③ Hilberträume und Operatoren drauf

Def. Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit Skalarprodukt
(▸ $(\alpha x+\beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z)$
▸ $(x,y) = \overline{(y,x)}$
▸ $(x,x) \geq 0$ mit $(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$)
der bezüglich der induzierten Metrik vollständig ist.

Cauchy-Schwarz-Ungleichung:
$$|(x,y)| \leq \|x\|\|y\| \Rightarrow \text{Dreiecksungleichung, mit } = \text{ g.d.w. } x,y \text{ lin. abh.}$$
Wie gewinnt man das Skalarprodukt aus der Norm zurück (nur für Hilberträume möglich!)
$$(x,y) = \frac{1}{4}\Big(\underbrace{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}_{\substack{2(x,y)+2(y,x)\\ = 4\,\mathrm{Re}\,(x,y)}} + \underbrace{i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2}_{\substack{-2i(x,y)+2i(y,x)\\ = 4\,\mathrm{Im}\,(x,y)}}\Big)$$

Def. Für jede $M \subset \mathcal{H}$ ist
$$M^\perp = \{v \in \mathcal{H} : (v,w) = 0 \quad \forall w \in M\}$$
das orthogonale Komplement zu M.

Satz. ▸ Der Unterraum $M^\perp$ ist abgeschlossen
▸ Ist $U \subset \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Unterraum, so gilt $\mathcal{H} = U \oplus U^\perp$. In der Zerlegung $x = u + u^\perp$, $u \in U, u^\perp \in U^\perp$ gilt:
$$\|x-u\| = \min_{u' \in U} \|x-u'\|$$

Beweis. ▸ Ist (v_n) eine Cauchyfolge in $M^\perp$, so gilt für $v = \lim_{n\to\infty} v_n \in \mathcal{H}$ und für $\forall w \in M$:
$$|(v,w)| = |(v-v_n, w) + (v_n,w)| = |(v-v_n,w)| \leq$$
$$\leq \|v-v_n\|\|w\| \longrightarrow 0, \quad \text{also } (v,w)=0.$$

▸ a) $U \cap U^\perp = \{0\}$, da $(u,u)=0 \Rightarrow u=0$.
b) Es sei $d := \inf_{u' \in U} \|x-u'\|$. Sei (u_n) eine Folge in U mit $\lim_{n\to\infty} \|x-u_n\| = d$. Wir zeigen, daß sie eine Cauchyfolge ist:
$$\|u_m-u_n\|^2 = \|(x-u_m)-(x-u_n)\|^2 = 2\|x-u_m\|^2 + 2\|x-u_n\|^2 - \|2x - \overset{\in U}{(u_m+u_n)}\|^2$$
$$\leq 2\left(\|x-u_m\|^2 + \|x-u_n\|^2 - 2d^2\right) \xrightarrow[m,n\to\infty]{} 0$$
Also gibt es einen Minimierer

c) Es gibt nicht mehr als einen Minimierer: aus
$\|x-u\| = \|x-u'\|$ folgt:

$$\left.\begin{array}{l}\|2x-u-u'\| \le \|x-u\| + \|x-u'\| = 2\|x-u\| \\ \|x - \frac{u+u'}{2}\| \ge \|x-u\|\end{array}\right\} \Rightarrow \|2x-u-u'\| = \|x-u\| + \|x-u'\|$$

$\Rightarrow x-u' = k(x-u)$ mit $|k|=1$ $\Rightarrow \|2x-u-u'\| = |1+k|\,\|x-u\|$,
also entweder $\|x-u\|=0$, $u=x$, $u'=x$ oder $k=1$, $u=u'$.

d) Wäre $u \in U$ Minimierer aber $x-u \notin U^\perp$, so gäbe es
$u' \in U$ mit $(u', x-u) \neq 0$. Setze

$$u^* = u + \frac{(x-u,u')}{(u',u')}\, u' \in U,$$

dann

$$\|x-u^*\|^2 = \|x-u\|^2 + \left|\frac{(x-u,u')}{(u',u')}\right|^2 (u',u') - 2\,\mathrm{Re}\, \frac{\overline{(x-u,u')}\,(x-u,u')}{(u',u')}$$

$$= \|x-u\|^2 - \frac{|(x-u,u')|^2}{(u',u')} < \|x-u\|^2 \quad \text{– Widerspruch.} \ \square$$

Hausaufgabe. Für jeden Unterraum U in $\mathcal{H}$, $U^{\perp\perp} = \overline{U}$.

Satz. Ein Hilbertraum ist genau dann separabel (d.h. besitzt eine dichte abzählbare Teilmenge) wenn er eine abzählbare Orthonormalbasis besitzt.

Die in der Quantenmechanik relevanten Operatoren A sind für gewöhnlich nicht auf dem ganzen $\mathcal{H}$ definiert, sondern auf einem in $\mathcal{H}$ dichten Unterraum $D = D(A) \subset \mathcal{H}$, $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$.

Beispiel. $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$, $A = \frac{d}{dx}$

Zunächst ist A auf $C^1(\mathbb{R})$ definiert, der kein Unterraum von $\mathcal{H}$ ist, aber $\mathcal{H} \cap C^1(\mathbb{R})$ ist in $\mathcal{H}$ dicht. Allerdings muss nicht $\frac{df}{dx} \in L^2(\mathbb{R})$ sein, wenn $f \in \mathcal{H} \cap C^1(\mathbb{R})$ (Ableitung kann anwachsen, wenn f stark oszilliert). Also kann man wählen

$$D(A) = C^1_0(\mathbb{R}) \quad \text{(mit kompaktem Träger)}$$

(immer noch dicht in $\mathcal{H}$). A unbeschränkt:

$\frac{\|Af\|}{\|f\|}$ unbeschränkt: nehme eine $f \in D(A)$ mit $\|f\| = 1$, dann ist auch $\|f_\lambda\| = 1$, wobei $f_\lambda(x) = \lambda^{1/2} f(\lambda x)$:

$$\|f_\lambda\|_2^2 = \lambda \int f(\lambda x)\bar{f}(\lambda x)\,dx = \int f(x)\bar{f}(x)\,dx = \|f\|_2^2,$$

aber $\left\|\frac{df_\lambda}{dx}\right\|_2^2 = \lambda^2 \left\|\frac{df}{dx}\right\|_2 = c\lambda^2 \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} \infty$.

Def. Ein Operator A heißt abgeschlossen, wenn sein Graph

$$\Gamma(A) = \{(x, Ax) \in D(A) \times \mathcal{H}\} \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$$

abgeschlossen ist, d.h. aus $\underset{D(A)}{\underset{\cap}{x_n}} \to \underset{\mathcal{H}}{\underset{\cap}{x^*}}$ und $Ax_n \to \underset{\mathcal{H}}{\underset{\cap}{y^*}}$

folgt: $x^* \in D(A)$ und $Ax^* = y^*$.

Ein Operator A heißt abschließbar, wenn er eine abgeschlossene Erweiterung B besitzt ($\Gamma(A) \subset \Gamma(B) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow D(A) \subset D(B)$ und $B|_{D(A)} = A$).

Satz. A ist genau dann abschließbar, wenn $\overline{\Gamma(A)}$ Graph eines Operators ist, der dann (die kleinste abgeschlossene Erweiterung von A) $=: \bar{A}$ ist.

Beispiel eines nicht abschließbaren Operators: sei $\{\varphi_n\}$ eine orthonormale Basis von $\mathcal{H}$, $e_\infty \in \mathcal{H}$ ein Vektor, der nicht endliche Linearkombination der φ_n ist,

$D := \{$endliche Linearkombinationen von φ_n und $e_\infty\}$

$A : D \to \mathcal{H}$, $A\left(\sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i + c\, e_\infty\right) = c\, e_\infty$. Dann enthält $\overline{\Gamma(A)}$ $(e_\infty, 0)$ und (e_∞, e_∞), ist also nicht Graph eines Operators.

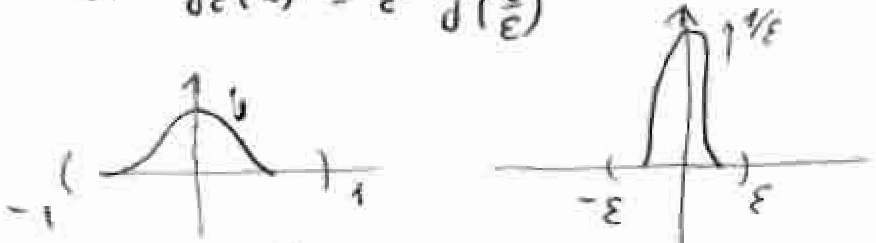
Wir werden aber hauptsächlich mit symmetrischen Operatoren zu tun haben, und die sind immer abschließbar. Für sie ist aber die kleinste abgeschlossene Erweiterung (und überhaupt eine abgeschlossene Erweiterung) niemals auf ganz $\mathcal{H}$ definiert, sobald sie unbeschränkt sind:

Satz über abgeschlossenen Graphen: Jeder abgeschlossene auf ganz $\mathcal{H}$ definierter Operator ist beschränkt.

Beispiel. $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$, $D(A) = C_0^\infty(\mathbb{R})$, $D(B) = C_0^1(\mathbb{R})$ („0" für kompakten Träger), $Af = if'$, $Bf = if'$. Dann ist B eine Erweiterung von A. Da A symmetrisch ist (wird bald definiert und gezeigt), ist er abschließbar.

Wir zeigen, daß $\overline{\Gamma(A)} \supset \Gamma(B)$, sodaß $\bar{A}$ eine Erweiterung von B ist.

Es sei $j \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp} j \subset (-1,1)$ und $\int_{-\infty}^{\infty} j(x)\,dx = 1$.
Setze $j_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$



, dann $\int_{-\infty}^{\infty} j_\varepsilon(x)\,dx = 1$.

Für $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}) =: D(B)$ setze

$$\varphi_\varepsilon(x) = \int_{-\infty}^{\infty} j_\varepsilon(x-t)\varphi(t)\,dt .$$

Dann

$$|\varphi_\varepsilon(x) - \varphi(x)| \le \int j_\varepsilon(x-t)|\varphi(t)-\varphi(x)|\,dt \le \sup_{|t-x|\le\varepsilon} |\varphi(t)-\varphi(x)| .$$

Da $\varphi \in C^1$ und einen kompakten Träger hat, ist sie gleichmäßig stetig $\Rightarrow$ $\varphi_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \varphi$ gleichmäßig. Da $j_\varepsilon \in C_0^\infty$, ist auch $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty =: D(A)$. Offensichtlich $\varphi_\varepsilon \to \varphi$ in $\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$ und analog

$$i\frac{d\varphi_\varepsilon}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} i\frac{d}{dx} j_\varepsilon(x-t)\varphi(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{\infty} i\frac{d}{dt}\big(j_\varepsilon(x-t)\big)\varphi(t)\,dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} j_\varepsilon(x-t)\, i\frac{d}{dt}\varphi(t)\,dt \xrightarrow{L^2(\mathbb{R})} i\frac{d\varphi}{dx} .$$

Also $\varphi_\varepsilon \xrightarrow{\mathcal{H}} \varphi$ und $A\varphi_\varepsilon \xrightarrow{\mathcal{H}} B\varphi$ $\forall \varphi \in D(B)$. Also $\overline{\Gamma(A)} \supset \Gamma(B)$. ∎

<u>Definition</u>. Es sei $A: D(A) \to \mathcal{H}$ ein Operator auf $\mathcal{H}$.
$D(A^*) := \{\varphi \in \mathcal{H} : \exists \eta \in \mathcal{H} \text{ mit } (A\psi, \varphi) = (\psi, \eta) \ \forall \psi \in D(A)\}$,
und
$A^*\varphi = \eta$ für $\varphi \in D(A^*)$ – <u>der adjungierter Operator</u>

<u>Bemerkungen</u>: 0) $\varphi \in D(A^*) \Leftrightarrow |(A\psi, \varphi)| \le C\|\psi\| \ \forall \psi \in D(A)$

1) Da $D(A) \subset \mathcal{H}$ dicht ist, ist dieses Element $\eta = A^*\varphi$ eindeutig definiert (aus $(\psi, \eta_1) = (\psi, \eta_2)$ $\forall \psi \in D(A)$ folgt $(\psi, \eta_1 - \eta_2) = 0 \Leftrightarrow \eta_1 - \eta_2 \in D(A)^\perp = \{0\}$

2) $D(A^*) \subset \mathcal{H}$ ist ein Unterraum, kann aber ziemlich beliebig sein, insbesondere braucht er nicht dicht in $\mathcal{H}$ sein.

<u>Beispiel</u> (oben): $D(A^*) = e_\infty^\perp \subset \mathcal{H}$ nicht dicht in $\mathcal{H}$; auf $D(A^*)$ gilt $A^* = 0$.

<u>Beispiel</u> (analog) Es sei $f \in \{$beschränkte meßbare Fktionen$\}$, $f \notin L^2(\mathbb{R})$,

$D(A) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}) : \int |f(x)\psi(x)| < \infty\} \supset \{\psi \in L^2(\mathbb{R}), \operatorname{supp}\psi$ kompakt$\}$,

daher $D(A)$ dicht in $\mathcal{H}$. Es sei $f_0 \in L^2(\mathbb{R})$ ein festes Element, und

$$A\psi = (\psi, f) f_0 \quad \text{für } \psi \in D(A).$$

Bestimmen wir $D(A^*)$: aus $\varphi \in D(A^*)$ folgt

$$(\psi, A^*\varphi) = (A\psi, \varphi) = (\psi, f)(f_0, \varphi) = (\psi, \overline{(f_0,\varphi)}\, f) = (\psi, (\varphi, f_0) f)$$

Also $A^*\varphi = (\varphi, f_0) f$. Da $f \in L^2(\mathbb{R})$, muß gelten $(\varphi, f_0) = 0$, also $\varphi \in f_0^\perp$ – nicht dicht in $\mathcal{H}$, und auf $D(A^*) = f_0^\perp$ gilt $A^* = 0$.

3) $A \subset B \Rightarrow B^* \subset A^*$

Ist $D(A^*)$ dicht, kann man $A^{**} = (A^*)^*$ einführen.

<u>Satz</u>. Ist $D(A) \subset \mathcal{H}$ dicht, so:

a) A^* ist abgeschlossen, d.h. $\Gamma(A^*) \subset \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ ist abgeschlossen.

b) A ist genau dann abschließbar, wenn $D(A^*)$ dicht ist, und dann $\bar{A} = A^{**}$ und $(\bar{A})^* = A^*$.

<u>Beweis</u>. $(\varphi, \eta) \in \Gamma(A^*) \Leftrightarrow \langle (\varphi, \eta), (A\psi, -\psi) \rangle = 0 \quad \forall \psi \in D(A)$.
In anderen Worten, $\Gamma(A^*) = (J\,\Gamma(A))^\perp$, wobei $J : \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \to \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, $(x, y) \mapsto (+y, -x)$. Orthogonale Komplemente sind aber immer abgeschlossen.

b) Für jeden Unterraum U eines Hilbertraumes gilt $\overline{U} = U^{\perp\perp}$. Es folgt:

$$\overline{\Gamma(A)} = (\Gamma(A))^{\perp\perp} = \left(J\left(J\Gamma(A)\right)^{\perp}\right)^{\perp} = \left(J\Gamma(A^*)\right)^{\perp} = \Gamma(A^{**})$$

(wenn $D(A^*)$ dicht ist), also ist $\overline{\Gamma(A)}$ der Graph von A^{**}. Umgekehrt, sei $D(A^*)$ nicht dicht. Nehme ein $\psi \in D(A^*)^{\perp}$. Für jedes $(\varphi, \eta) \in \Gamma(A^*)$ gilt $((\psi, 0), (\varphi, \eta)) = 0$, sodaß $(\psi, 0) \in \Gamma(A^*)^{\perp} \Rightarrow$
$\Rightarrow (0, \psi) \in J\,\Gamma(A^*)^{\perp} = \overline{\Gamma(A)}$, und $\overline{\Gamma(A)}$ ist kein Graph.

Zuletzt: ist A abschließbar, so

$$(\overline{A})^* = (A^{**})^* = (A^*)^{**}.$$

Für $B := A^*$ gilt $D(B^*) \supset D(A) \Rightarrow D(B^*)$ dicht, also

$$(A^*)^{**} = B^{**} = \overline{B} = \overline{(A^*)} = A^*$$

da nach Teil a) A^* abgeschlossen ist. ☒

~~Beispiel~~.

<u>Definition</u>. • A heißt symmetrisch, falls $A^* \supset A$, d.h. wenn $(A\psi, \varphi) = (\psi, A\varphi)$ $\forall \varphi, \psi \in D(A)$

• A heißt selbstadjungiert, wenn $A = A^*$
$\Leftrightarrow$ A symmetrisch und $D(A) = D(A^*)$.

<u>Korollar</u>. Symmetrische Operatoren sind immer abschließbar (denn $D(A^*) \supset D(A)$ und $D(A)$ dicht). Aus dem letzten Satz folgt: A^* ist eine abgeschlossene Erweiterung von A, $\overline{A} = A^{**}$ die kleinste abgeschlossene Erweiterung.

VL 6, 04.11.2010 | Also A symmetrisch $\Rightarrow$

$\Rightarrow A \subset A^{**} \subset A^*$

Ist A zusätzlich abgeschlossen, so

$$A = A^{**} \subset A^*.$$

Für selbstadjungierte Operatoren gilt

$$A = A^{**} = A^*$$

Der Unterschied zwischen abgeschlossenen symmetrischen Operatoren und selbstadjungierten Operaten ist groß. Der Spektralsatz (kommt bald) ist nur für die letzteren erfüllt, und nur für die kann man die unitären Operatoren e^{iHt} definieren.

<u>Satz</u>. Ist A überall auf $\mathcal{H}$ definiert und symmetrisch, $(Ax, y) = (x, Ay)$ $\forall x, y \in \mathcal{H}$. Dann ist A beschränkt.

<u>Beweis</u>. Wir zeigen, daß $\Gamma(A)$ abgeschlossen ist. Sei $x_n \to x^*$, $Ax_n \to y^*$. Wir zeigen, daß $(x^*, y^*) \in \Gamma(A)$, d.h. $y^* = Ax^*$. Dafür: $\forall z \in \mathcal{H}$:

$$(z, y^*) = \lim_{n\to\infty} (z, Ax_n) = \lim_{n\to\infty} (Az, x_n) = (Az, x^*) = (z, Ax^*) \quad \blacksquare$$

Unbeschränkte Operatoren mit $(x, Ay) = (Ax, y)$ können nicht überall auf $\mathcal{H}$ definiert sein. Die sind auf Unterräumen $D(A)$ definiert. Es kann problematisch sein, $A+B$, A^n zu definieren!

<u>Satz</u> (Hauptkriterium für selbstadjungierte Operatoren) Sei $A: D(A) \to \mathcal{H}$ symmetrisch. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

a) A ist selbstadjungiert

b) A ist abgeschlossen und $\operatorname{Ker}(A^* \pm i) = \{0\}$

c) $\operatorname{Bild}(A \pm i) = \mathcal{H}$

Beweis.

a) $\Rightarrow$ b) Sei A selbstadjungiert. Angenommen, gibt es $\varphi \in D(A^*) = D(A)$ mit $A^*\varphi = i\varphi$. Dann $A\varphi = i\varphi$ und

$$-i(\varphi,\varphi) = (\varphi, i\varphi) = (\varphi, A\varphi) = (A\varphi,\varphi) = i(\varphi,\varphi) \Rightarrow \varphi = 0$$

b) $\Rightarrow$ c) Angenommen, hat $A^*\varphi = -i\varphi$ keine Lösungen $\neq 0$. Wir zeigen, daß Bild $(A-i)$ dicht ist. Wäre es nicht so, hätten wir für $\psi \in (\text{Bild}(A-i))^\perp$

$$((A-i)\varphi, \psi) = 0 \qquad \forall \varphi \in D(A),$$

somit $\psi \in D(A^*)$ und $(A-i)^*\psi = (A^*+i)\psi = 0$ – Widerspruch. Wenn wir zusätzlich zur Dichtheit von Bild $(A-i)$ zeigen, daß dieser Unterraum abgeschlossen ist, dann Bild $(A-i) = \mathcal{H}$. Aber für $\varphi \in D(A)$ gilt

$$\|(A-i)\varphi\|^2 = \|A\varphi\|^2 + \|\varphi\|^2,$$ und aus

$\varphi_n \in D(A)$, $(A-i)\varphi_n \to \psi_0$, so konvergieren auch φ_n und $A\varphi_n$ gegen φ_0 und $\psi_0 + i\varphi_0$. Da A abgeschlossen ist, $\varphi_0 \in D(A)$ und $\psi_0 = (A-i)\varphi_0 \in \text{Bild}(A-i)$, also Bild $(A-i)$ abgeschlossen.

c) $\Rightarrow$ a) Angenommen, Bild $(A-i) = \mathcal{H}$. Sei $\varphi \in D(A^*)$. Es gibt $\eta \in D(A)$ mit $(A-i)\eta = (A^*-i)\varphi$. Da $D(A) \subset D(A^*)$, haben wir $\varphi - \eta \in D(A^*)$ und

$$(A^*-i)(\varphi-\eta) = 0.$$

$\forall \psi \in D(A)$ gilt:

$$0 = ((A^*-i)(\varphi-\eta), \psi) = (\varphi-\eta, (A+i)\psi)$$ und da Bild$(A+i) = \mathcal{H}$, bekommen wir $\varphi = \eta \in D(A)$. Also $D(A^*) \subset D(A) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ A selbstadjungiert. ⊠

Für die ~~nicht~~ symmetrischen selbstadjungierten Operatoren sucht man nach einer selbstadjungierten Erweiterung. Sie existiert nicht immer, und wenn doch – ist nicht unbedingt eindeutig. Für die nächste Klasse von nicht abgeschlossenen symmetrischen Operatoren ist so eine Erweiterung eindeutig definiert.

__Def.__ Ein symmetrischer Operator A heißt wesentlich selbstadjungiert, wenn sein Abschluss $\bar{A} = A^{**}$ selbstadjungiert ist:

$$A \subset A^{**} = A^{*} = \bar{A}.$$

Es sei A wesentlich selbstadjungiert und $S = S^{*} \supset A$, dann: S abgeschlossen $\Rightarrow S \supset \bar{A} = A^{**}$

$$\Rightarrow S = S^{*} \subset (A^{**})^{*} = A^{**} = \bar{A} \quad \text{also } S = \bar{A}.$$

Wesentlich selbstadjungierte Operatoren = die mit eindeutiger sa. Erweiterung

~~abgeschlossenen symmetrischen~~

__Korollar__. Sei A symmetrisch. Dann sind folgende drei Eigenschaften äquivalent.

a) A wesentlich selbstadjungiert

b) $\operatorname{Ker}(A^{*} \pm i) = \{0\}$

c) $\operatorname{Bild}(A^{*} \pm i)$ dicht

__Hausaufgabe.__

a) Ist C symmetrisch, $C \supset A$ und $\operatorname{Bild}(A+i) = \operatorname{Bild}(C+i)$. Dann $C = A$.

b) Angenommen ist A symmetrisch mit $\operatorname{Bild}(A+i) = \mathcal{H}$ aber $\operatorname{Bild}(A-i) \neq \mathcal{H}$. Dann hat A keine selbstadjungierte Erweiterung.

Sei $A : D(A) \to \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Operator.

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda I : D(A) \to \mathcal{H} \text{ bijektiv}\}$$

heißt die <u>Resolventenmenge</u>. Für $\lambda \in \rho(A)$ ist

$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ beschränkt, heißt die Resolvente von A.

|| $\rho(A)$ ist offen

$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ heißt das <u>Spektrum</u> von A.

<u>Satz</u>. Das Spektrum $\sigma(A)$ eines selbstadjungierten Operators A ist $\subset \mathbb{R}$.

<u>Beweis</u>. Ist $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, so gilt $\text{Bild}(A - \lambda I) = \mathcal{H}$ (wird genauso wie für $\lambda = i$ bewiesen – Hausaufgabe).

Desweiteren

$$\|(A - \lambda I)x\|^2 = \|(A - \operatorname{Re}\lambda I)x\|^2 + (\operatorname{Im}\lambda)^2 \|x\|^2 \geq (\operatorname{Im}\lambda)^2 \|x\|^2$$

$$\Rightarrow \quad \|(A - \lambda I)x\| \geq |\operatorname{Im}\lambda| \, \|x\| \qquad (x \in D(A)).$$

Es folgt, daß $A - \lambda I$ bijektiv ist, $\lambda \in \rho(A)$.

<u>Bemerkung</u>. Das Spektrum eines symmetrischen abgeschlossenen Operators braucht nicht reell zu sein. z.B.: $\mathcal{H} = L^2([0,\infty))$,

$$D(A) = \{\varphi \in \mathcal{H} \mid \varphi' \in \mathcal{H}\}$$

$$A\varphi = -i \frac{d\varphi}{dx}$$

Dann sind $f_\lambda \in \mathcal{H}$, $f_\lambda(x) = e^{i\lambda x}$ mit $\operatorname{Im}\lambda > 0$ Eigenfunktionen von A, damit gilt $\{\lambda : \operatorname{Im}\lambda > 0\} \subset \sigma(A)$.

Andererseits ist $D(B) = \{\psi \in \mathcal{H} \mid \psi' \in \mathcal{H}, \psi(0) = 0\}$, $B\psi = -i \frac{d\psi}{dx}$, so ist B symmetrisch, abgeschlossen und

$$D(B^*) = \{\varphi \in \mathcal{H} : (B\psi, \varphi) = (\psi, \eta) \text{ mit } \eta \in \mathcal{H}, \forall \psi \in D(B)\}$$

$$\int_0^\infty -i \frac{d\psi}{dx} \bar{\varphi} \, dx = -i \psi \bar{\varphi} \Big|_0^\infty + i \int_0^\infty \psi \frac{d\bar{\varphi}}{dx} dx$$

$$= \int_0^\infty \psi \overline{\left(-\frac{i\,d\varphi}{dx}\right)}\, dx,$$

sodaß $D(B^*) = D(A)$ und $B^* = A$. Also ist A zu B konjugiert.

Die selbstadjungierten Operatoren auf $\mathcal{H}$ werden als Observablen erklärt.

Die Zustände werden als positive selbstadjungierte Operatoren mit Spur $(=1)$ eingeführt. So finden auch einige beschränkte Operatoren ihren Platz in der Quantenmechanik

---

- Symmetrischer Operator mit $D(A) = \mathcal{H}$ ist beschränkt und selbstadjungiert.

- <u>Def</u>. $A : D(A) \to \mathcal{H}$ heißt <u>positiv</u>, falls $(Ax, x) \geq 0 \quad \forall x \in D(A)$.

<u>Satz</u>. Ist A positiv, so ist er auch symmetrisch

Positiv und beschränkt $\Rightarrow$ selbstadjungiert

(gilt nur im komplexen Hilbertraum)

<u>Beweis</u>. $(Ax, x) = \overline{(x, Ax)} = (x, Ax)$ (da reell).

$$\left.\begin{aligned}(A(x+y), x+y) &= (Ax, x) + (Ax, y) + (Ay, x) + (Ay, y) \\ (A(x+iy), x+iy) &= (Ax, x) - i(Ax, y) + i(Ay, x) + (Ay, y)\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow 2(Ax, y) = (A(x+y), x+y) + i(A(x+iy), x+iy) - (1+i)(Ax, x) - (1+i)(Ay, y)$$

$$= 2(x, Ay).$$

Im reellen Hilbertraum (Ax, y) ist nicht durch (Ax, x) auszudrücken! ∎

Für positive Operatoren gilt es
$$|(Ax,y)|^2 \le (Ax,x)(Ay,y) \quad \forall x,y \in D(A),$$
insbesondere $(Ax,x) = 0 \Rightarrow Ax = 0$.

~~Def~~ $\mathcal{L}(\mathcal{H}) = \{$ Beschränkte Operatoren auf $\mathcal{H}\}$

$\mathcal{C}(\mathcal{H}) = \{$ kompakte Operatoren auf $\mathcal{H}$, d.h. solche, die beschränkte Mengen aus $\mathcal{H}$ in prekompakte Mengen (solche mit kompakten Abschluss) überführt $\}$

$\mathcal{J}_1(\mathcal{H})$ = Spurklasse $= \{ A \in \mathcal{C}(\mathcal{H})\ ;\ \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A) < \infty$,

$\mu_n(A) = \sqrt{\lambda_n(A)}$, $\lambda_n(A)$ sind Eigenwerte von positiven Operator $A^*A \}$ $= \{ A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) : \forall$ ONB (e_n) gilt $\sum_{n=1}^{\infty} |(Ae_n, e_n)| < \infty \}$.

$$\mathrm{tr}\, A = \sum_{n=1}^{\infty} (Ae_n, e_n),$$

ist von der Wahl einer ONB unabhängig. Für einen positiven Operator $A \in \mathcal{J}_1(\mathcal{H})$ wenn
$$\mathrm{tr}\, A = \sum_{n=1}^{\infty} (Ae_n, e_n) < \infty$$
für <u>eine</u> (und dann für jede) ONB (e_n).

$\mathcal{J}_1$ ist ein beidseitiges Ideal in $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, d.h.
$$A \in \mathcal{J}_1,\ B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \Rightarrow AB,\ BA \in \mathcal{J}_1, \text{ mit } \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$$
$$A \in \mathcal{J}_1 \Rightarrow A^* \in \mathcal{J}_1$$

$\mathcal{J}_2(\mathcal{H}) = \{$ Hilbert-Schmidt Operatoren $\} =$
$= \{ A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) : AA^* \in \mathcal{J}_1 \}$
$= \{ A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) : \sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2 < \infty$ für eine, und dann für jede ONB $(e_n) \}$

$\mathcal{J}_2$ ist auch ein beidseitiges Ideal und ein Hilbertraum mit $(A,B) = \mathrm{tr}(AB^*)$.