(s)),$$

(hier hängt  $I$  von der Kurve ab), so dass die Lösung von (109) entlang dieser Kurven konstant ist, dh die Abbildung

$$\rho \circ \vec{c} : I \rightarrow [0, +\infty[, \quad s \mapsto \rho(t(s), x(s)),$$

soll konstant sein:

$$\rho(t(s), x(s)) = \text{const}, \quad s \in I.$$

Differenzieren wir diese Gleichung nach  $s$  so erhalten wir

$$\dot{\rho} \cdot \frac{dt}{ds} + \rho' \cdot \frac{dx}{ds} = 0.$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit (109),

$$\dot{\rho} \cdot 1 + \rho' \cdot V(t) = 0,$$

so erhalten wir durch Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= 1 \\ \frac{dx}{ds} &= V(t(s)) \end{aligned}, \quad s \in I. \quad (110)$$

Offenbar handelt es sich bei (110) um ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung.

Die allgemeine Lösung lautet

$$t(s) = c_1 + s, \quad x(s) = c_2 + \Phi(s + c_1), \quad s \in I,$$

wobei  $\Phi$  eine Stammfunktion von  $V$  ist.

**Die so gefundenen Kurven sind die Charakteristiken von (109).**

Die Charakteristiken sind dadurch bestimmt, dass die Lösung entlang dieser Kurven konstant ist.

Wie wir durch Kenntnis der Charakteristiken die Lösung von (109) an einer bestimmten Stelle auswerten können und was wir mit dieser Darstellung über mögliche Anfangs- und Randwerte sagen können, erläutern wir am besten an Hand zweier Beispiele.

**Beispiel**  $\dot{\rho} + \rho' = 0$ .

Hier ist  $V(t) = 1$ , also erhalten wir mit der Charakteristikenmethode

$$t(s) = c_1 + s, \quad x(s) = c_2 + s,$$

wobei wir zwei Konstanten zu einer einzigen Konstanten zusammen gefasst haben. Subtraktion ergibt

$$t(s) - x(s) = c, \quad c \in \mathbb{R},$$

dh die Lösung der PDE bleibt entlang der Geraden  $t - x = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , konstant. Eine graphische Diskussion zeigt: Anfangswerte können für  $t = 0$  vorgeschrieben werden,

$$\rho(0, x) = \rho_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

und damit sind die Randwerte für  $x = 1$  und  $0 \leq t \leq 1$  automatisch festgelegt, dh

**die Anfangswerte werden unverändert transportiert.**

Wir stellen fest, dass wir nur an einem Rand die Daten vorschreiben können. Da offenbar ein Transport von links nach rechts erfolgt, erscheint es sinnvoll, Randdaten am linken Rand vorzuschreiben:

$$\rho(t, 0) = r(t), \quad t \in \mathbb{R}_0^+,$$

wobei wir aus Stetigkeitsgründen offenbar fordern müssen:

$$\rho_0(0) = r(0).$$

Wie ermitteln wir nun  $\rho(t_0, x_0)$ ?

Sehr einfach: Wir bestimmen die Charakteristik durch  $(t_0, x_0)$  - das ist die Gerade  $t - x = t_0 - x_0$  - und ermitteln jenen Punkt auf dieser Geraden, der den Teil des Randes von  $\mathbb{R}_0^+ \times [0, 1]$  schneidet, auf dem Anfangs- bzw Randwerte von  $\rho$  vorgeschrieben sind.

Dies ist ein Punkt  $(t_*, x_*)$  mit  $t_* - x_* = t_0 - x_0$  und  $t_* = 0$  oder  $x_* = 0$ .

Nach Konstruktion gilt  $\rho(t_0, x_0) = \rho(t_*, x_*)$ .

Ist  $t_* = 0$ , so gilt  $x_* = x_0 - t_0$ , also  $\rho(t_0, x_0) = \rho(0, x_*) = \rho_0(x_*) = \rho_0(x_0 - t_0)$ .

Ist  $x_* = 0$ , so gilt  $t_* = t_0 - x_0$ , also  $\rho(t_0, x_0) = \rho(t_*, 0) = r(t_*) = r(t_0 - x_0)$ .

Dazu noch ein Beispiel: Es sei  $\rho_0(x) = 2 - x$  und es sei  $r(t) = 1/(1 + t^2)$ .

Wir wollen  $\rho(1/2, 1/4)$  und  $\rho(5, 1/2)$  bestimmen.

Der Punkt  $(1/4, 1/2)$  liegt auf der Charakteristik  $t - x = -1/4$ , welche die Gerade  $t = 0$  in  $(0, 1/4)$  schneidet. Also gilt  $\rho(1/2, 1/4) = \rho_0(1/4) = 2 - 1/4 = 7/4$ .

Der Punkt  $(5, 1/2)$  liegt auf der Charakteristik  $t - x = 9/2$ , welche die Gerade  $x = 0$  im Punkt  $(9/2, 0)$  schneidet. Also gilt  $\rho(5, 1/2) = r(9/2) = 4/85$ .

Im vorliegenden Fall liegen die Verhältnisse so einfach, dass wir auch zu einer "expliziten" Darstellung der Lösung - nun wieder für  $\rho_0, r$  - kommen können:

$$\rho(t, x) = \begin{cases} \rho_0(x - t) & , \quad 0 \leq x - t \leq 1 \\ r(t - x) & , \quad 0 < t - x \end{cases}$$

**Beispiel.**

$$\dot{\rho} - \frac{2}{\pi} \frac{1}{1 + t^2} \rho' = 0.$$

Wir erhalten mit der Charakteristikenmethode die Charakteristiken

$$t = t, \quad x(t) = c_1 - \frac{2}{\pi} \arctan(t + c_2).$$

Offenbar findet ein Transport von rechts nach links statt. Also können wir die Daten

$$\rho(0, x) = \rho_0(x), x \in [0, 1], \quad \rho(t, 1) = r(t), t \in \mathbb{R}_0^+$$

vorschreiben (wobei wir aus Stetigkeitsgründen  $\rho_0(1) = r(0)$  fordern).

Eine ähnliche Vorgehensweise wie bei obigem Beispiel zeigt:

$$\rho(t, x) = \begin{cases} \rho_0\left(x + \frac{2}{\pi} \arctan t\right) & , \quad 0 \leq x + \frac{2}{\pi} \arctan t \leq 1 \\ r\left(\tan\left(\arctan t - \frac{\pi}{2}(1 - x)\right)\right) & , \quad 1 < x + \frac{2}{\pi} \arctan t \end{cases}$$

## 11.2 $\dot{\rho} + V(x) \cdot \rho' = W(x) \cdot \rho(x)$

Nun wenden wir die Charakteristikenmethode auf die PDE

$$\dot{\rho} + V(x) \cdot \rho' = W(x) \cdot \rho(x) \quad (111)$$

an. Der wichtigste Unterschied von (111) und der im letzten Abschnitt behandelten PDE liegt darin, dass nun die Funktion  $\rho$  ohne Ableitung auftritt.

Wir modifizieren den Ansatz der Charakteristikenmethode ein wenig, in dem wir wieder Kurven

$$\vec{c}: I \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \times [0, 1], \quad \vec{c}(s) = (t(s), x(s)),$$

suchen, entlang derer sich  $\rho$  "einfach" entwickelt.

Konkret versuchen wir Kurven  $\vec{c}$  so zu bestimmen, dass zwar

$$\rho(t(s), x(s)) = H(s), \quad s \in I \quad (112)$$

für eine nicht notwendiger Weise konstante Funktion  $H$  gilt, aber  $H$  "einfach" zu ermitteln ist.

Differenzieren wir (112) nach  $s$ , so erhalten wir

$$\dot{\rho} \cdot \frac{dt}{ds} + \rho' \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{dH}{ds}. \quad (113)$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit (111),

$$\dot{\rho} \cdot 1 + \rho' \cdot V(x) = W(x) \cdot \rho(x),$$

so erhalten wir zunächst das ODE System

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= 1 \\ \frac{dx}{ds} &= V(x(s)) \end{aligned}, \quad s \in I. \quad (114)$$

Setzen wir eindeutige Lösbarkeit voraus (diese Forderung bezieht sich auf  $V$ ), so erhalten wir

$$t(s) = s + c_1, \quad x(s) = \Gamma(s + c_2),$$

wobei wir die Funktion  $\Gamma$  durch Lösen der (separablen) zweiten ODE von (114) erhalten.

Nun müssen wir noch  $H(s)$  bestimmen.

Ein Vergleich der rechten Seiten von (113) und (111) ergibt die ODE

$$\frac{dH}{ds} = W(x(s)) \cdot \rho(t(s), x(s)) = W(\Gamma(s + c_2)) \cdot H(s).$$

Die allgemeine Lösung dieser ODE ist

$$H(s) = c_3 \cdot e^{\Psi(s+c_2)}, \quad s \in I,$$

wobei  $\Psi$  eine Stammfunktion von  $W \circ \Gamma$  ist. Die Konstante  $c_3$  erhalten wir durch Anpassung an die Anfangs- bzw Randdaten.

Allzu viele weitere, theoretische Untersuchungen sind hier fehl am Platz. Ein Beispiel sollte helfen, die Dinge klarer darzulegen.

**Beispiel.**  $\dot{\rho} + x \cdot \rho' = -\rho$ .

Offenbar ist hier  $V(x) = x$  und  $W(x) = -1$ . Die Gleichung ist die eindimensionale Kontinuitätsgleichung  $\dot{\rho} + (x \cdot \rho)' = 0$  mit Geschwindigkeitsfeld  $V(x) = x$ .

Bestimmen wir zunächst die Charakteristiken und versuchen, mögliche Anfangs- und Randwerte zu identifizieren.

Das ODE System lautet

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= 1 \\ \frac{dx}{ds} &= x(s) \end{aligned}, \quad s \in I.$$

Es gilt  $t(s) = s + c_1$  und  $x(s) = c_2 e^s$ , was wir kürzer als

$$t = s, \quad x(s) = ce^s$$

schreiben können.

Interessanter Weise können wir lediglich die Anfangsdaten

$$\rho(0, x) = \rho_0(x), \quad x \in [0, 1],$$

vorschreiben.

Nun wollen wir die Entwicklung von  $\rho$  entlang der Kurven  $(s, ce^s)$  bestimmen.

Durch Differenzieren erhalten wir mit  $H(s) = \rho(s, ce^s)$ ,

$$\frac{dH}{ds} = W(ce^s) \cdot H(s) = -H(s),$$

demnach

$$H(s) = c_3 e^{-s}.$$

Nun wollen wir  $\rho(t_0, x_0)$  bestimmen. Die Charakteristik durch  $(t_0, x_0)$  ist gegeben durch  $t = s$ ,  $x(s) = x_0 e^{s-t_0}$ . Diese Kurve schneidet die Achse  $t = 0$  im Punkt  $x_0 e^{-t_0}$ . Wir erhalten damit  $H(s) = \rho_0(x_0 e^{-t_0}) e^{-s}$ , woraus wegen  $t = s$  und  $\rho(t(s), x(s)) = H(s)$  folgt:  $\rho(t_0, x_0) = e^{-t_0} \cdot \rho_0(x_0 e^{-t_0})$ .

Wir lesen die Lösung ab:

$$\rho(t, x) = e^{-t} \cdot \rho_0(xe^{-t}).$$

### 11.3 Die Burgers Gleichung

Die Charakteristikenmethode ist im Prinzip auch zur Lösung nichtlinearer hyperbolischer PDEs einsetzbar.

Allerdings haben nichtlineare hyperbolische PDEs unter Umständen ein sehr kompliziertes Lösungsverhalten - es gibt uU unstetige Lösungen, unter denen Entropielösungen ausgezeichnet sind, es treten uU Verdichtungs- und Verdünnungswellen und Schocks auf -, das im Rahmen dieser Vorlesung nicht einmal annäherungsweise besprochen werden kann.

Immerhin kann die Charakteristikenmethode dazu verwendet werden, das Auftreten ungewöhnlichen Lösungsverhaltens zu antizipieren.

Dazu zwei Beispiele, die sich auf die Burgers Gleichung

$$\dot{u} + uu' = 0$$

beziehen.

**Beispiel.**  $\dot{u} + uu' = 0$ ,  $u(0, x) = 1 - x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .

Wir gehen wie gewohnt vor und suchen Kurven  $\vec{c}: I \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \times [0, 1]$ ,  $\vec{c}(s) = (t(s), x(s))$  mit  $u(t(s), x(s)) = \text{const}$ . Wir erhalten das ODE System

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= 1 \\ \frac{dx}{ds} &= u(t(s), x(s)) = \text{const} \end{aligned}, \quad s \in I.$$

dessen allgemeine Lösung lautet

$$t(s) = s + c_1, \quad x(s) = \text{const} \cdot s + c_2, \quad s \in I.$$

Befremdlicher Weise tritt eine zusätzliche Konstante in der Lösungsformel auf. Das liegt daran, dass diese Konstante eigentlich von der (noch unbekannt) Lösung  $u$  abhängt:

$$t = s, \quad x(s) = u(s, x(s)) \cdot s + c, \quad s \in I.$$

Für  $t = s = 0$  erhalten wir

$$t = 0, \quad x(0) = u(0, x(0)) \cdot 0 + c,$$

also  $c = x(0)$  und da  $u(0, x(0)) = 1 - x(0)$ , so erhalten wir

$$t = s, \quad x(s) = (1 - x(0))s + x(0).$$

Betrachten wir diese Charakteristiken für  $0 \leq x(0) \leq 1$ , so stellen wir fest, dass sich diese Kurven im Punkt  $(1, 1)$  schneiden.

Das ist ein Warnsignal: jede der Charakteristiken transportiert einen anderen Wert in den Punkt  $(1, 1)$ . Also kann es keine Lösung geben, die für  $t = 1$  stetig ist.

Konsequenz: für  $1 \leq t$  ist eine andere Lösungstheorie erforderlich. Allerdings steht uns diese nicht zur Verfügung.

**Beispiel.**  $\dot{u} + uu' = 0$ ,  $u(0, x) = x$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .

Es handelt sich wieder um die Burgers Gleichung, allerdings mit etwas veränderten Anfangswerten.

Wir gehen wie soeben vor und erhalten

$$t = s, \quad x(s) = x(0) \cdot (1 + s).$$

Nach Konstruktion gilt

$$u(s, x(s)) = u(0, x(0)) = x(0),$$

also

$$u(t, x) = x(0), \quad \text{wobei} \quad x = x(0) \cdot (1 + s) = x(0) \cdot (1 + t),$$

demnach

$$u(t, x) = \frac{x}{1 + t}.$$

Diese Lösung ist für alle  $t \in \mathbb{R}_0^+$  definiert und beliebig oft differenzierbar.

# Contents

<b>1 Funktionen, Modellierung und Differentialgleichungen</b>	<b>2</b>
1.1 $y' + a(x)y = f(x)$ . . . . .	8
1. Übung . . . . .	12
<b>2 Lineare ODE Systeme 1. Ordnung</b>	<b>15</b>
2.1 $\vec{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \vec{y} + \vec{f}(x)$ . . . . .	17
2.2 $\vec{z}' = \mathbf{A} \cdot \vec{z}$ . . . . .	22
2.2.1 Eigenwertmethode für $\vec{z}' = \mathbf{A} \cdot \vec{z}$ . Beispiel. . . . .	25
2.2.2 Eigenwertmethode für $\vec{z}' = \mathbf{A} \cdot \vec{z}$ . Allgemein. . . . .	31
2. Übung . . . . .	35
2.3 Stabilität von $\vec{z}' = \mathbf{A} \cdot \vec{z}$ . . . . .	37
<b>3 Kleine Störungen von <math>\vec{y}' = \mathbf{A}(x) \cdot \vec{y} + \vec{f}(x)</math></b>	<b>46</b>
3. Übung . . . . .	51
<b>4 ODE Systeme 1. Ordnung: <math>\vec{y}' = \vec{F}(x, \vec{y})</math></b>	<b>55</b>
4.1 Die separable ODE $y' = g(x)h(y)$ . . . . .	59
4.2 Lokale und maximale Lösungen . . . . .	60
4. Übung . . . . .	65
4.3 Autonome Systeme: Stationäre Punkte. Stabilität. . . . .	67
4.4 ODEs höherer Ordnung. . . . .	77
4.5 Lineare, skalare ODEs höherer Ordnung . . . . .	87
4.6 Spezielle lineare, skalare ODEs der Ordnung $k$ mit konstanten Koeffizienten . . . . .	92
4.6.1 Eigenwertmethode im homogenen Fall . . . . .	92
5. Übung . . . . .	98
4.6.2 Ansatzverfahren für spezielle rechte Seiten. Beispiele. . . . .	99
4.6.3 Ansatzverfahren für spezielle rechte Seiten. Allgemein. . . . .	111
6. Übung . . . . .	114
<b>5 Numerische Verfahren für ODE Systeme der Ordnung 1</b>	<b>115</b>
5.1 Das explizite Eulerverfahren . . . . .	118
5.2 Das implizite Eulerverfahren . . . . .	122
5.3 Das Runge Kutta Verfahren . . . . .	127
7. Übung . . . . .	135
<b>6 Die Laplace Transformation</b>	<b>136</b>
6.1 Elementar L-invertierbare Funktionen . . . . .	137
6.2 Dirac's Delta . . . . .	138
6.3 Die Laplace Transformation . . . . .	141
8. Übung . . . . .	151
6.4 Verallgemeinerte Ableitungen . . . . .	152
6.5 Die Inverse Laplace-Transformation auf $\text{ran } \mathcal{L}$ . . . . .	154

6.6	Laplace Lösungen einiger ODE Systeme der Ordnung 1 . . .	156
6.7	Laplace Lösungen einiger ODEs höherer Ordnung . . . . .	159
	9. Übung . . . . .	161
<b>7</b>	<b>Randwertprobleme für ODEs</b>	<b>162</b>
7.1	Die Wärmeleitungsgleichung . . . . .	162
7.2	Das Randwertproblem und $t \uparrow +\infty$ . . . . .	165
7.3	Das Sturmsche Randwertproblem . . . . .	166
	7.3.1 Lösungsverhalten . . . . .	169
	10. Übung . . . . .	172
7.4	Die Entwicklung nach Eigenfunktionen . . . . .	173
<b>8</b>	<b>Die Separationsmethode</b>	<b>179</b>
	11. Übung . . . . .	185
8.1	Der Laplace Operator auf einem Rechteck . . . . .	186
<b>9</b>	<b><math>-\Delta u = f</math> als Variationsproblem</b>	<b>189</b>
	12. Übung . . . . .	197
<b>10</b>	<b>Die Finite Element Methode</b>	<b>199</b>
<b>11</b>	<b>Hyperbolische PDEs</b>	<b>205</b>
11.1	$\dot{\rho} + V(t) \cdot \rho' = 0$ . . . . .	206
11.2	$\dot{\rho} + V(x) \cdot \rho' = W(x) \cdot \rho(x)$ . . . . .	209
11.3	Die Burgers Gleichung . . . . .	211

