Mathematischer Zirkel 8c der MSG "Leonhard Euler"

Internet-Seite des Zirkels :

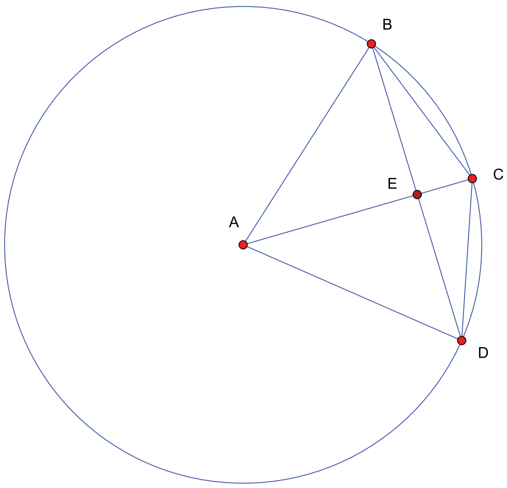
`www.math.tu-berlin.de/~suris/zirkel`

Hausaufgaben vom 02.03.2011
(zum 30.03.2011)

Heute sollt Ihr beweisen, dass der Grenzwert der Folge

$$S_n = 2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\ldots + \sqrt{2}}}}}$$

gleich π ist (das habt Ihr ja letztes Mal numerisch entdeckt)! Dafür wird gezeigt, dass S_n der halbe Umfang des in den Einheitskreis eingeschriebenen 2^{n+1}-Ecks ist. Es ist ganz einfach!



Wir bezeichnen $2\alpha_n = 360°/2^n$, sodass $\alpha_{n+1} = \alpha_n/2$.

Auf dem Bild sei der Winkel BAD gleich $2\alpha_n$, sodass BD die Seite des eingeschriebenen 2^n-Ecks ist. Die BC sei die Winkelhalbierende, sodass die Winkel BAC und CAD gleich $\alpha_n = 2\alpha_{n+1}$ sind, und BC und CD Seiten des eingeschriebenen 2^{n+1}-Ecks sind. Weiterhin bezeichnen wir die Katheten eines rechtwinkligen Dreicks mit der Hypothenuse 1 und einem der spitzen Winkeln α_n durch a_n und b_n (die gegenüberliegende bzw. anliegende Kathete). Also $BE = a_n$ und $AE = b_n$.

1. Zeige: $BD = 2a_n$, $BC = 2a_{n+1}$, und $AE = 1 - b_n$.

2. Zeige: $\measuredangle BAC = \alpha_n$, $\measuredangle ABC = 90° - \alpha_n/2$, und folgere daraus, dass $\measuredangle EBC = \alpha_n/2 = \alpha_{n+1}$.

3. Das rechtwinklige Dreieck AEB mit dem spitzen Winkel α_n hat Hypothenuse 1 und die Kathete a_n. Das rechtwinklige Dreieck BEC hat den spitzen Winkel α_{n+1}, die Hypothenuse $2a_{n+1}$ und die Kathete $1-b_n$. Deswegen gilt:

$$\frac{2a_{n+1}}{1-b_n} = \frac{1}{a_{n+1}} \quad \Leftrightarrow \quad a_{n+1}^2 = \frac{1-b_n}{2} \quad \Rightarrow \quad b_{n+1}^2 = 1 - a_{n+1}^2 = \frac{1+b_n}{2}.$$

4. Die letzte Formel kann man umschreiben wie $2b_{n+1} = \sqrt{2+2b_n}$. Folgere daraus (per Induktion mit der Induktionsbasis $2b_2 = \sqrt{2}$), dass

$$2b_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}$$

mit $n-1$ Zweien unter dem Wurzelzeichen. Da $a_n^2 + b_n^2 = 1$, folgt es:

$$2a_n = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\ldots+\sqrt{2}}}}}$$

(auch mit $n-1$ Zweien unter dem Wurzelzeichen). Jetzt siehst Du, wieso der am Anfang genannte Grenzwert in der Tat gleich π ist!