Also

$$V(x) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \log \det A(x)$$

<u>Beispiel</u>: $n = 2$

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\gamma_1}{2\varkappa_1} e^{-2\varkappa_1 x} & \frac{\gamma_1}{\varkappa_1 + \varkappa_2} e^{-(\varkappa_1+\varkappa_2)x} \\ \frac{\gamma_2}{\varkappa_1+\varkappa_2} e^{-(\varkappa_1+\varkappa_2)x} & 1 + \frac{\gamma_2}{2\varkappa_2} e^{-2\varkappa_2 x} \end{pmatrix}$$

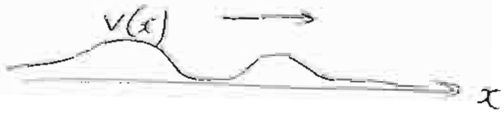
$\det A(x) =$

$$= 1 + \frac{\gamma_1}{2\varkappa_1} e^{-2\varkappa_1 x} + \frac{\gamma_2}{2\varkappa_2} e^{-2\varkappa_2 x} + \frac{\gamma_1 \gamma_2}{4\varkappa_1 \varkappa_2} \left(\frac{\varkappa_1 - \varkappa_2}{\varkappa_1 + \varkappa_2} \right)^2 e^{-2(\varkappa_1+\varkappa_2)x}$$

u.s.w.

(16) KdV-Gleichung und inverse Streumethode

$$V_t = 6 V V_x - V_{xxx}$$



Dispersion + Nichtlinearität

Lax-Darstellung

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x,t)$$

<u>Behauptung</u>: Evolviert $V(x,t)$ mit der Zeit t nach der KdV, so ist die Evolution der Streudaten des $H(t)$ <u>einfach</u>.

Zum Beweis:

$$\dot{H} = [A, H] \quad \text{mit} \quad A = -4\frac{d^3}{dx^3} + 3\left(V\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}V\right)$$

Hierbei nicht-trivial:

$$[A, H]$$

ist ein Multiplikationsoperator.

In der Tat: $[A,H] =$

$$= \left(-4D^3 + 3(VD+DV)\right)\left(-D^2+V\right) -$$
$$- \left(-D^2+V\right)\left(-4D^3+3(VD+DV)\right)$$

$$= -4D^3V - 3VD^3 + \cancel{3VDV} - 3DVD^2 + 3DV^2$$
$$+ 3D^2VD + 3D^3V + 4VD^3 - 3V^2D - \cancel{3VDV}$$

$$= -\left(\cancel{VD^3} + \cancel{3V'D^2} + \cancel{3V''D} + V'''\right) + \cancel{VD^3}$$
$$- \cancel{3V'D^2} - \cancel{3VD^3} + 3\left(\cancel{V^2D} + 2V'V\right)$$
$$+ 3\left(\cancel{VD^3} + \cancel{2V'D^2} + \cancel{V''D}\right) - \cancel{3V^2D}$$

$$= -V''' + 6V'V$$

Es sei jetzt $\psi(x,t)$ eine Lösung (für alle t) der EW-Gleichung

$$H\psi = \lambda\psi .$$

Betrachte

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} - A\psi :$$

$$H\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} - A\psi\right) = H\frac{\partial\psi}{\partial t} - HA\psi = \frac{\partial}{\partial t}(H\psi) - (\dot{H} + HA)\psi$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}(H\psi) - AH\psi = \lambda\left(\frac{\partial\psi}{\partial t} - A\psi\right),$$

sodass $\frac{\partial\psi}{\partial t} - A\psi$ wieder derselben Gleichung genügt.

Betrachten wir $\psi = f_2(x,k)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_2(x,k) - A f_2(x,k) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + 4D^3 - 3VD - 3DV\right) f_2(x,k)$$

$$\underset{x\to-\infty}{\sim} 4(-ik)^3 e^{-ikx} = 4ik^3 e^{-ikx} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} - A\right) f_2(x,k) = 4ik^3 f_2(x,k).$$

Dies bedeutet:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - A\right)\left(a(k) f_1(x,-k) + b(k) f_1(x,k)\right) =$$

$$= 4ik^3 \left(a(k) f_1(x,-k) + b(k) f_1(x,k)\right).$$

Vergleichen wir das Verhalten bei $x \to +\infty$:

$$\mathring{a}\, e^{-ikx} + \mathring{b}\, e^{ikx} + a \cdot 4D^3 e^{-ikx} + b \cdot 4D^3 e^{ikx}$$

$$= 4ik^3 \left(a e^{-ikx} + b e^{ikx}\right)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\left(\mathring{a} + 4ik^3 a\right) e^{-ikx} + \left(\mathring{b} - 4ik^3 b\right) e^{ikx} =$$

$$= 4ik^3 \left(a e^{-ikx} + b\, e^{ikx}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \quad \mathring{a} = 0, \quad \mathring{b} = 8ik^3 b$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{a(k) = \text{konst}, \quad b(k) = b(k,0)\, e^{8ik^3 t}}$$

$$\Downarrow$$

$$i\varkappa_j = \text{konst}$$

Normierungskoeffiziente: $m_l = \|f_1(\cdot, i\varkappa_l)\|^2 = \frac{i\mathring{a}(i\varkappa_l) c_l}{\ldots}$, wobei

$$f_1(x, i\varkappa_l) = c_l\, f_2(x, i\varkappa_l)$$

Also $\frac{1}{m_l} = \gamma_l \sim \frac{1}{c_l}$. Dabei

$$f_2(x, i\varkappa_l) \sim \gamma_l\, e^{-\varkappa_l x}, \quad x \to +\infty,$$

$$\Longrightarrow \left(\mathring{\gamma}_l e^{-\varkappa_l x} + 4D^3_{\gamma_l} e^{-\varkappa_l x}\right) = 4i(i\varkappa_l)^3 \gamma_l e^{-\varkappa_l x} \Longrightarrow$$

$$\dot{\gamma}_\ell = 8\varkappa_\ell^3 \gamma_\ell \,, \qquad \boxed{\gamma_\ell(t) = \gamma_\ell(0)\, e^{8\varkappa_\ell^3 t}}$$

Allgemeines Schema der inversen Streumethode:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
V(0,x) \arrow[r, "\substack{\text{direkte} \\ \text{Streuaufgabe}}"] \arrow[d, dashed, "\text{KdV}"'] & \substack{\varkappa_\ell(0),\ \gamma_\ell(0) \\ r(k,0)} \arrow[d, "\substack{\text{einfache} \\ \text{Evolution}}"] \\
V(t,x) & \substack{\varkappa_\ell(t) = \varkappa_\ell(0) \\ \gamma_\ell(t) = \gamma_\ell(0)\, e^{8\varkappa_\ell^3 t} \\ r(k,t) = r(k,0)\, e^{8ik^3 t}} \arrow[l, "\text{inverse}", "\text{Streuaufgabe}"']
\end{tikzcd}$$

Beispiel. 1-Solitonenlösung

$$V(x,t) = -\frac{2\varkappa^2}{\operatorname{ch}^2 \varkappa (x - x_0(t))}$$

$$x_0(t) = \frac{1}{2\varkappa} \log \frac{\gamma(t)}{2\varkappa} = \frac{1}{2\varkappa} \log \frac{\gamma(0)}{2\varkappa} + \frac{1}{2\varkappa}(8\varkappa^3 t)$$

$$= 4\varkappa^2 t + x_0$$

$$V(x,t) = -\frac{2\varkappa^2}{\operatorname{ch}^2 \varkappa (x - 4\varkappa^2 t - \varphi_0)}$$

Eine Welle vom konstanten Profil, die nach rechts läuft mit der Geschwindigkeit $4\varkappa^2$ (wobei $2\varkappa^2$ die Amplitude ist, und $\sim \frac{1}{\varkappa}$ die Breite).

Beispiel 2. 2-Solitonen-Lösung

$$\det A = 1 + \frac{\gamma_1}{2\varkappa_1} e^{-2\varkappa_1 x + 8\varkappa_1^3 t} + \frac{\gamma_2}{2\varkappa_2} e^{-2\varkappa_2 x + 8\varkappa_2^3 t}$$

$$+ \frac{\gamma_1\gamma_2}{4\varkappa_1\varkappa_2} \left(\frac{\varkappa_1-\varkappa_2}{\varkappa_1+\varkappa_2}\right)^2 e^{-2(\varkappa_1+\varkappa_2)t + 8(\varkappa_1^3+\varkappa_2^3)t}$$

Angenommen, $\varkappa_1 > \varkappa_2$. Betrachten wir das Profil im Bereich $x - 4\varkappa_1^2 t \approx$ konst. Dann für $t \to +\infty$: $x - 4\varkappa_2^2 t = x - 4\varkappa_1^2 t + 4(\varkappa_1^2 - \varkappa_2^2)t \to +\infty$, sodaß $e^{-2\varkappa_2 x + 8\varkappa_2^3 t}$ exponentiell klein ist, und wir bekommen asymptotisch eine 1-solitonen Lösung, die den Daten $(\gamma_1, \varkappa_1)$ entspricht. Für $t \to -\infty$: $x - 4\varkappa_2^2 t \to -\infty$, der Term $e^{-2\varkappa_2 x + 8\varkappa_2^3 t}$ dominiert:

$$\det A \approx \frac{\gamma_2}{2\varkappa_2} e^{-2\varkappa_2 x + 8\varkappa_2^3 t}\left(1 + \frac{\gamma_1}{2\varkappa_1}\left(\frac{\varkappa_1-\varkappa_2}{\varkappa_1+\varkappa_2}\right)^2 e^{-2\varkappa_1 + 8\varkappa_1^3 t}\right) \Rightarrow$$

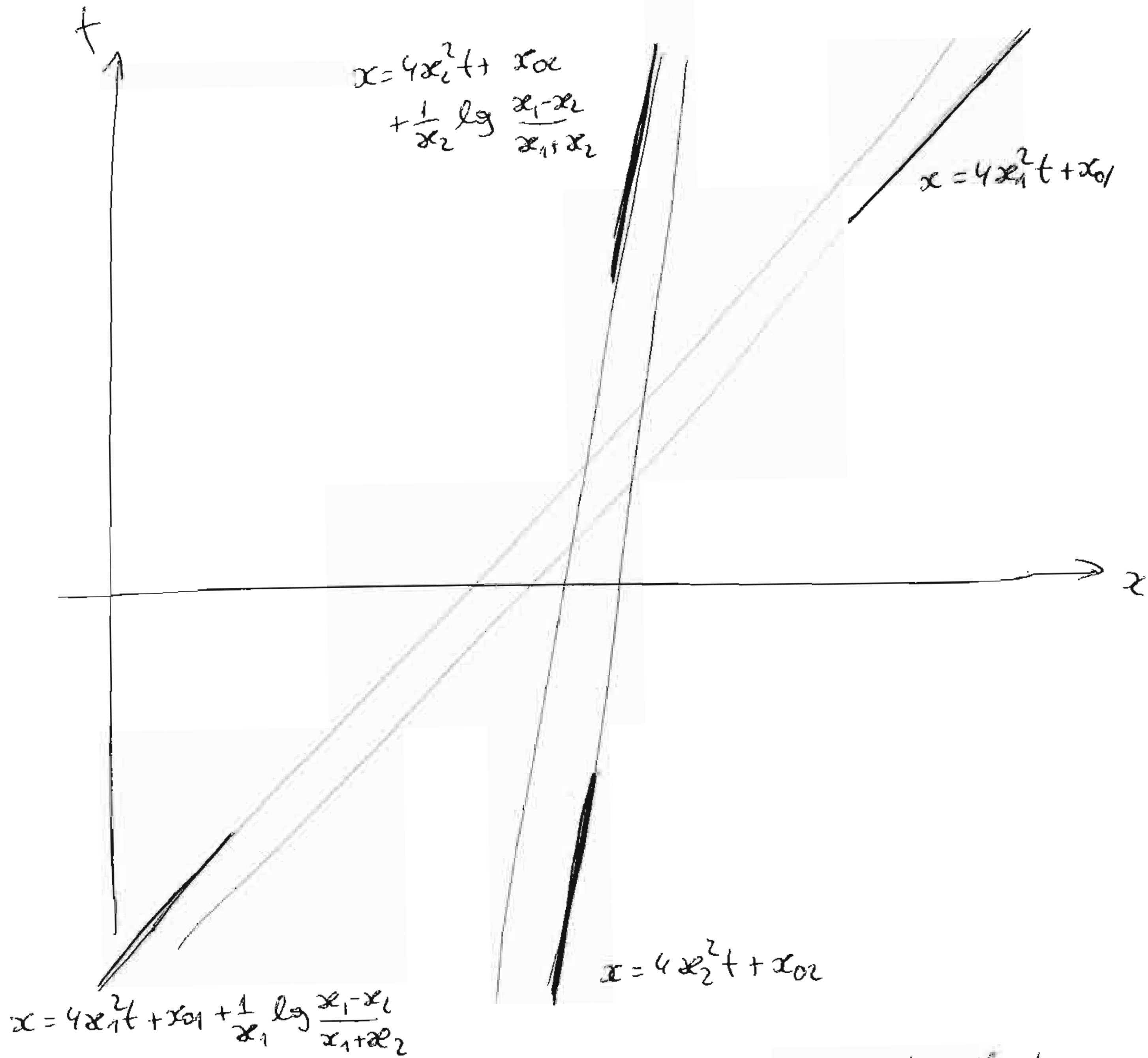
$$\Rightarrow \log \det A \approx \text{konst} - 2\varkappa_2 x + 8\varkappa_2^3 t + \log\left(1 + \frac{\gamma_1}{2\varkappa_1}\left(\frac{\varkappa_1-\varkappa_2}{\varkappa_1+\varkappa_2}\right)^2 e^{-2\varkappa_1 x + 8\varkappa_1^3 t}\right)$$

$\frac{d^2}{dx^2}$ läßt den Beitrag vom ersten Term verschwinden, und wir bekommen dieselbe 1-solitonen-Lösung aber mit $\gamma_1 \mapsto \gamma_1\left(\frac{\varkappa_1-\varkappa_2}{\varkappa_1+\varkappa_2}\right)^2$, also

$$x_{01} \rightsquigarrow x_{01} + \frac{1}{2\varkappa_1}\log\left(\frac{\varkappa_1-\varkappa_2}{\varkappa_1+\varkappa_2}\right)^2 = x_{01} + \frac{1}{\varkappa_1}\log\left|\frac{\varkappa_1-\varkappa_2}{\varkappa_1+\varkappa_2}\right|$$

Analog, für $x - 4\varkappa_2^2 t \approx$ konst hat man für $t \to -\infty$ die 1-solitonen-Lsg zu $(\gamma_2, \varkappa_2)$, und für $t \to +\infty$ dieselbe Lsg mit

$$x_{02} \rightsquigarrow x_{02} + \frac{1}{\varkappa_2}\log\left|\frac{\varkappa_1-\varkappa_2}{\varkappa_1+\varkappa_2}\right|$$



Die Wechselwirkung der Solitonen ist desto stärker, je näher die Geschwindigkeiten sind (je kleiner $|\varkappa_1-\varkappa_2|$)