

Mathematischer Zirkel 10c der MSG “Leonhard Euler”

Internet-Seite des Zirkels :
page.math.tu-berlin.de/~suris/zirkel

Hausaufgaben vom 24.10.2012 (zum 31.10.2012)

1. Beweise den kleinen Satz von Fermat (*für jede Primzahl p und jede natürliche Zahl a gilt: $a^p \equiv a \pmod{p}$) durch das Betrachten der Multiplikationstabelle \pmod{p} . Die Zahlen in der Zeile Nr. a sind $a \pmod{p}$, $2a \pmod{p}$, \dots , $(p-1)a \pmod{p}$. Zeige, dass, wenn a nicht durch p teilbar ist, diese Zahlenreihe mit den Zahlen $1 \pmod{p}$, $2 \pmod{p}$, \dots , $p-1 \pmod{p}$ (in einer anderen Reihenfolge) übereinstimmt. Leite daraus her, dass*

$$a^{p-1}(p-1)! \equiv (p-1)! \pmod{p} \quad \Rightarrow \quad a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

2. Zeige, dass für eine Primzahl p und für $1 \leq k \leq p-1$ die Binomialkoeffiziente $\binom{p}{k}$ durch p teilbar sind.

3. Benutze die 2. Aufgabe, um den kleinen Satz von Fermat per Induktion zu beweisen:

$$a^p \equiv a \pmod{p} \quad \Rightarrow \quad (a+1)^p \equiv (a+1) \pmod{p}.$$