Mathematischer Zirkel 8c der MSG “Leonhard Euler”

Internet-Seite des Zirkels:
`www.math.tu-berlin.de/~suris/zirkel`

Hausaufgaben vom 09.02.2011
(zum 16.02.2011)

1. Die Nährungsbrüche $p_n/q_n = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n]$ für den Kettenbruch $[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$ sind durch $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$, $p_1 = a_0 a_1 + 1$, $q_1 = a_1$,

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \quad (n = 2, 3, \ldots) \qquad (*)$$

gegeben. Beweise mit Hilfe der mathematischen Induktion, dass

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n-1} = \begin{cases} 1, & n \text{ ungerade}, \\ -1, & n \text{ gerade}. \end{cases}$$

Das kann man auch so schreiben:

$$\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}.$$

Also springen p_n/q_n abwechselnd nach links und nach rechts, und die Sprünge werden immer kleiner. Merke auch: zwei benachbarte Nährungsbrüche sind auch im Sinne unserer alten Definition benachbart!

2. Zeige mit Hilfe der Formel (*):

$$p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2} = (-1)^n a_n \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} = \frac{(-1)^n a_n}{q_n q_{n-2}}.$$

Also: die Folge der Nährungsbrüche mit geraden n monoton wächst, während die Folge der Nährungsbrüche mit ungeraden n monoton fällt.

3. Zeige mit Hilfe der Formel (*):

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n; a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_2, a_1].$$