

Mathematischer Zirkel 8c der MSG “Leonhard Euler”

Internet-Seite des Zirkels:

www.math.tu-berlin.de/~suris/zirkel

Hausaufgaben vom 12.01.2011 (zum 19.01.2011)

1. Welche Zahl ist größer: $(1.01)^{1000}$ oder 1000? Zur Begründung darfst Du die Bernoullische Ungleichung

$$(1 + q)^n \geq 1 + nq \quad \text{für } q \geq -1$$

benutzen, auch mehrmals, aber keinen Taschenrechner!

2. Es sei $\tau(n)$ die Anzahl von Möglichkeiten, eine n -elementige Menge als Vereinigung ihrer (nichtleerer) Teilmengen darzustellen. Zum Beispiel:

- $\tau(2) = 2$, weil es zwei Partitionen von $\{1, 2\}$ gibt, nämlich $\{1\} \cup \{2\}$ und $\{1, 2\}$;
- $\tau(3) = 5$, weil es fünf Partitionen von $\{1, 2, 3\}$ gibt:

$$\{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}, \quad \{1, 2\} \cup \{3\}, \quad \{1, 3\} \cup \{2\}, \quad \{2, 3\} \cup \{1\}, \quad \{1, 2, 3\}.$$

Bestimme $\tau(4)$ und $\tau(5)$!

3. Es ist doch mühsam, die Partitionen von $\{1, 2, \dots, n\}$ aufzulisten! Beweise die rekurrente Formel

$$\tau(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \tau(k).$$

Berechne damit $\tau(4)$, $\tau(5)$, $\tau(6)$, $\tau(7)$, $\tau(8)$.