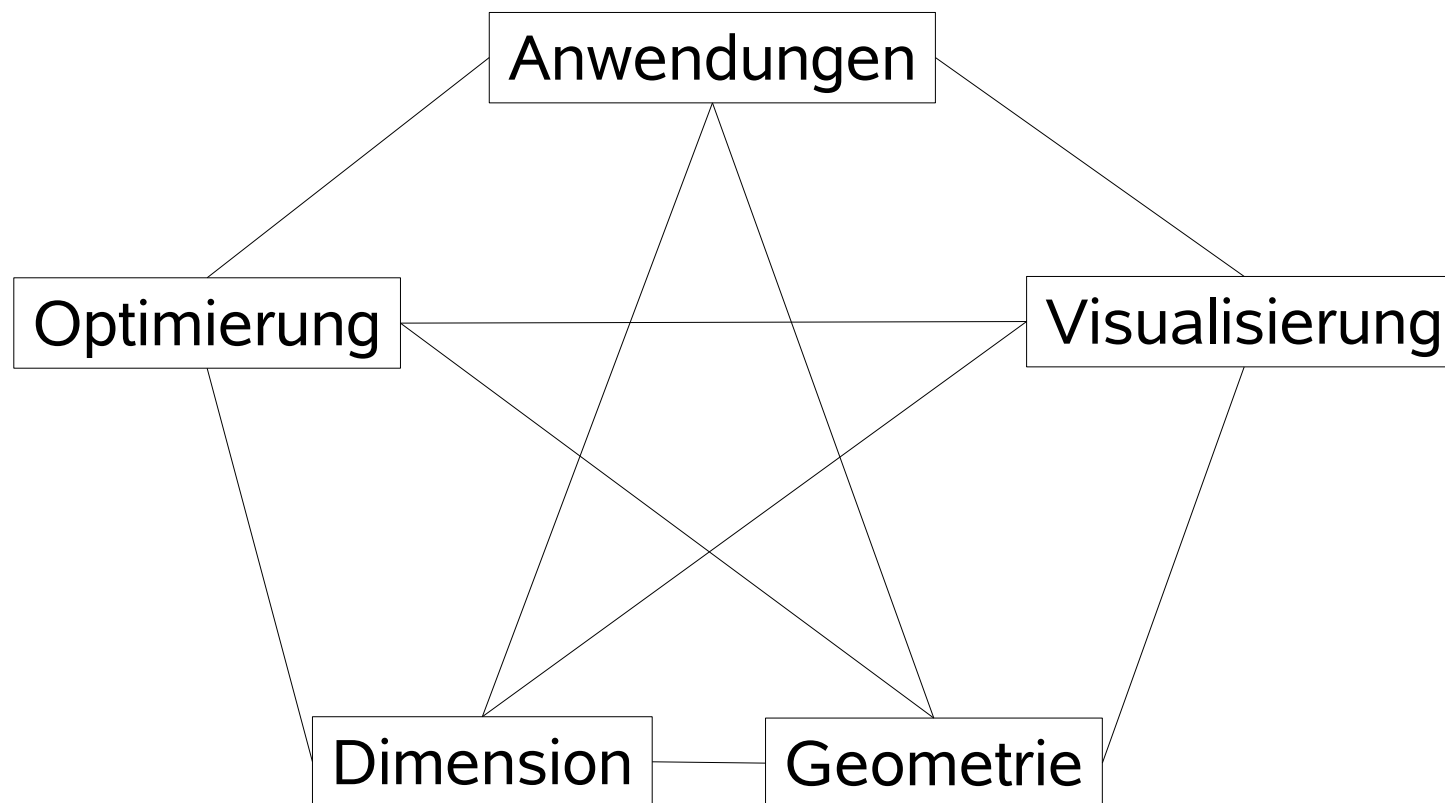




# Eine geometrische Reise in höhere Dimensionen

Thilo Rörig



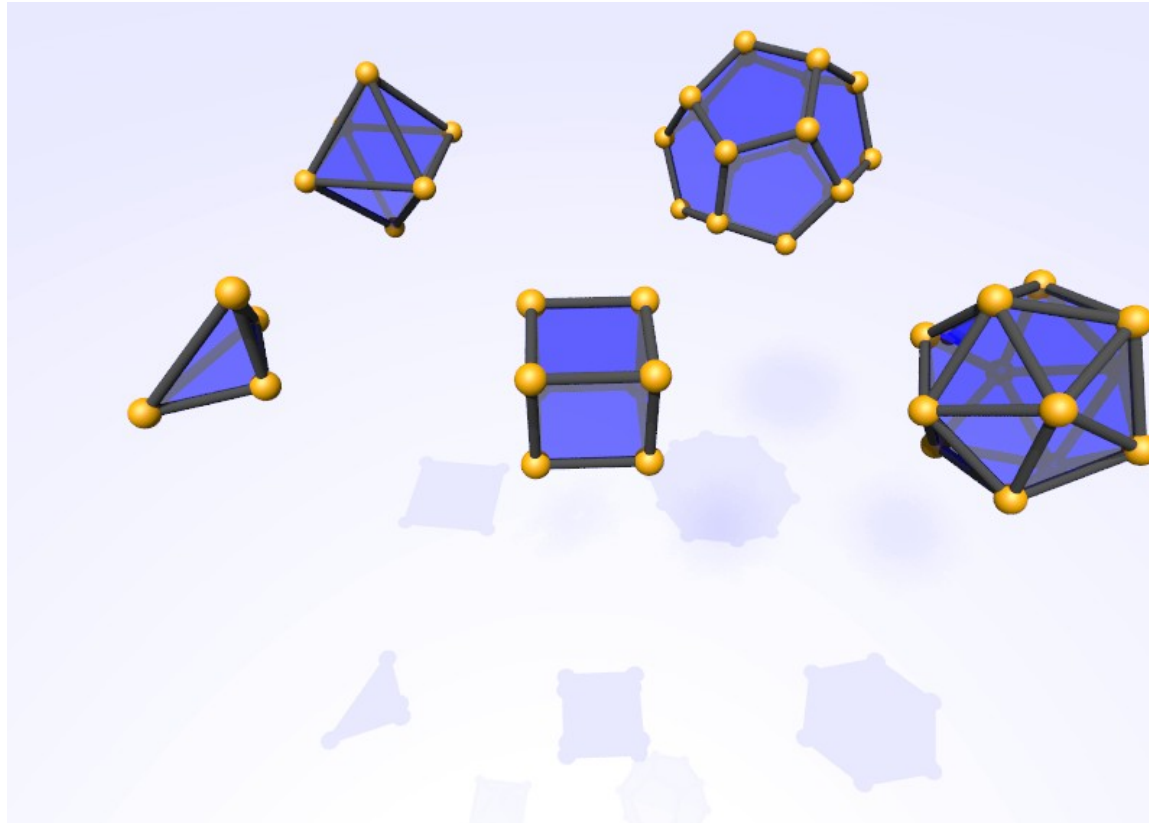
## Linearen Optimierung:

- Rucksackproblem (1.12. im Mathekalender)
- Produktionsplanung (13.12. im Mathekalender)
- Planung von Verkehrsnetzen





## Geometrie der Linearen Optimierung

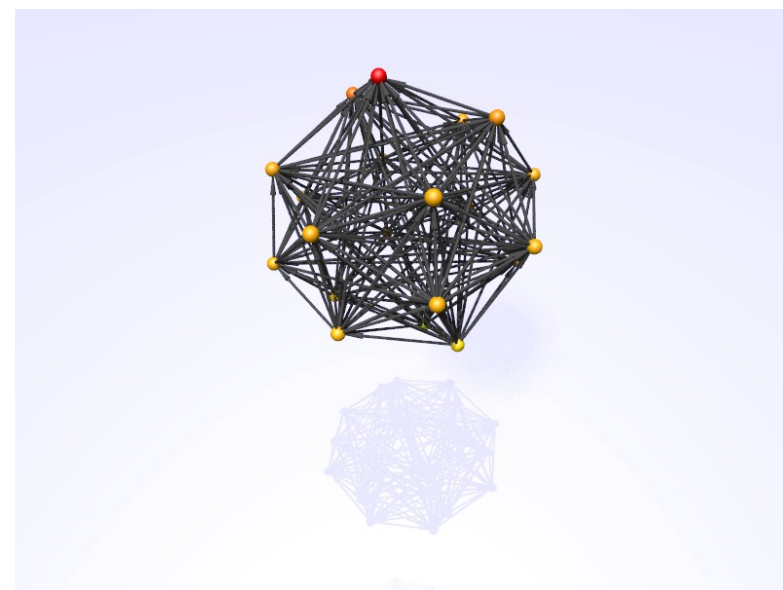
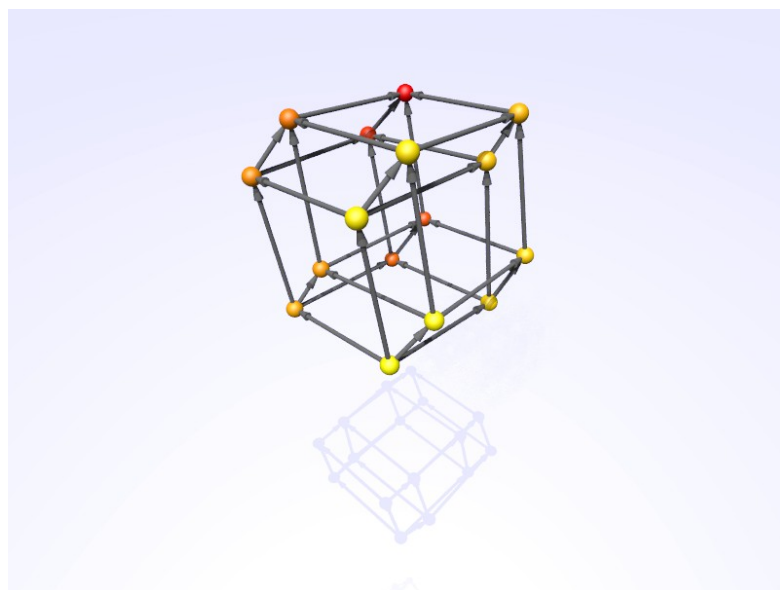


Tetraeder, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder,  
Hexaeder (Würfel)



## Geometrie der Linearen Optimierung:

- Lösungsraum: Hochdimensionale Polyeder
- Bewertung auf den Ecken
- Optimale Lösungen: optimale Ecke





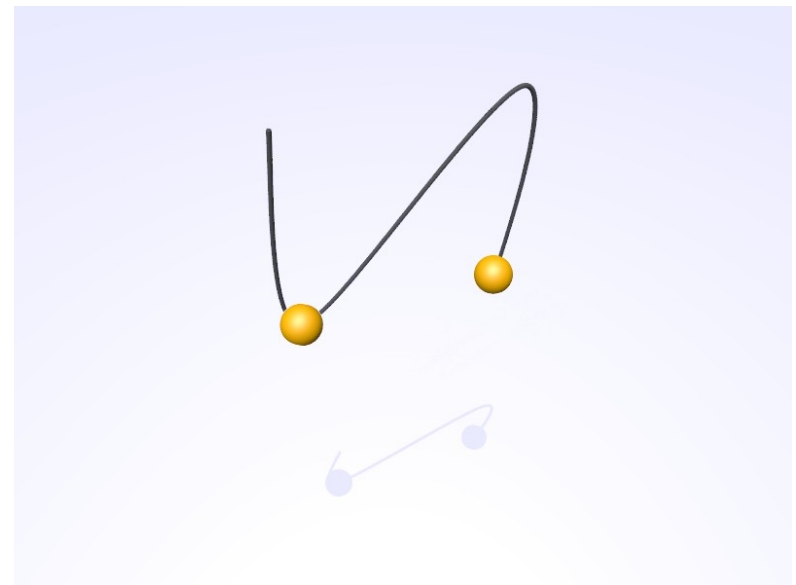
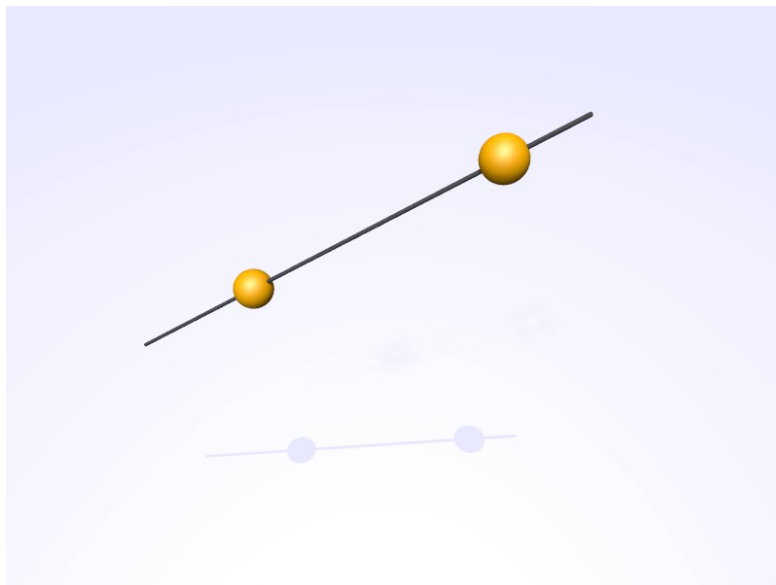
Vasek Chvatal (Math. Professor, Montreal):

Here, however, a word of warning may be in order: do not try to visualize  $n$ -dimensional objects for  $n > 3$ . Such an effort is not only doomed to failure – it may be dangerous to your mental health. (If you do succeed, then you are in trouble.) To speak of  $n$ -dimensional geometry with  $n > 3$  simply means to speak of a certain part of algebra.



Aller Anfang ist 1-dimensional:

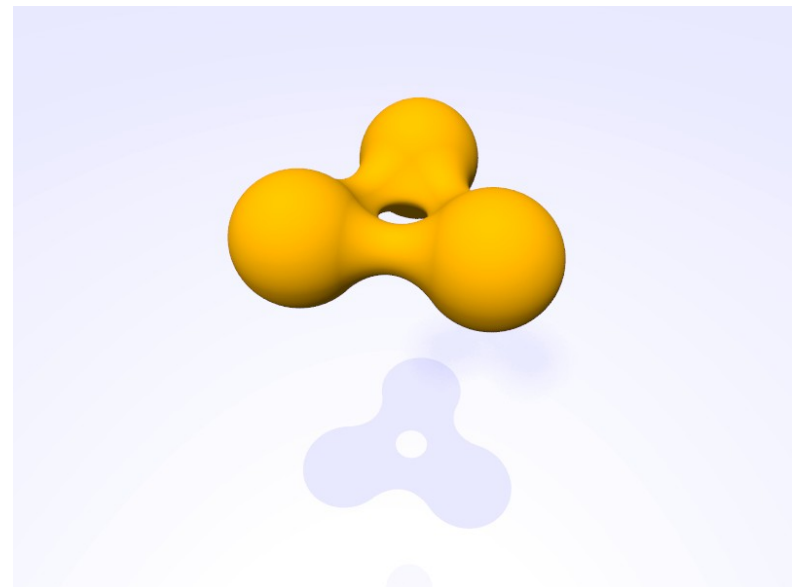
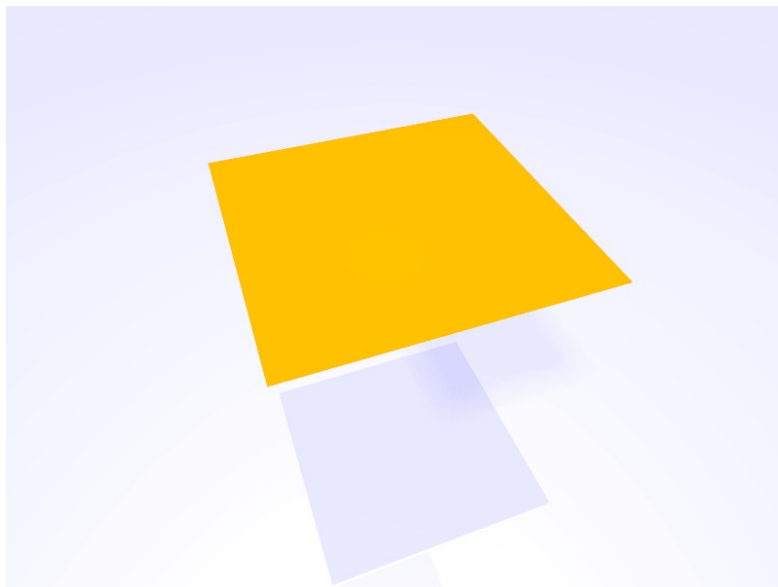
- Geraden sind 1-dimensional
- Kurven sind auch 1-dimensional
- Wir benötigen **eine** Koordinate!





Weiter in die 2te Dimension:

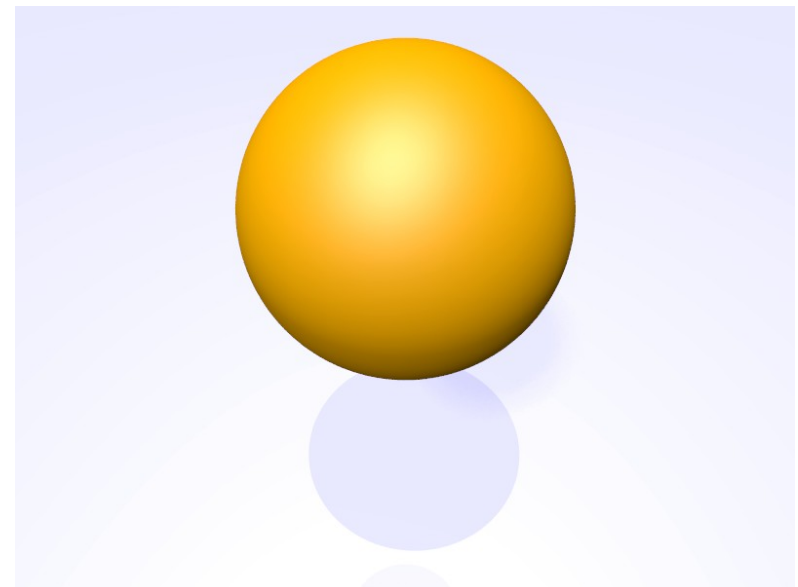
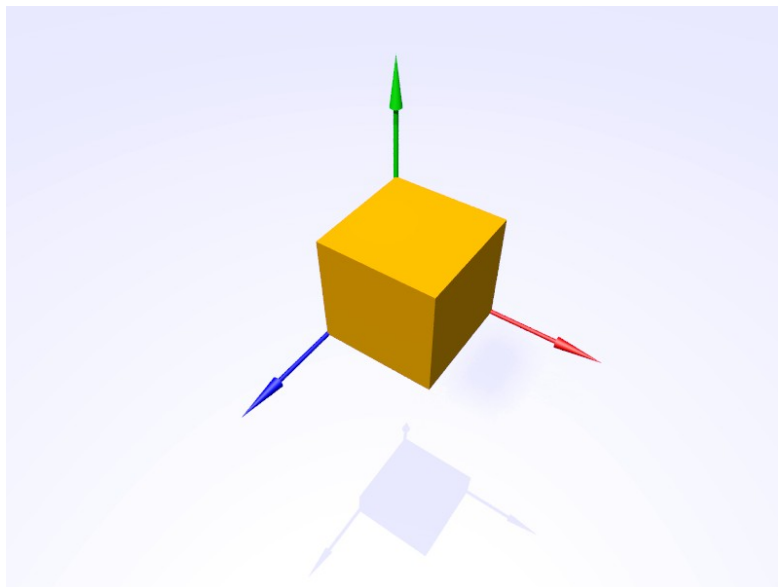
- Ebenen sind 2-dimensional.
- Flächen sind auch 2-dimensional.
- Ist die Erdoberfläche 2-dimensional?
- Wir benötigen **zwei** Koordinaten!





Hier sind wir zu Hause – die 3te Dimension:

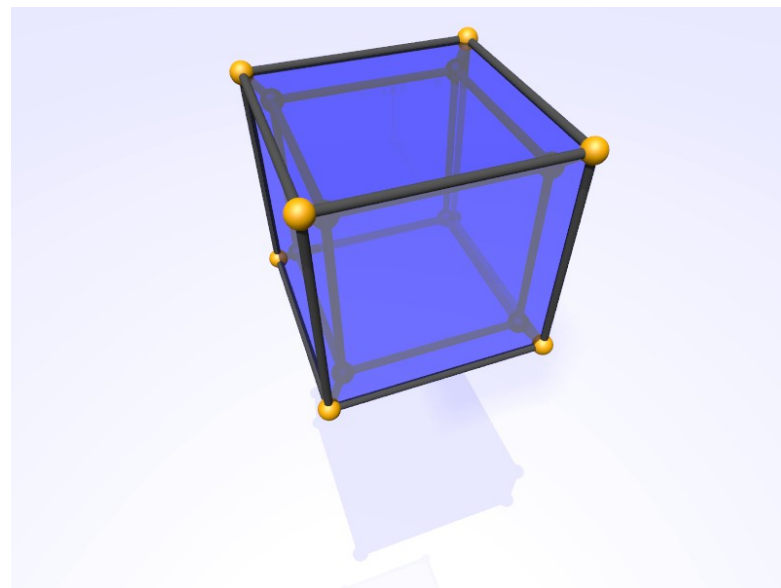
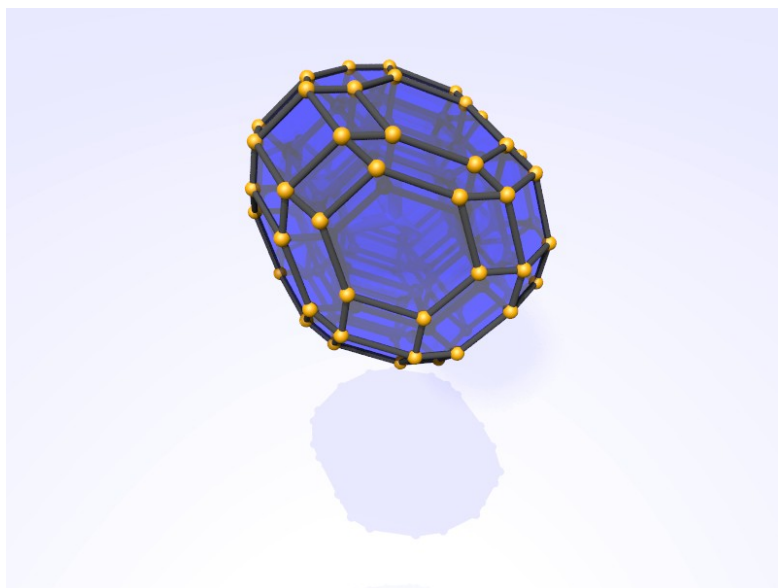
- Das Innere eines Quader ist 3-dimensional.
- Eine Kugel ist 3-dimensional.
- Wir benötigen **drei** Koordinaten!





Diese Reise beginnt – die 4te Dimension:

- Ist die 4te Dimension die Zeit?
- Wir benötigen **vier** Koordinaten!





Jetzt lieber abstrakt – die  $n$ -te Dimension:

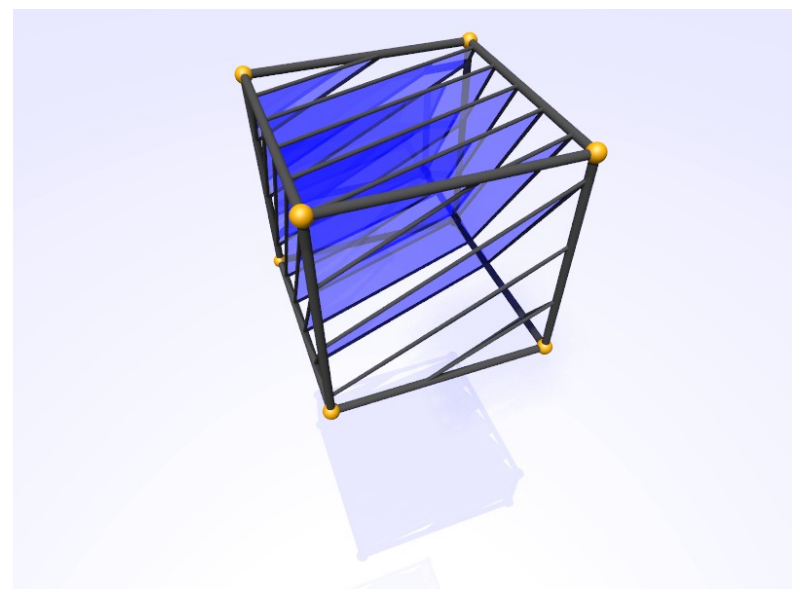
- Wir benutzen  $n$  Koordinaten!
- Ein Punkt im  $n$ -dimensionalen Raum

$$P = (P_1, P_2, \dots, P_n)$$



Welche Möglichkeiten gibt es?

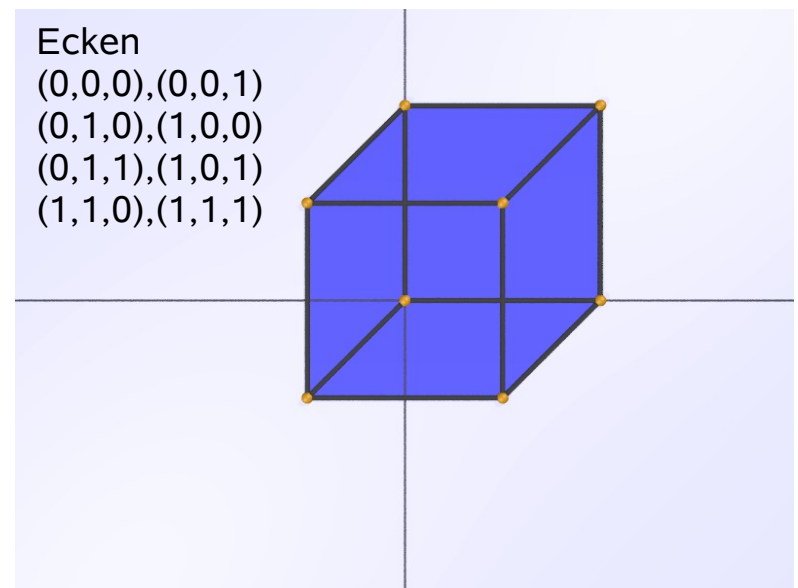
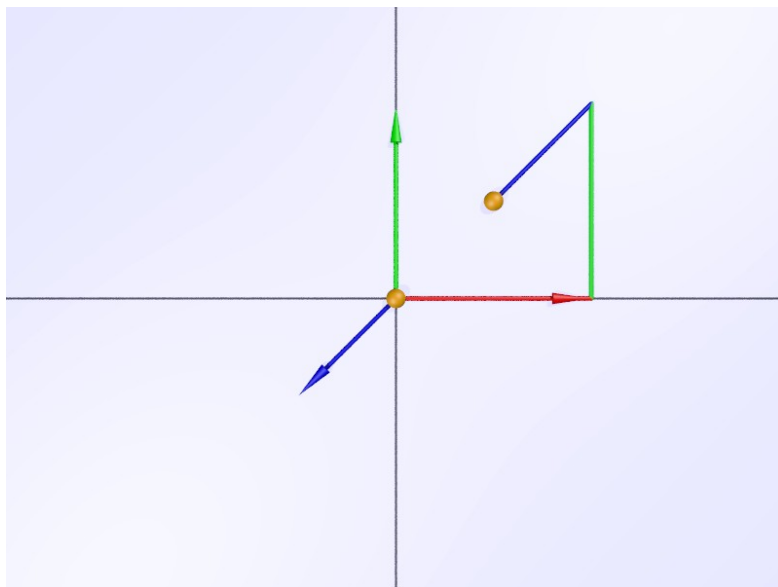
- Modelle (echte 3 Dimensionen)
- Computermodele (virtuelle 3 Dimensionen)
- Projektion mit/ohne Perspektive
- Schnitte mit Ebenen (z.B. Ultraschall)

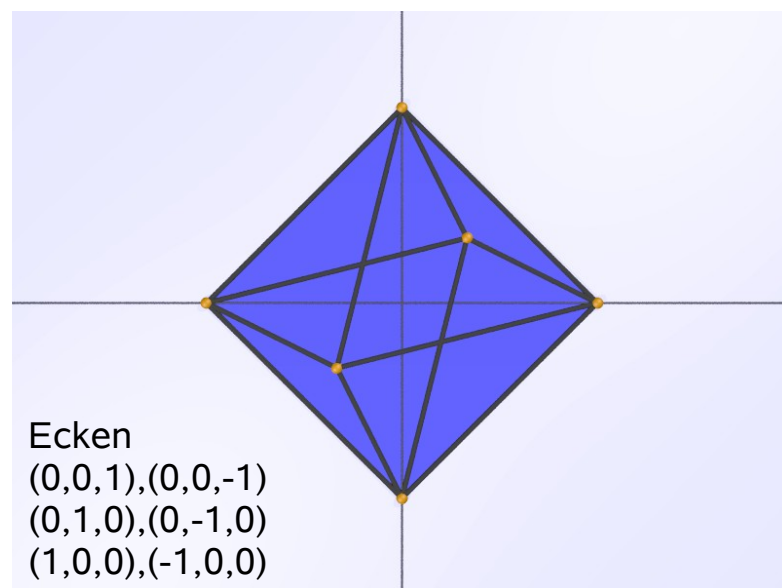
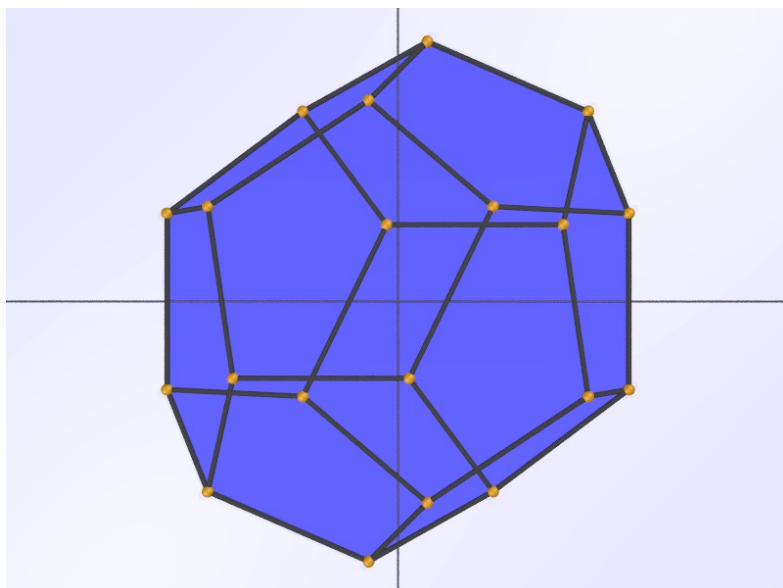
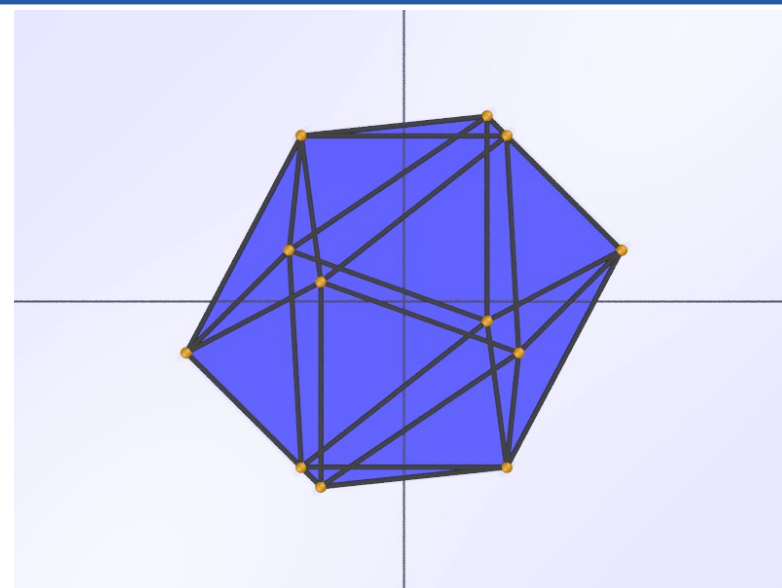
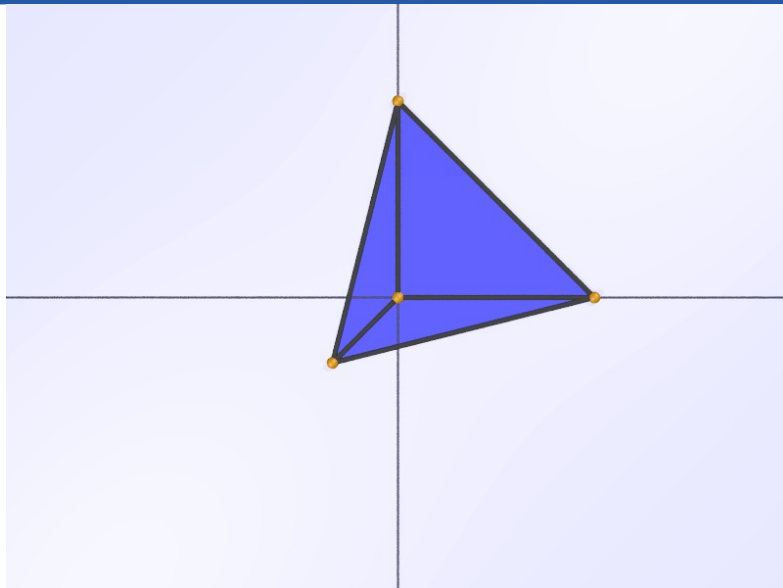




## Projektionen ins 2-dimensionale

- Wähle Koordinatenrichtungen
- Jeder Punkt in 3D bekommt ein Abbild
- $P = (1, 1, 1)$
- Projektion eines Würfels







## 3D Projektionen in die Ebene

- **Drei** Koordinatenachsen in der Ebene
- Jeder Punkt in **3D** erhält ein Abbild in **2D**
- **3D** Polyeder bestehen aus einer Sammlung von **2D** Polygonen, die sich überlagern

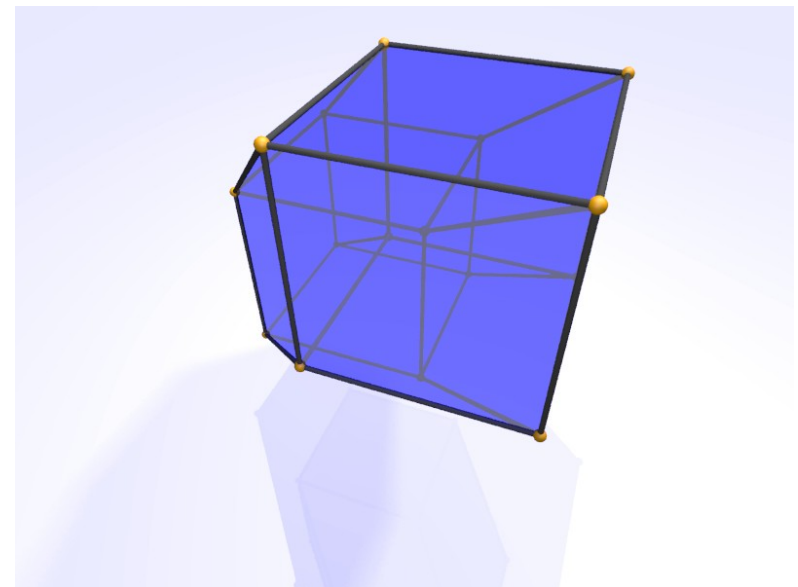
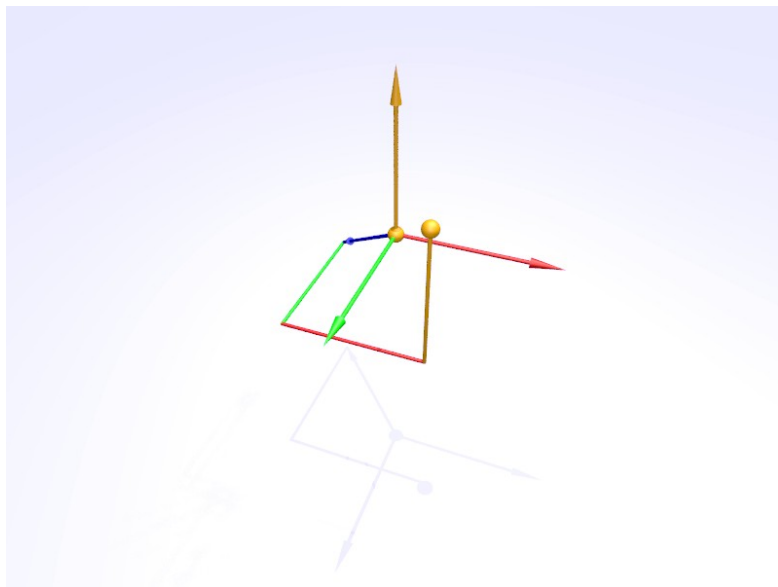
## 4D Projektionen in den Raum

- **Vier** Koordinatenachsen im Raum
- Jeder Punkt in **4D** erhält ein Abbild in **3D**
- **4D** Polyeder bestehen aus einer Sammlung von **3D** Polyedern, die sich überlagern



## 4D Projektionen:

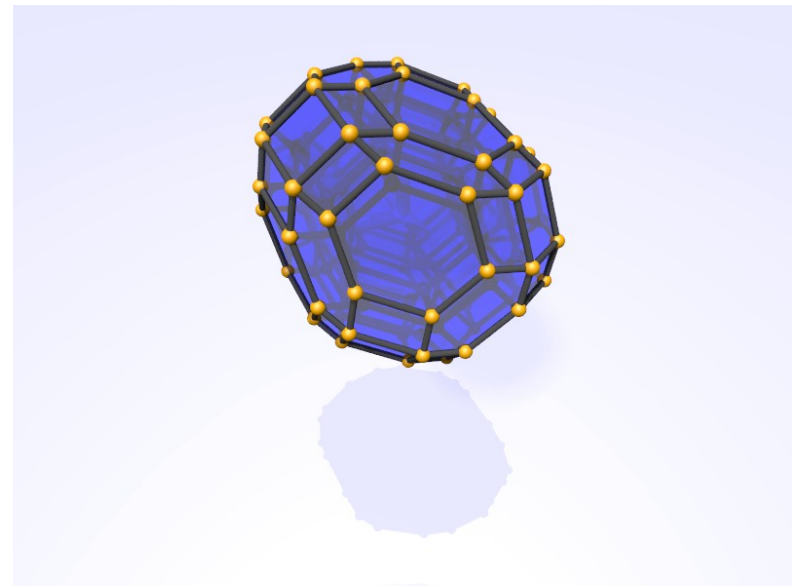
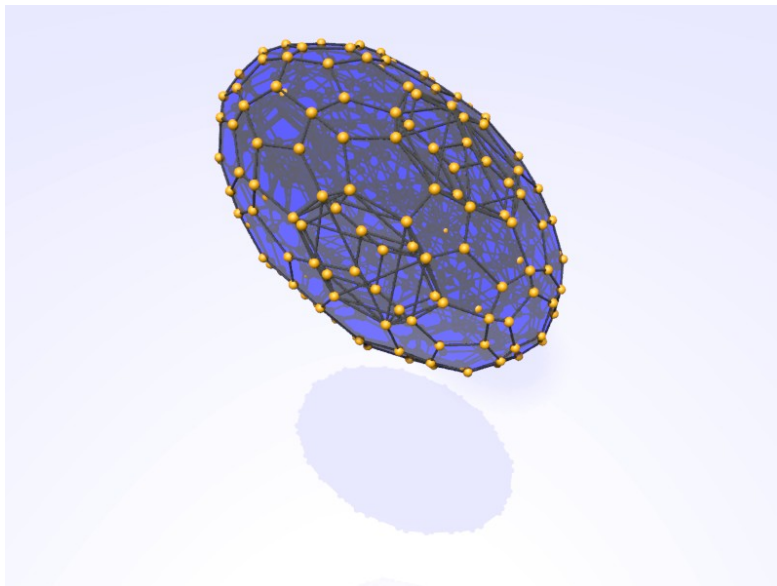
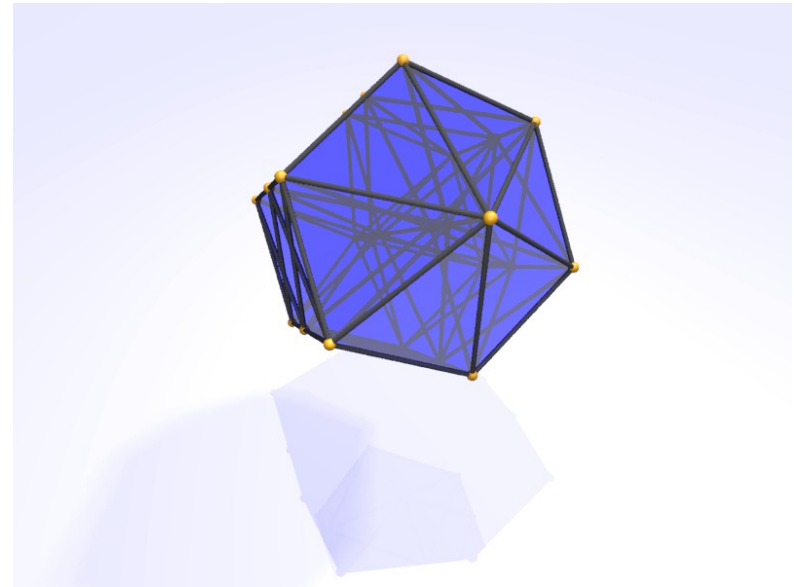
- Vier Koordinatenachsen im Raum
- Jeder Punkt in 4D erhält ein Abbild in 3D
- $P = (1,1,1,1)$
- Der 4D Würfel





## Andere 4D Polyeder

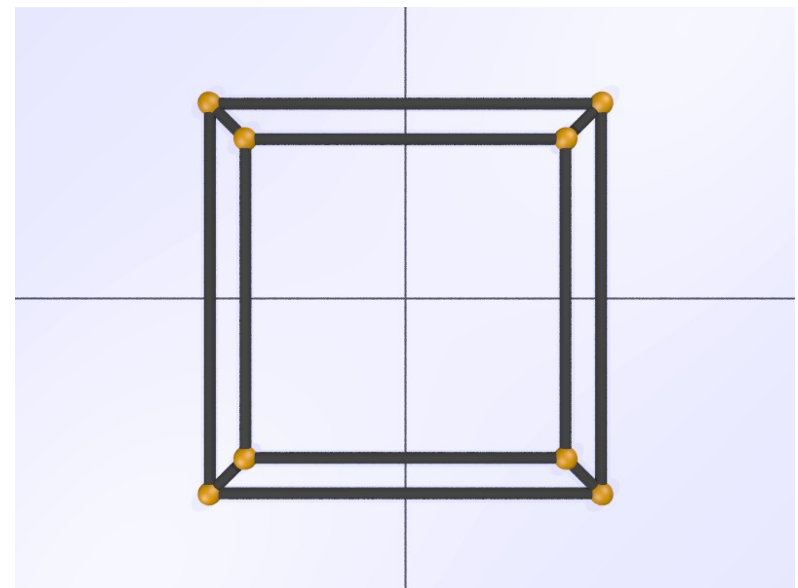
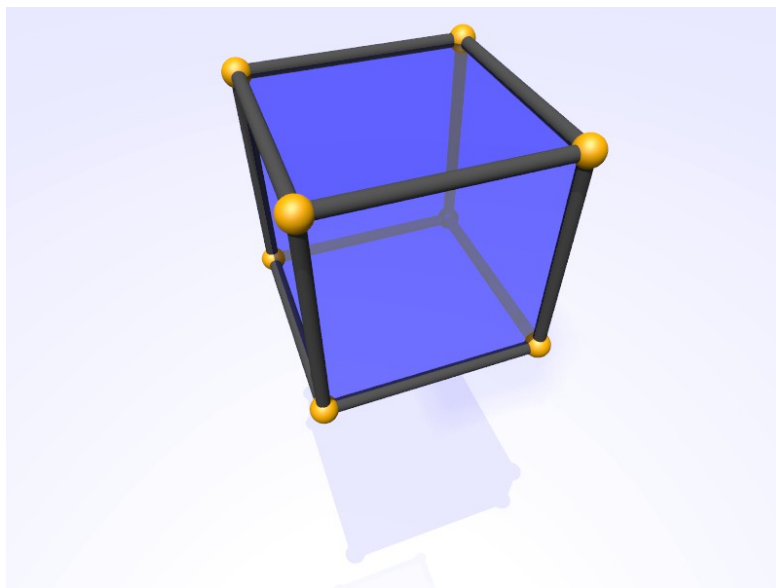
- 24-Zell
- 120-Zell
- Permutaeder





Eine *geschickte* Projektion

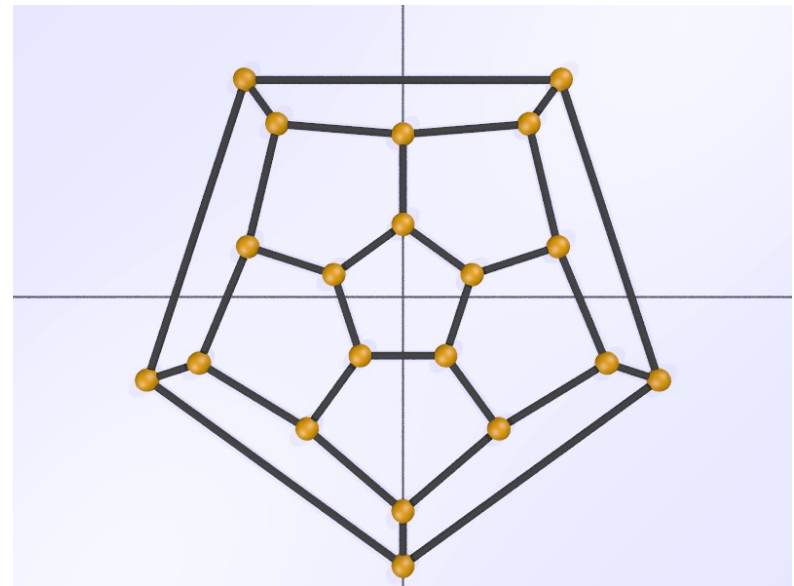
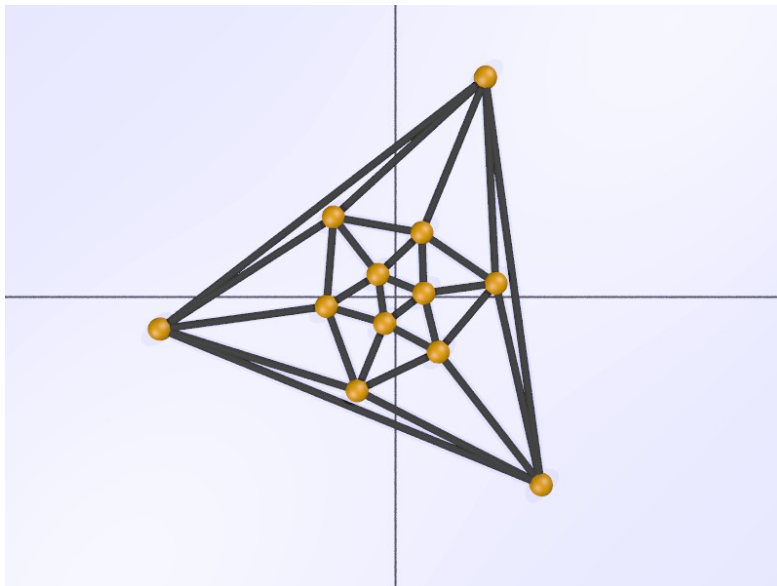
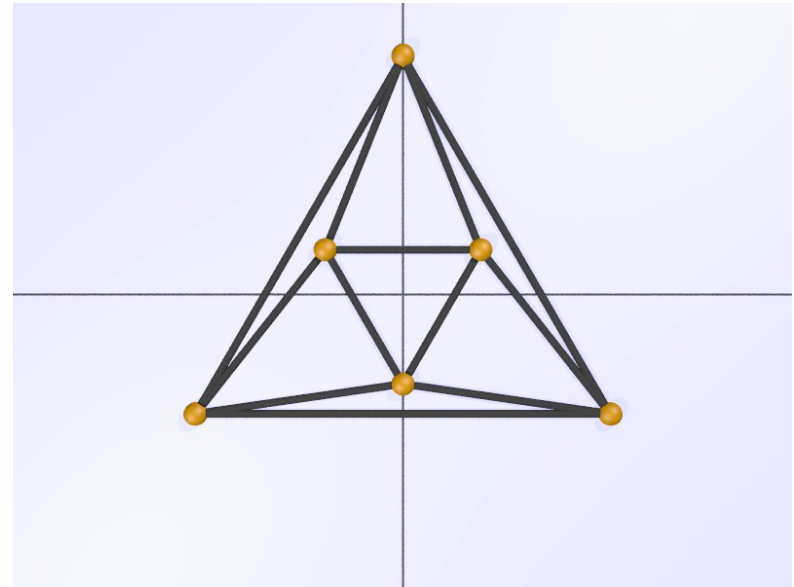
- Zentralprojektion
- Nicht alle Seiten bleiben sichtbar
- 2-dimensionales Bild (auf einer der Seiten)
- Keine Überlagerung mehr!





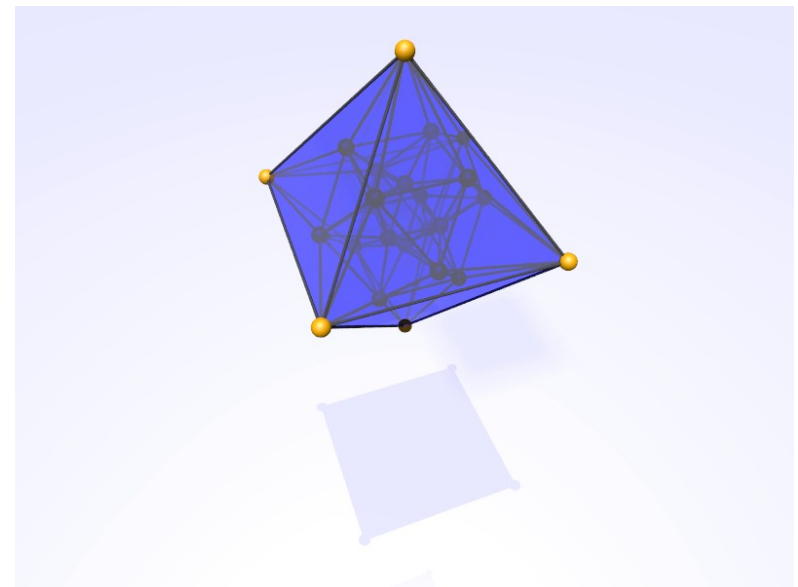
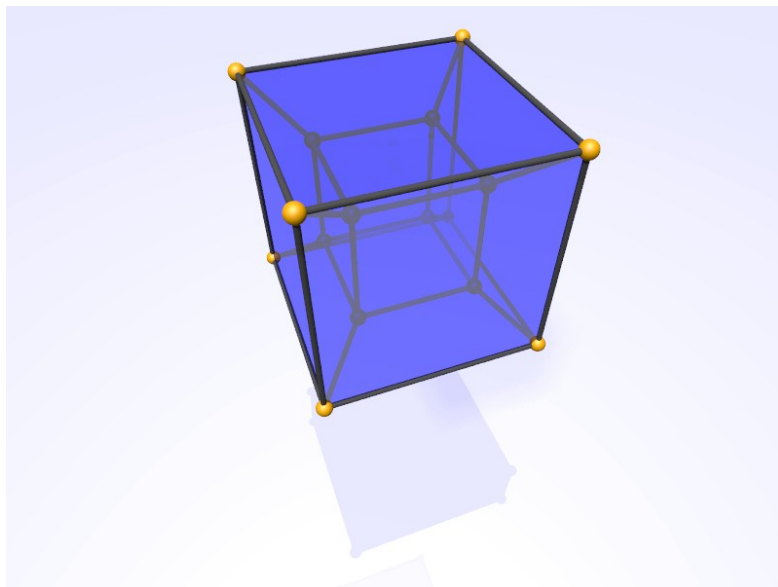
## Schlegel Diagramme

- Oktaeder
- Ikosaeder
- Dodekaeder





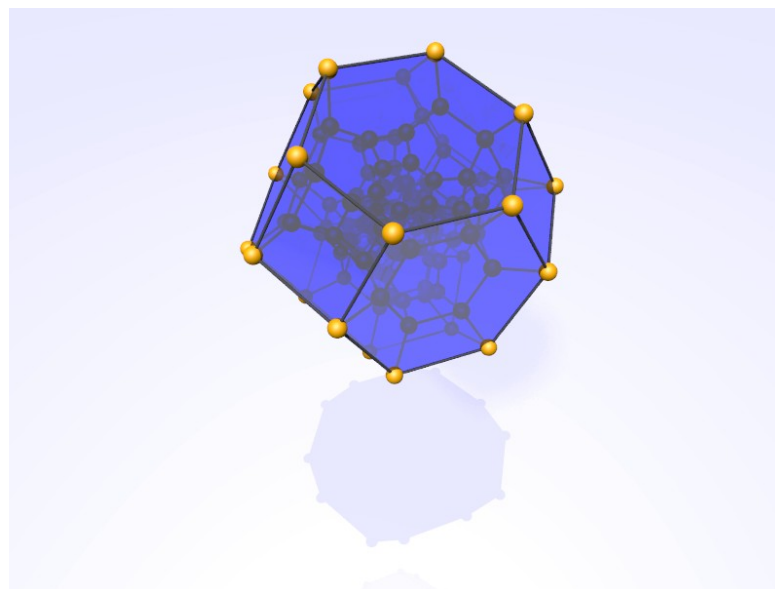
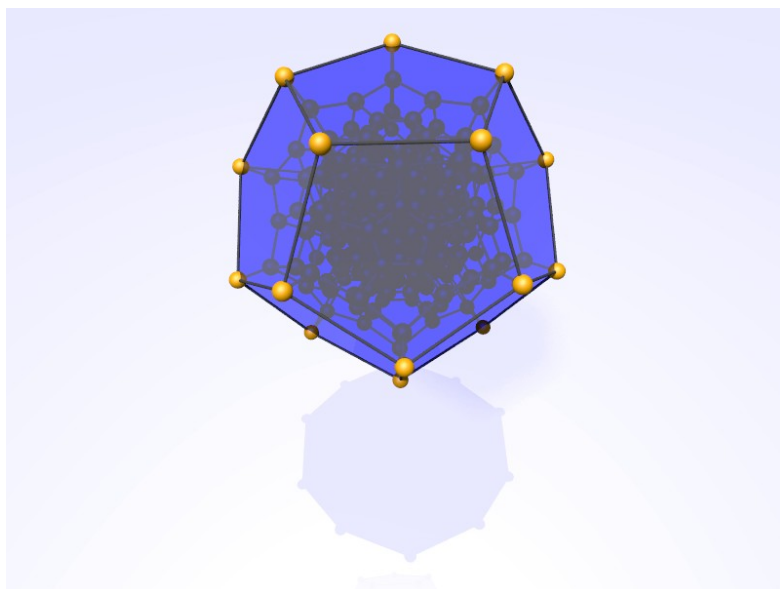
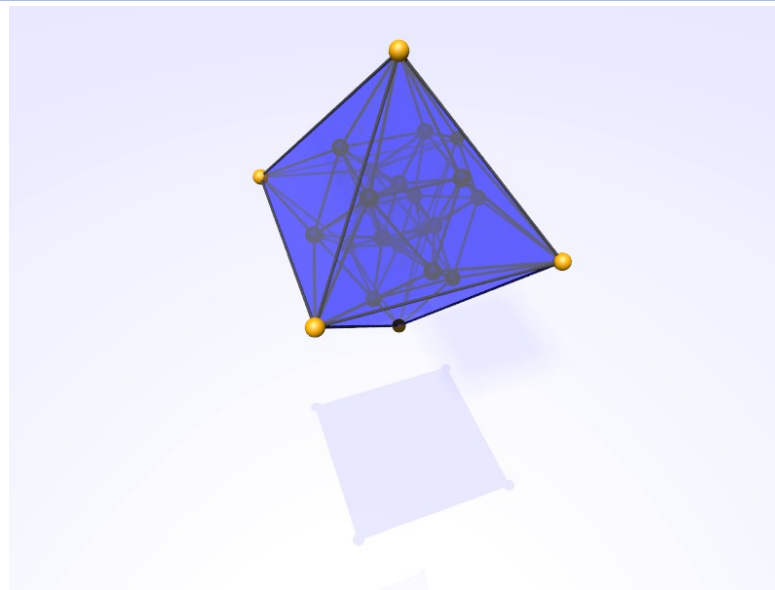
- Zentralprojektion auf eine 3D Seite
- Keine Überlagerung von Seiten
- Alle Seiten sind sichtbar





## Andere 4D Polyeder

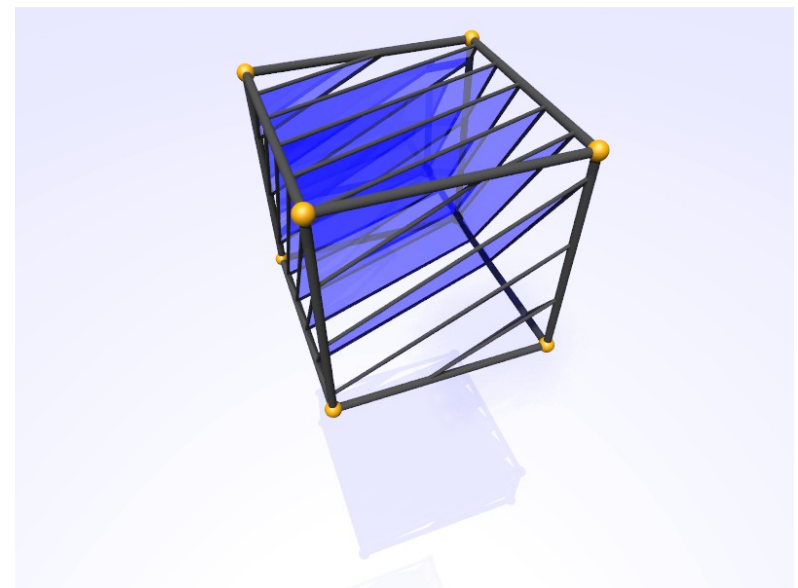
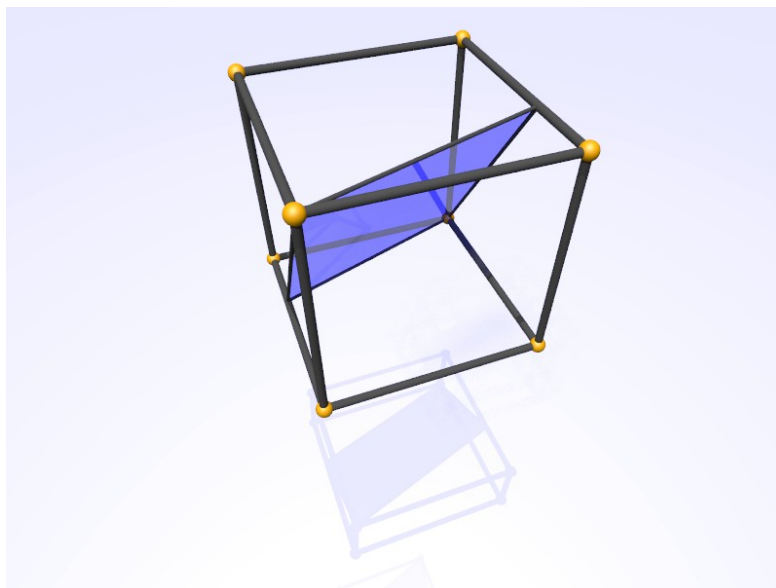
- 24-Zell
- 120-Zell
- Permutaeder





## Polyeder Tomographie

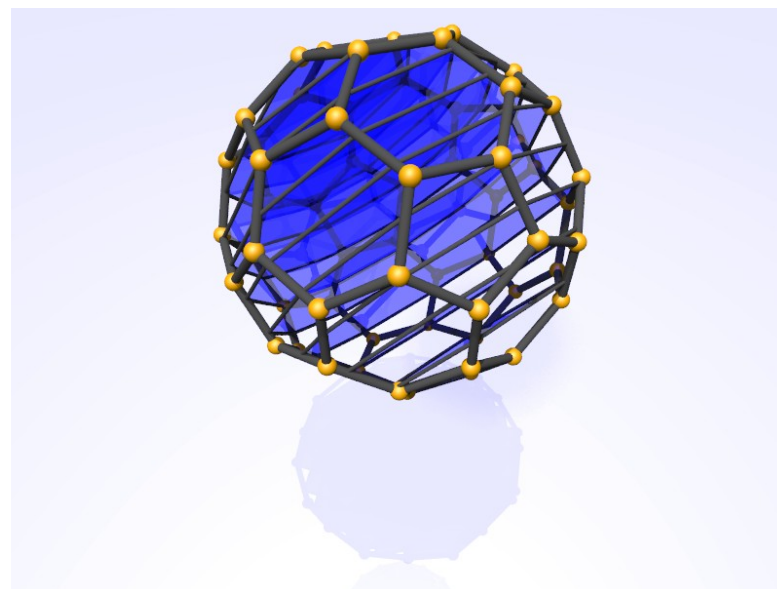
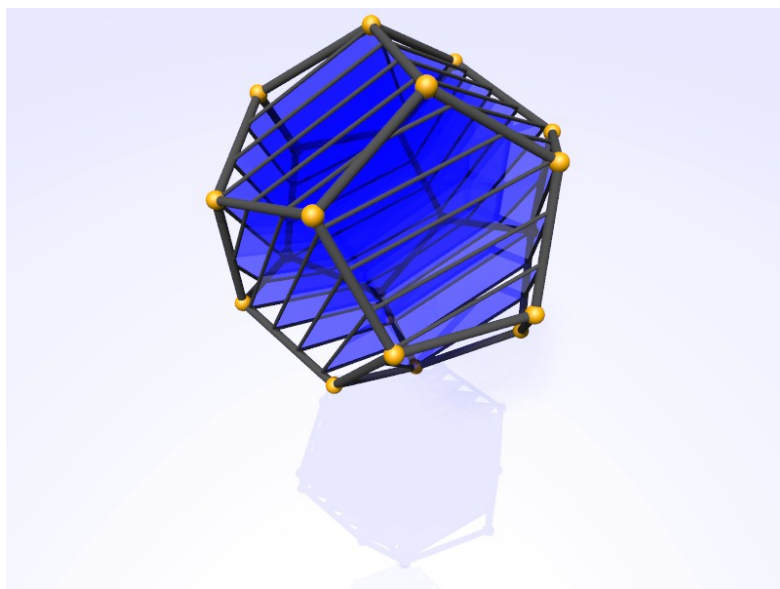
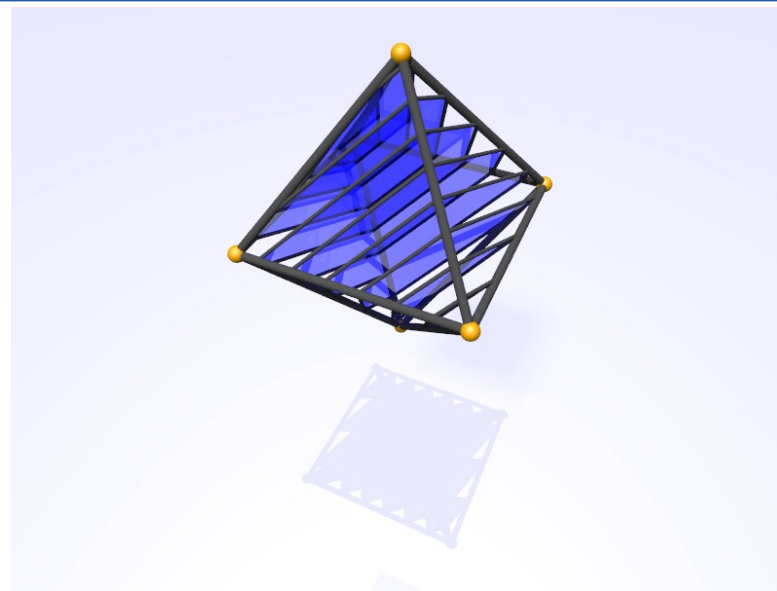
- Betrachte ein 3D Polyeder
- Wähle eine Schnittrichtung
- Schneide das Polyeder in viele 2D Scheiben
- Genügend Scheiben erlauben Rekonstruktion





## 3D Tomographie

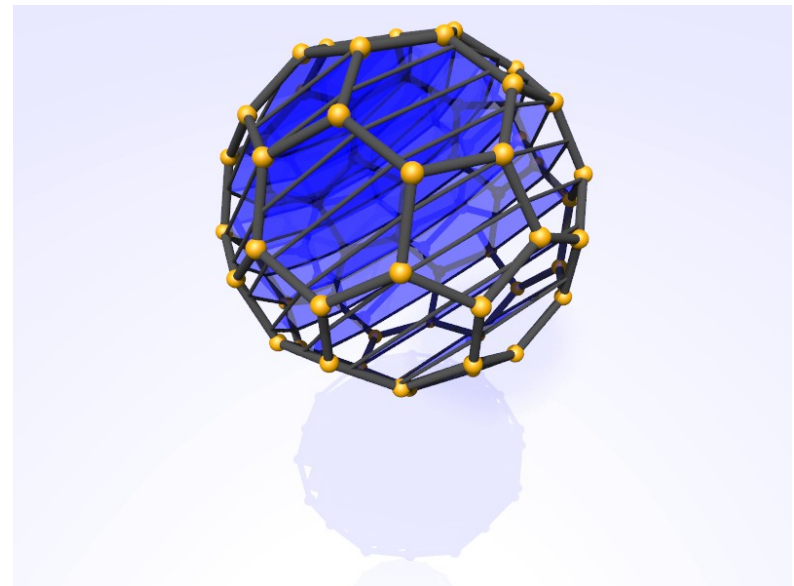
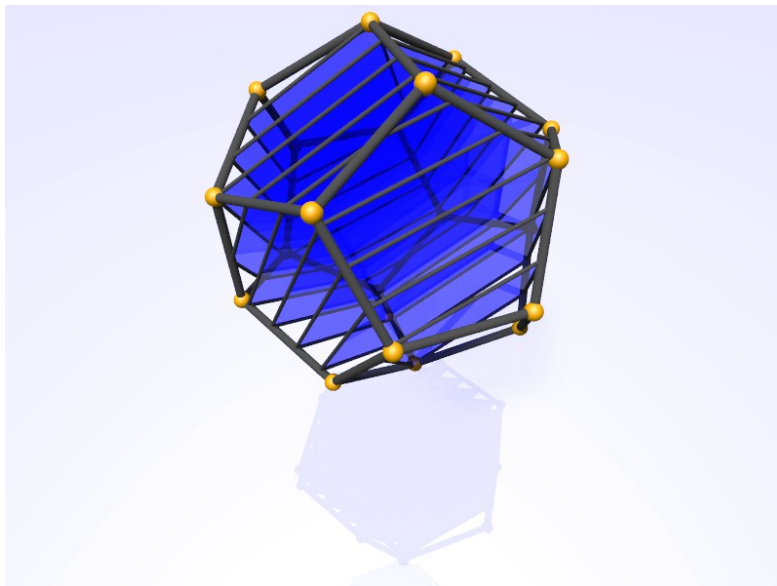
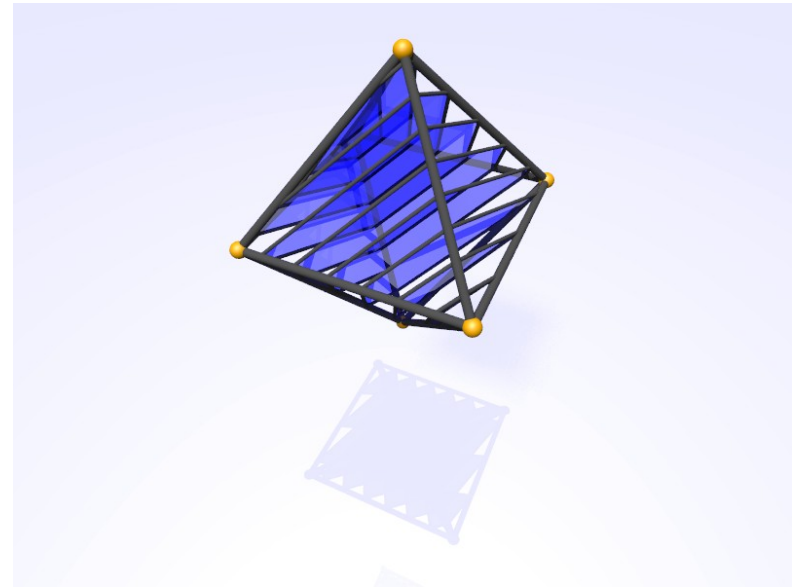
- Oktaeder
- Dodekaeder
- Fussball





## 3D Tomographie

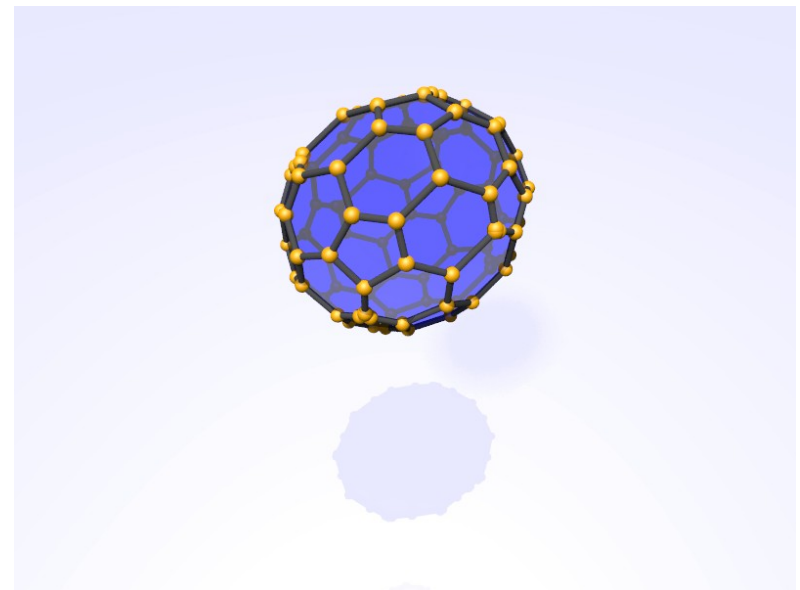
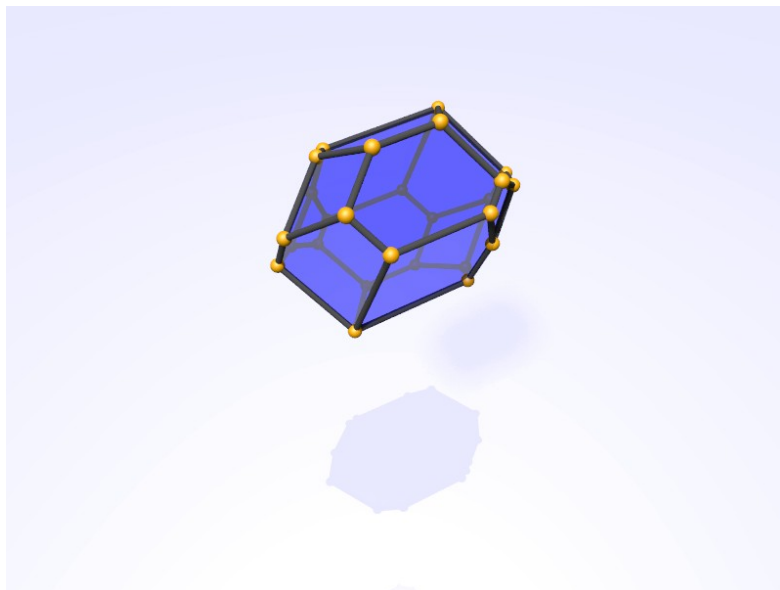
- Oktaeder
- Dodekaeder
- Fussball





## 4D Tomographie:

- Betrachte 4D Polyeder
- Wähle eine Schnittrichtung
- Schneide das Polyeder in viele 3D Scheiben





- Meine Homepage:  
<http://www.math.tu-berlin.de/~thilosch>
- Illustrationen von Sonja Rörig  
<http://www.sonja-roerig.de>
- Mathematische Software polymake:  
<http://www.math.tu-berlin.de/polymake>
- Visualisierung jReality:  
<http://www.jreality.de>
- Visualisierung povray:  
<http://www.povray.org>

