

Mathematischer Zirkel 10c der MSG “Leonhard Euler”

Internet-Seite des Zirkels :
page.math.tu-berlin.de/~suris/zirkel

Hausaufgaben vom 21.11.2012 (zum 28.11.2012)

Wir analysieren das folgende “Josephus Flavius Spiel”: n Leute stellen sich in Kreis, und dann wird jeder k -te getötet, bis einer am Leben bleibt. Wo sollte man sich am Anfang des “Spiels” stellen, um als letzter am Leben zu bleiben? Dieser Platz wird als $\ddot{U}(n)$ bezeichnet.

Letztes Mal haben wir es geschafft, den Fall $k = 2$ vollständig zu lösen. Dafür haben wir (durch das betrachten, was nach der 1. Runde passiert), die folgenden Relationen hergeleitet:

$$\begin{aligned}\ddot{U}(2m) &= 2\ddot{U}(m) - 1, \\ \ddot{U}(2m + 1) &= 2\ddot{U}(m) + 1.\end{aligned}$$

Daraus haben wir (per Induktion bezüglich a) hergeleitet:

$$\ddot{U}(2^a + b) = 2b + 1 \quad (0 \leq b \leq 2^a - 1),$$

d.h. für n in einem Intervall zwischen zwei 2-Potenzen 2^a und 2^{a+1} (die letzte Zahl ausgeschlossen) wächst $\ddot{U}(n)$ monoton und nimmt dabei allen ungeraden Werte von 1 bis $2^{a+1} - 1$ an.

Nun versuchen wir es, den Fall $k = 3$ analog zu lösen. Wir haben bereits gezeigt:

$$\ddot{U}(3m) = \begin{cases} \frac{3}{2}\ddot{U}(2m) - 1, & \text{falls } \ddot{U}(2m) \text{ gerade,} \\ \frac{3}{2}(\ddot{U}(2m) - 1) + 1, & \text{falls } \ddot{U}(2m) \text{ ungerade.} \end{cases}$$

1. Überlege Dir ähnliche Formeln für $\ddot{U}(3m + 1)$ und $\ddot{U}(3m + 2)$.
2. Überlege Dir, in welchen Intervallen von n wächst $\ddot{U}(n)$ monoton.
3. In welchen von diesen Intervallen ist der Startwert von $\ddot{U}(n)$ gleich 1, in welchen ist er gleich 2?