⑦ Harmonischer Oszillator

Klassische Mechanik:

$$H(p,q) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} \quad , \quad \{p,q\} = 1 \quad , \quad \{p,p\} = \{q,q\} = 0$$

Bewegungsgleichungen:

$$\dot p = \{H,p\} = -m\omega^2 q \, , \quad \dot q = \{H,q\} = \frac{p}{m} \qquad (\text{sodaß } \ddot q = -\omega^2 q)$$

Lösung:

$$\begin{cases} p(t) = p_0 \cos\omega t - m\omega q_0 \sin\omega t \\ q(t) = q_0 \cos\omega t + \frac{p_0}{m\omega} \sin\omega t \end{cases}$$

Komplexe Form:

$$z = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(\omega q + i\frac{p}{m}\right), \quad \bar z = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\left(\omega q - i\frac{p}{m}\right),$$

„physikalische" Schreibweise

dann $\{z, \bar z\} = \frac{i}{m}$, $H(z,\bar z) = m\omega |z|^2 = \cancel{m\omega}\, z\bar z$,

$$\dot z = \{H, z\} = -i\omega z \quad , \quad \dot{\bar z} = i\omega \bar z ,$$

und

$$z = e^{-i\omega t} z_0 , \quad \bar z = e^{i\omega t} \bar z_0$$

Quantenmechanik:

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2 Q^2}{2}$$

in der Koordinatendarstellung mit $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dq^2} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$$

Im Folgenden setzen wir einfachheitshalber $m = 1$:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2}\frac{d^2}{dq^2} + \frac{\omega^2 q^2}{2}$$

Die Quantenanaloga für $z, \bar z$ sind die Operatoren

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\omega\hbar}}(\omega Q + iP) \, , \quad a^* = \frac{1}{\sqrt{2\omega\hbar}}(\omega Q - iP)$$

Die sind definiert auf $W^{1,2}(\mathbb{R}) \cap \hat W^{1,2}(\mathbb{R}) =$
$= W^{1,2}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{F}(W^{1,2}(\mathbb{R}))$ $\quad (W^{1,2} = \{f : f \text{ absolut stetig auf } \mathbb{R},$ $f, f' \in L^2(\mathbb{R})\}$ (62.)

Man zeigt: a^* adjungiert zu a, a adjungiert zu a^*, also $a^{**} = a$, a abgeschlossen. Nach einem Satz von Neumanns, ist a abgeschlossen und $\overline{D(a)} = \mathcal{H}$, so ist a^*a positiv und selbstadjungiert. Aus

$$\{P, Q\}_h = I$$

folgt unmittelbar

$$[a, a^*] = \frac{1}{2\omega h}[\omega Q + iP, \omega Q - iP] = \frac{i}{h}[P, Q] = I$$

auf $W^{2,2}(\mathbb{R}) \cap \hat{W}^{2,2}(\mathbb{R})$. Man kann sogar präziser sein: auf diesem Raum gilt:

$$aa^* = \frac{1}{2\omega h}(\omega Q + iP)(\omega Q - iP) = \frac{1}{2\omega h}(P^2 + \omega^2 Q^2) + \frac{i\omega}{2\omega h}[P, Q]$$

$$\left.\begin{aligned} &= \frac{1}{2\omega h}(P^2 + \omega^2 Q^2) + \frac{1}{2} I \\ a^*a &= \frac{1}{2\omega h}(P^2 + \omega^2 Q^2) - \frac{1}{2} I \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \boxed{H = \omega h\left(a^*a + \frac{1}{2} I\right) = \omega h\left(aa^* - \frac{1}{2} I\right)},$$

selbstadjungiert nach dem Satz von von Neumann.

Setze

$$N = a^*a,$$

dann

$$[N, a] = (a^*a)a - a(a^*a) = [a^*, a]a = -a$$

$$[N, a^*] = (a^*a)a^* - a^*(a^*a) = a^*[a, a^*] = a^*$$

Zusammenfassend:

$$\boxed{[N, a] = -a, \quad [N, a^*] = a^*, \quad [a, a^*] = I}$$

Evolutionsgleichungen:

$\mathring{a} = \{H, a\}_h = -i\omega a$, $(a^*)^\circ = \{H, a^*\}_h = i\omega a^*$ – wie in der Klassik.

$\Rightarrow a(t) = e^{-i\omega t} a_0$, $a^*(t) = e^{i\omega t} a_0^*$

Spektraleigenschaften von H kann man weitgehend untersuchen, basierend nur auf

$$\boxed{\begin{aligned} H &= \omega h\left(a^*a + \frac{I}{2}\right) & (1)\\ H &= \omega h\left(aa^* - \frac{I}{2}\right) & (2)\end{aligned}}$$

Wir werden noch die Relation benutzen

$$\boxed{[a, (a^*)^n] = n\,(a^*)^{n-1}}$$

die leicht per Induktion aus $[a, a^*] = I$ folgt:

$\Big($ $[a,(a^*)^2] = a(a^*)^2 - a^*aa^* + a^*aa^* - (a^*)^2 a = [a,a^*]a^* + a^*[a,a^*] = 2a^*$,

$[a,(a^*)^{n+1}] = a(a^*)^{n+1} - (a^*)^n aa^* + (a^*)^n aa^* - (a^*)^{n+1}a =$
$= [a,(a^*)^n]\,a^* + (a^*)^n [a,a^*] = n(a^*)^{n-1}a^* + (a^*)^n \cdot I =$
$= (n+1)(a^*)^n \Big)$.

Desweiteren;

$[H,a] = \omega h\left(a^*aa - aa^*a\right) = \omega h\,[a^*,a]a = -\omega h a$

$[H,a^*] = \omega h\left(a^*aa^* - a^*a^*a\right) = \omega h\, a^*[a,a^*] = \omega h a^*$

Angenommen, hat H mindestens einen Eigenvektor

$$\psi \in D(a^n) \cap D((a^*)^n), \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$H\psi = \lambda\psi.$$

Dann aus $\omega h\left(a^*a + \frac{I}{2}\right)\psi = \lambda\psi$ folgt

$$\omega h\,\|a\psi\|^2 + \frac{\omega h}{2}\|\psi\|^2 = \lambda\|\psi\|^2.$$

Daraus:

- $\lambda \geq \frac{\omega h}{2}$
- gilt $a\psi = 0$, so ist $\lambda = \frac{\omega h}{2}$ und ψ der entsprechende Eigenvektor von H.

Aus jedem solchen Eigenvektor lassen sich weitere finden:

$$Ha\psi = aH\psi - \omega\hbar a\psi = (\lambda - \omega\hbar)a\psi$$

Also entweder ist $a\psi = 0$ oder ist $a\psi$ ein EV zum EW $\lambda - \omega\hbar$. Ist $a\psi \neq 0$, so entweder ist $a^2\psi = 0$ oder ist $a^2\psi$ ein EV zum EW $\lambda - 2\omega\hbar$. So bekommt man eine Folge von EV $a\psi, a^2\psi, \ldots, a^n\psi, \ldots$ zu den EW $\lambda - \omega\hbar, \lambda - 2\omega\hbar, \ldots, \lambda - n\omega\hbar, \ldots$. Die ist allerdings nach unten beschränkt: $\lambda - n\omega\hbar \geq \frac{\omega\hbar}{2}$.

Daher $\exists n_0 \geq 0$ mit $a^{n_0}\psi \neq 0$ und $a^{n_0+1}\psi = 0$.

Setzen wir $\psi_0 = \frac{a^{n_0}\psi}{\|a^{n_0}\psi\|}$, so gilt

$$\boxed{a\psi_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad H\psi_0 = \frac{\omega\hbar}{2}\psi_0}$$

Der Vektor ψ_0 beschreibt den Grundzustand des Oszillators, nämlich den Zustand mit der kleinsten möglichen Energie $\frac{\omega\hbar}{2}$.

Wir untersuchen desweiteren die Wirkung von a^* auf die Eigenvektoren von H:

$$Ha^*\psi = a^*H\psi + \omega\hbar a^*\psi = (\lambda + \omega\hbar)a^*\psi.$$

Es kann nicht sein, dass $a^*\psi = 0$, sonst wäre es ein EV von H zum EW $-\frac{\omega\hbar}{2}$ – Widerspruch. Also ist $a^*\psi$ ein EV von H zum EW $\lambda + \omega\hbar$. Somit bekommen wir aus ψ_0 die Folge $a^*\psi_0, (a^*)^2\psi_0, \ldots (a^*)^n\psi_0, \ldots$ von EV zu den EW $\lambda + \omega\hbar, \lambda + 2\omega\hbar, \ldots, \lambda + n\omega\hbar, \ldots$. Normierung:

$$\|(a^+)^n\psi_0\|^2 = (a^+(a^+)^{n-1}\psi_0, (a^+)^n\psi_0) = ((a^+)^{n-1}\psi_0, a(a^+)^n\psi_0)$$

$$= ((a^+)^{n-1}\psi_0, (a^+)^n \cancel{a\psi_0}^{=0} + n(a^+)^{n-1}\psi_0) = n\|(a^+)^{n-1}\psi_0\|^2$$

$[a,(a^+)^n] = n(a^+)^{n-1}$

$$= \dots = n!\|\psi_0\|^2 = n!$$

Also bekommen wir eine Folge von normierten EV

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^+)^n\psi_0 \in \mathcal{H}, \quad n = 0, 1, \dots$$

von H zu den EW $(n+\frac{1}{2})\hbar\omega$:

$$H\psi_n = \hbar\omega(n+\tfrac{1}{2})\psi_n$$

$\boxed{\text{VL 14, 2.12.2010}}$

Sie sind orthogonal, da H symmetrisch ist.

Setzt man $\mathcal{H}_0 = \{$abgeschlossener Untervektorraum von $\mathcal{H}$ aufgespannt von $(\psi_n)_{n=0}^{\infty}\}$, so ist $H|_{\mathcal{H}_0}$ wesentlich selbstadjungiert. In der Tat, ist Bild von $(H \pm iI)|_{\mathcal{H}_0}$ dicht in $\mathcal{H}_0$: für jeden $\psi = \sum_n c_n\psi_n$ finden wir $\psi = (H+iI)\varphi$ mit

$$\varphi = \sum_n \gamma_n\psi_n, \quad \gamma_n = \frac{c_n}{\hbar\omega(n+\frac{1}{2}) \pm i}; \quad |\gamma_n| \le |c_n|.$$

Wir können jetzt die Koordinatendarstellung benutzen, um die Existenz <u>eines</u> Eigenvektors (dann des ψ_0) zu beweisen, sowie $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$.

<u>Bemerkung</u>. Ist eine Darstellung der Kommutationsrelationen $[a, a^+] = I$ gegeben und ist ψ_0 ein <u>Nullvektor</u> von a, so ist ~~der~~ Hilbertraum $\mathcal{H} = \overline{\operatorname{span}(\psi_n)_{n=0}^{\infty}}$ eine irreduzible Darstellung

der Heisenbergrelationen gegeben, durch

$$Q = (a+a^*)\sqrt{\frac{h}{2\omega}}\,,\quad P = \frac{(a-a^*)}{i}\sqrt{\frac{\omega h}{2}} = \frac{a-a^*}{2i}\sqrt{2\omega h}.$$

Deswegen: gibt es mehr als einen Nullvektor, so ist die Darstellung reduzibel.

In Koordinatendarstellung:

$$\left(h\frac{d}{dq} + \omega q\right)\psi_0 = 0 \rightsquigarrow \boxed{\psi_0(q) = A\, e^{-\frac{\omega}{2h}q^2}}$$

$A = \left(\frac{\omega}{\pi h}\right)^{1/4}$ – Normierungskoeffizient.

$$\psi_n(q) = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\frac{1}{\sqrt{2\omega h}}\right)^n \left(\omega q - h\frac{d}{dq}\right)^n \psi_0(q)$$

$$= P_n(q)\, e^{-\frac{\omega}{2h}q^2}$$ bilden eine ONB in $L^2(\mathbb{R})$

<u>Satz</u>. Funktionenfolge $q^n e^{-q^2}$, $n = 0,1,2,\dots$ ist in $L^2(\mathbb{R})$ vollständig, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(q)\, q^n e^{-q^2}\, dq = 0\,,\ n = 0,1,2,\dots \Rightarrow f(q) \equiv 0 \quad (\text{in } L^2)$$

<u>Beweis</u>. Das Integral $F(z) := \int_{-\infty}^{\infty} f(q)\, e^{iqz - q^2}\, dq$ konvergiert absolut $\forall z \in \mathbb{C}$ und definiert daher eine ganze Funktion, mit $F^{(n)}(0) = i^n \int_{-\infty}^{\infty} f(q)\, q^n e^{-q^2}\, dq = 0$

$\Rightarrow F(z) \equiv 0$. Also ist für $g(q) := f(q)\, e^{-q^2} \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$

$\mathcal{F}(g) = 0 \Rightarrow g = 0$. ☒

Man kann zeigen:

$$\psi_n(q) = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left(\sqrt{\frac{\omega}{\hbar}}\, q\right) e^{-\frac{\omega q^2}{2\hbar}},$$

wobei

$$H_n(q) := (-1)^n e^{q^2} \frac{d^n}{dq^n} e^{-q^2},$$ die Hermiteschen Polynome sind,

mit Hilfe der Identität

$$e^{\frac{q^2}{2}} \frac{d^n}{dq^n} e^{-q^2} = -\left(q - \frac{d}{dq}\right)\left(e^{\frac{q^2}{2}} \frac{d^{n-1}}{dq^{n-1}} e^{-q^2}\right)$$

$$= \ldots = (-1)^n \left(q - \frac{d}{dq}\right)^n e^{-\frac{q^2}{2}}$$

<u>Satz</u>. $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dq^2} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$, der Hamiltonoperator des quantenmechanischen Harmonischen Oszillators, ist s.a. mit $D(H) = W^{2,2}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{F}(W^{2,2}(\mathbb{R}))$. Er hat eine Punktspektrum:

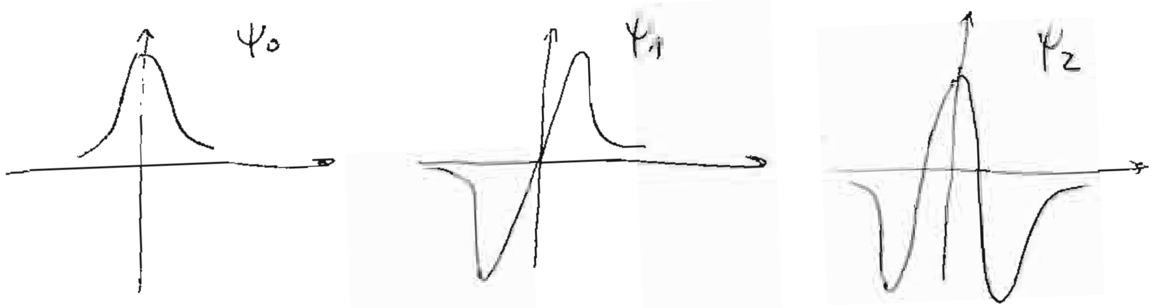
$$H\psi_n = \hbar\omega(n+\tfrac{1}{2})\psi_n$$

mit $\lambda_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$ und

$$\psi_n(q) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, q\right) e^{-\frac{m\omega q^2}{2\hbar}},$$

<u>Beweis</u>. $H\big|_{\text{Schwartzschen Funktionen}}$ ist symmetrisch, hat dort ein vollständiges System von Eigenvektoren $\Rightarrow$ Bild $(H \pm iI)$ sind dicht in $\mathcal{H}$, also H wesentlich selbstadjungiert. Es bleibt zu zeigen, daß der Definitionsbereich des selbstadjungierten Abschlußes ist $W^{2,2}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{F}(W^{2,2}(\mathbb{R}))$. ☐

Bilder



u.s.w (ψ_n besitzt n Nullstellen)

merke den wichtigen Unterschied zwischen der klassischen und Quantenmechanik: in der klassischen

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} \Rightarrow |q| < \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$$

In der Quantenmechanik hat man eine positive Wahrscheinlichkeit, das Teilchen auch außerhalb von diesem Gebiet vorzufinden. z.B. im Grundzustand mit $E = \frac{\hbar\omega}{2}$ ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im klassisch verbotenen Gebiet zu finden gleich

$$\int_{|q| > \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}} |\psi_0(q)|^2 dq = \int_{|q| > \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} q^2} dq \cdot \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^{1/2} 2 \int_1^\infty e^{-z^2/2} dz \qquad q = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\,?$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_1^\infty e^{-x^2/2} dx \approx 0,157 \quad \text{– ziemlich groß.}$$

Jeder Vektor $\varphi \in \mathcal{H}$ ist in der Form

$$\varphi = \sum_{n=0}^\infty \frac{c_n}{\sqrt{n!}} (a^*)^n \psi_0 = \sum_{n=0}^\infty c_n \psi_n \quad , \sum_n |c_n|^2 < \infty$$

darstellbar, somit kann jedem $\varphi \in \mathcal{H}$ eine Folge $(c_n)_{n=0}^\infty \in \ell^2$ zugeordnet werden. Hierbei

$$c_n = (\varphi, \psi_n) = \int_{-\infty}^\infty \varphi(q)\, \psi_n(q)\, dq \qquad (\psi_n \text{ reellwertig}) \qquad (6.9)$$

Wenn $\varphi_1 \leftrightarrow (c_n)_{n=0}^{\infty}$, $\varphi_2 \leftrightarrow (b_n)_{n=0}^{\infty}$, dann

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(q)\,\overline{\varphi_2(q)}\,dq = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} c_m \overline{b_n} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m(q)\psi_n(q)\,dq = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \overline{b_n}.$$

Also bekommen wir einen Isomorphismus $\mathcal{H} \leftrightarrow l_2$.

Wirkung der Operatoren a, a^*:

$$a^*\psi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a^* \psi_n = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1}\, c_n \psi_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, c_{n-1} \psi_n, \quad \psi \in D(a^*)$$

$$a\psi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a \psi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, c_n \psi_{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1}\, c_{n+1} \psi_n, \quad \psi \in D(a),$$

d.h.

$$a \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} \qquad a^* \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

Für diese Matrizen kann man sofort die Relation $[a, a^*] = I$ feststellen:

$$[a, a^*] = aa^* - a^*a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 3 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

Der Hamiltonoperator ist in dieser Darstellung diagonal:

$$H = \hbar\omega\left(a^*a + \frac{I}{2}\right) = \hbar\omega\, \mathrm{diag}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots\right)$$

Also ist das die Eigendarstellung von H.

Operatoren P, Q:

$$P = \sqrt{\frac{\omega}{2h}}\,\frac{a-a^*}{i} \quad\longleftrightarrow\quad \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\omega h}{2}}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots \\ -\sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

$$Q = \sqrt{h}\,\frac{a+a^*}{\sqrt{2\omega}} \quad\longleftrightarrow\quad \sqrt{\frac{h}{2\omega}}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \cdots \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \cdots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \cdots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$$

Diese Matrizen sind Hermitisch, man überprüft sofort $[P,Q] = \frac{h}{i} I$. Die Darstellung der Operatoren durch unendliche Matrizen (in der heutigen Terminologie, die Wahl von ℓ_2 als Zustandsraum) war die Hauptidee von Heisenberg (man suchte nach den Matrizen P, Q mit $[P,Q] = \frac{h}{i} I$ und dann nach EW von $\frac{P^2}{2} + V(Q)$).

Eine andere Darstellung, in der H diagonal ist:

$\mathcal{D} = \{$ ganze Funktionen von $z \in \mathbb{C}\}$

$$(f,g) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} f(z)\overline{g(z)}\, e^{-|z|^2} \underbrace{dx \wedge dy}_{= \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z}}$$ – Lebesguesches Maß auf $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$

Es ist ein komplexer Hilbertraum; Funktionen

$$f_n(z) = \frac{z^n}{\sqrt{n!}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

bilden eine ONB:

$$\int z^n \bar{z}^m e^{-|z|^2} dx\,dy = \int_0^\infty d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi\; \rho \cdot \rho^{n+m} e^{i\varphi(n-m)} e^{-\rho^2}$$

$$= \delta_{mn}\, 2\pi \int_0^\infty \rho^{2n+1} e^{-\rho^2} d\rho = \pi \int_0^\infty t^n e^{-t} dt \cdot \delta_{mn} = \pi n!\, \delta_{mn}.$$

$$\begin{array}{ccccc} \varphi = \sum_{n=0}^\infty c_n \psi_n & \longleftrightarrow & (c_n) & \longleftrightarrow & f(z) = \sum_{n=0}^\infty c_n f_n(z) \\ \cap & & \cap & & \cap \\ L^2(\mathbb{R}) & & \ell_2 & & \mathcal{D} \end{array}$$

$$a\varphi \leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1}\, c_{n+1} f_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n+1}\, c_{n+1} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} \frac{z^n}{\sqrt{(n+1)!}}$$

$$= \frac{d}{dz} \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1} \frac{z^{n+1}}{\sqrt{(n+1)!}} = \frac{df}{dz}$$

$$a^*\varphi \leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, c_{n-1} f_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\, c_{n-1} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} \frac{z^n}{\sqrt{(n-1)!}} = z f(z)$$

Also

$$a \leftrightarrow \frac{d}{dz}, \qquad a^* \leftrightarrow z$$

und

$$Q \leftrightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \left(\frac{d}{dz} + z\right), \qquad P \leftrightarrow \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} \left(\frac{d}{dz} - z\right)$$

$$H \leftrightarrow \hbar\omega \left(z \frac{d}{dz} + \frac{1}{2}\right)$$