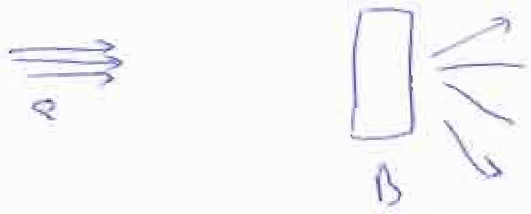
VL 27, 08.02.2011

(15) Einführung in die Streutheorie

man beschiesst mit Teilchen von Typ A das Zielobjekt bestehend aus Teilchen von Typ B und beobachtet (zählt) die wegfliegenden Teilchen



man versucht, die Beschaffenheit (Dicke etc.) von Zielobjekt so anzupassen, daß möglichst viele A-Teilchen rauskommen (gestreut werden), allerdings ohne die mehrfache Wechselwirkung mit B-Teilchen durchzumachen, sodaß es lediglich um die Statistik der Streuung von A auf B geht.

Direktes Problem: die Streuungsstatistik von bekannten Potentialen herzuleiten.
Inverses Problem: von der Statistik auf Potentiale zu schliessen.

1-Dim Teilchen: Streuung auf einem Potential

Zunächst wird die 1-dim stationäre Schrödinger-Gleichung betrachtet

$$H\psi = E\psi \quad , \quad H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \quad , \quad E = k^2 \underline{\underline{> 0}}$$

(Streuung – Untersuchung des kontinuierlichen Spektrums)

Wir werden zunächst das direkte Streuproblem betrachten, für den Fall, dass $|V(x)| \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0$ schnell genug, nämlich

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} (1+|x|)|V(x)| < \infty}$$

(V lokal integrierbar, oft wird dazu Stetigkeit angenommen)

In diesem Fall

$$\sigma(x) := \int_x^{\infty} |V(s)|\, ds \xrightarrow[x\to\infty]{} 0 ,$$

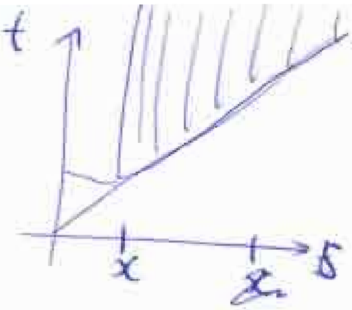
mehr sogar:

$$\sigma_1(x) := \int_x^{\infty} \sigma(s)\, ds \begin{cases} < \infty \\ \xrightarrow[x\to\infty]{} 0 \end{cases} .$$

In der Tat,

$$\sigma_1(x) = \int_x^{\infty}\left(\int_s^{\infty} |V(t)|\, dt\right) ds = \int_x^{\infty}\left(\int_x^{t} ds\right)|V(t)|\, dt$$

$$= \int_x^{\infty} (t-x)\, |V(t)|\, dt < \infty$$



<u>Satz</u>. ▸ Für $k \in \mathbb{R}$ hat die Schrödinger-Gleichung die sogenannten Jostlösungen $f_1(x,k)$, $f_2(x,k)$ mit den Asymptotiken

$$f_1(x,k) = e^{ikx} + o(1), \qquad x \to +\infty$$

$$f_2(x,k) = e^{-ikx} + o(1), \qquad x \to -\infty ,$$

die man nach x ableiten kann:

$$f_1'(x,k) = ik e^{ikx} + o(1), \qquad x \to +\infty$$

$$f_2'(x,k) = -ik e^{ikx} + o(1), \qquad x \to -\infty .$$

▸ Sie können analytisch in die obere Halbebene $\operatorname{Im} k > 0$ fortgesetzt werden, sind stetig in $\operatorname{Im} k \geq 0$ (gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von x)

▸ Es gelten die Symmetrieeigenschaften

$$\overline{f_1(x,k)} = f_1(x,-\bar{k}), \qquad \overline{f_2(x,k)} = f_2(x,-\bar{k}), \quad \operatorname{Im} k \geq 0$$

▸ Für $|k| \to \infty$, $\operatorname{Im} k \geq 0$ gelten die asymptotischen

Relationen

$$e^{-ikx} f_1(x,k) = 1 + O\left(\frac{1}{|k|}\right), \quad e^{ikx} f_2(x,k) = 1 + O\left(\frac{1}{|k|}\right).$$

<u>Beweis</u>. Der entscheidender Trick – die Diff Gl

$$-f_1'' + V(x) f_1 = k^2 f_1$$ mit der Randbedingung $$\lim_{x \to +\infty} e^{-ikx} f_1(x,k) = 1$$

als eine Integralgleichung umzuschreiben. Dafür – Variation der Konstanten

$$f_1(x,k) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$$

$$f_1'(x,k) = A ik e^{ikx} - B ik e^{-ikx} \Leftrightarrow A' e^{ikx} + B' e^{-ikx} = 0$$

$$f_1''(x,k) = -k^2 A e^{ikx} - k^2 B e^{-ikx} + A' ik e^{ikx} - B' ik e^{-ikx} = V(x) f_1$$

$$A' e^{ikx} + B' e^{-ikx} = 0$$
$$A' ik e^{ikx} - B' ik e^{-ikx} = V(x) \overset{f_1(x)}{\cancel{(A e^{ikx} + B e^{-ikx})}} \quad \Big| \begin{matrix} ik & ik \\ + & - \end{matrix}$$

$$2ik A' e^{ikx} = \cancel{V(x) A e^{ikx} + V(x) B e^{-ikx}} \; V(x) f_1(x)$$

$$\begin{cases} A'(x) = \frac{1}{2ik} e^{-ikx} V(x) f_1(x) \\ A(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} 1 \end{cases}$$

$$2ik B' e^{-ikx} = -V(x) f_1(x)$$

$$\begin{cases} B'(x) = -\frac{1}{2ik} e^{ikx} V(x) f_1(x) \\ B(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} 0 \end{cases}$$

$$A(x) = 1 - \frac{1}{2ik} \int_x^\infty e^{-ikt} V(t) f_1(t)\, dt$$

$$B(x) = \frac{1}{2ik} \int_x^\infty e^{ikt} V(t) f_1(t)\, dt$$

$$f_1(x,k) = e^{ikx} + \int_x^\infty \frac{e^{ikt-ikx} - e^{ikx-ikt}}{2ik} V(t) f_1(t,k)\, dt$$

$$= e^{ikx} - \int_x^\infty \frac{\sin k(x-t)}{k} V(t) f_1(t,k)\, dt$$

Setze $\varphi(x,k) = e^{-ikx} f_1(x,k)$, dann

$$\boxed{\varphi(x,k) = 1 + \int_x^\infty \frac{-1 + e^{+2ik(t-x)}}{2ik} V(t)\, \varphi(t,k)\, dt}$$

für $\operatorname{Im} k \geq 0$ das ist eine Integralgleichung von Volterra-Typ, kann durch Iteration gelöst werden:

$$\varphi_0(x,k) \equiv 1$$

$$\varphi_{n+1}(x,k) = 1 - \int_x^\infty \frac{1 - e^{2ik(t-x)}}{2ik} V(t)\, \varphi_n(t,k)\, dt \quad , \quad n \geq 1$$

Setzt man

$$\varphi_{n+1}(x,k) - \varphi_n(x,k) = \hat{\varphi}_{n+1}(x,k), \text{ so hat man}$$

$$\hat{\varphi}_{n+1}(x,k) = -\int_x^\infty \frac{1 - e^{2ik(t-x)}}{2ik} V(t)\, \hat{\varphi}_n(t,k)\, dt,$$

wir zeigen gleich per Induktion, daß

$$|\hat{\varphi}_n(x,k)| \leq \frac{(\sigma_1(x))^n}{n!},$$

sodaß die Reihe

$$\varphi(x,k) := \sum_{n=0}^\infty \hat{\varphi}_n(x,k)$$

konvergiert absolut und gleichmäßig bez. $x \in$ kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}$, mit

$$|\varphi(x,k)| \leq e^{\sigma_1(x)}, \qquad \forall k \text{ mit } \operatorname{Im} k \geq 0.$$

In der Tat,

$$|\hat{\varphi}_{n+1}(x,k)| \leq \left| \int_x^\infty \frac{-1 + e^{2ik(t-x)}}{2ik} V(t)\, \hat{\varphi}_n(t,k)\, dt \right|$$

$$= \left| \int_x^\infty \int_x^t e^{2ik(s-x)} V(t)\, \hat{\varphi}_n(t,k)\, ds\, dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{n!} \int_x^\infty \int_x^t |V(t)|\, (\sigma_1(t))^n\, ds\, dt = \frac{1}{n!} \int_x^\infty \int_s^\infty |V(t)|\, \sigma_1^n(t)\, dt\, ds$$

$$= \frac{1}{n!} \int_x^\infty \sigma_1(s)^n \sigma(s)\, ds = \frac{\sigma_1(x)^{n+1}}{(n+1)!} \quad \square$$

Die Lösung mit $\lim_{x\to\infty} e^{-ikx} f(x,k) = 1$ ist eindeutig (gäbe es zwei, würde ihre Differenz $\underbrace{}_{\chi(x,k)}$ der homogenen Integralgleichung genügen, dann

$$|\chi(x,k)| \le \int_x^\infty \int_x^t |V(t)|\,|\chi(t,k)|\, ds\, dt,$$

und mit $\alpha(x) := \sup_{t\ge x} |\chi(t,k)|$ bekämen wir

$$|\chi(x,k)| \le \alpha(x) \frac{(\sigma_1(x))^n}{n!} \Rightarrow \chi(x,k) \equiv 0.$$

Daraus folgt die Konjugationseigenschaft sowie die Abschätzung

$$|\varphi(x,k) - 1| \le \frac{\sigma(x)}{|k|} e^{\frac{1}{|k|}\sigma(x)}.$$

In der Tat,

$$|\varphi(x,k) - 1| \le \left| \int_x^\infty \frac{e^{2ik(t-x)} - 1}{2|k|} |V(t)|\,|\varphi(t,k) - 1 + 1|\, dt \right|$$

$$\le \frac{\sigma(x)}{|k|} - \frac{1}{|k|} \int_x^\infty \sigma'(t)\, |\varphi(t,k) - 1|\, dt$$

$\Rightarrow$ (iterieren)

$$|\varphi(x,k) - 1| \le \frac{\sigma(x)}{|k|} e^{\frac{1}{|k|}\sigma(x)}$$

$\Rightarrow$ sowohl die Asymptotik für $|k| \to \infty$ als auch

$$\boxed{|f_1(x,k) - e^{ikx}| \le \frac{e^{-\operatorname{Im} kx}}{|k|} \sigma(x) e^{\frac{1}{|k|}\sigma(x)}}$$

Differentiation bez. x: man tut es in der Integralgleichung:

$$f_1'(x,k) - ik e^{ikx} = -\int_x^\infty \cos k(x-t)\, V(t)\, f_1(t,k)\, dt$$

$\Rightarrow \quad \left(\text{da } |\cos k(t-x)| \leq e^{\operatorname{Im} k(t-x)}\right)$

$$\Rightarrow |e^{-ikx} f_1'(x,k) - ik| \leq \int_x^\infty |V(t)|\,|\varphi(t,k)|\,dt \leq \sigma(x)\, e^{\sigma_1(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Die letzte technische Abschätzung:

$$|e^{-ikx} f_1(x,k) - 1| \leq \left(\sigma_1(x) - \sigma_1\left(x + \tfrac{1}{|k|}\right)\right) e^{\sigma_1(x)}$$

für $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$. Zum Beweis, merke: $|V(t)| = -\sigma'(t)$, und integriere partiell:

$$|\varphi(x,k) - 1| \leq \int_x^\infty \frac{|e^{2ik(t-x)} - 1|}{2|k|}\, |V(t)|\, |\varphi(t,k)|\, dt$$

$$\leq e^{\sigma_1(x)} \left(\int_x^{x+\frac{1}{|k|}} (t-x)\,|V(t)|\,dt + \frac{1}{|k|} \int_{x+\frac{1}{|k|}}^\infty |V(t)|\,dt \right)$$

$$= e^{\sigma_1(x)} \left(-(t-x)\,\sigma(t)\Big|_x^{x+\frac{1}{|k|}} + \int_x^{x+\frac{1}{|k|}} \sigma(t)\,dt + \frac{1}{|k|} \int_{x+\frac{1}{|k|}}^\infty |V(t)|\,dt \right)$$

$$= e^{\sigma_1(x)} \left(\sigma_1(x) - \sigma_1\left(x + \tfrac{1}{|k|}\right) \right) \quad \boxed{\text{₹}}$$

Für reelle $k \neq 0$ haben wir zwei Paare von linear unabhängigen Lösungen:

$$f_1(x,k), \quad f_1(x,-k) = \overline{f_1(x,k)}$$

und

$$f_2(x,k), \quad f_2(x,-k) = \overline{f_2(x,k)}.$$

In der Tat, die Wronski-Determinanten $W(y_1, y_2) = y_1' y_2 - y_1 y_2'$ sind x-unabhängig und deren Grenzwerte sind

$$W(f_1(x,k), f_1(x,-k)) = \lim_{x\to+\infty} W(f_1(x,k), f_1(x,-k)) = 2ik \neq 0$$

$$W(f_2(x,k), f_2(x,-k)) = \lim_{x\to-\infty} W(f_2(x,k), f_2(x,-k)) = -2ik \neq 0$$

Daher für alle solche k:

$$f_2(x,k) = a(k)\, f_1(x,-k) + b(k)\, f_1(x,k), \qquad (*)$$

mit

$$\left.\begin{aligned} a(k) &= \frac{1}{2ik} W(f_1(x,k), f_2(x,k)) \\ b(k) &= \frac{1}{2ik} W(f_2(x,k), f_1(x,-k)) \end{aligned}\right\}, \qquad \begin{cases} \overline{a(k)} = a(-k) \\ \overline{b(k)} = b(-k) \end{cases}$$

Analog:

$$f_1(x,k) = a(k)\, f_2(x,-k) + b(-k)\, f_2(x,k) \qquad (**)$$

Setzt man $(**)$ in $(*)$, so bekommt man

$$f_2(x,k) = a(k)\left[\overline{a(k)}\, f_2(x,k) - b(k)\, f_2(x,-k)\right] + b(k)\left[a(k)\, f_2(x,-k) + \overline{b}(k)\, f_2(x,k)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad |a(k)|^2 - |b(k)|^2 = 1.$$

Insbesondere für $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, gilt $|a(k)| \geq 1$.

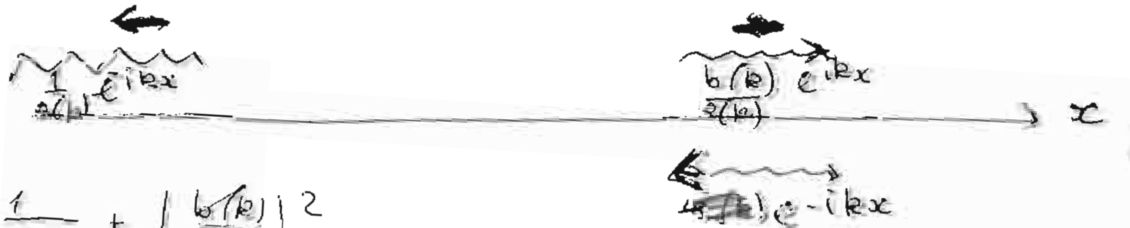
Man kann $a(k)$ in die obere Halbebene $(\operatorname{Im} k > 0)$ analytisch fortsetzen, mit

$$a(k) = 1 + O\left(\frac{1}{|k|}\right), \quad |k| \to \infty.$$

Man kann auch behaupten, daß $k\,a(k)$ stetig für $\operatorname{Im} k \geq 0$ ist.

$\boxed{\text{VL 28, 10.02.2011}}$

$$f_2(x,k) = a(k)\, f_1(x,-k) + b(k)\, f_1(x,k) \qquad \Big|\ \frac{1}{a(k)}$$



$$1 = \frac{1}{|a(k)|^2} + \left|\frac{b(k)}{a(k)}\right|^2$$

Alle Nullstellen von $a(k)$ befinden sich in der oberen Halbebene $\operatorname{Im}(k) > 0$ (da $|a(k)| \geq 1$ für $\operatorname{Im}(k) = 0$). Sei k_0 eine Nullstelle,

$$a(k_0) = 0.$$

Das bedeutet $W(f_1(x,k_0), f_2(x,k_0)) = 0$, also

$$f_1(x,k_0) = c_0 f_2(x,k_0)$$

Die Lösung $f_1(x,k)$ fällt exponentiell ab für $x \to +\infty$ ($|f_1(x,k)| \leq e^{-\operatorname{Im}(k) x}$, $x \to +\infty$), analog $f_2(x,k)$ fällt exponentiell ab für $x \to -\infty$, also

$f_1(x,k_0) \in L^2(\mathbb{R})$ ist eine Eigenfunktion von H mit EW $\lambda_0 = k_0^2$. Da H symmetrisch ist,

$$\lambda_0 \|f_1(\cdot,k_0)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(-f_1''(x,k_0) + V(x) f_1(x,k_0)\right) \overline{f_1(x,k_0)}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x,k_0) \left(-\overline{f_1''(x,k_0)} + V(x) \overline{f_1(x,k_0)}\right) dx \quad (\text{2x partiell integrieren})$$

$$= \overline{\lambda_0} \|f_1(\cdot,k_0)\|^2 \Rightarrow \lambda_0 = \overline{\lambda_0} \in \mathbb{R}, \text{ also}$$

$$k_0 = i\varkappa_0, \quad \varkappa_0 > 0, \quad \lambda_0 = -\varkappa_0^2 < 0,$$

$f_1(x, i\varkappa_0)$ ist reellwertig.

<u>Satz</u>. $a(k)$ hat in $\operatorname{Im}(k) > 0$ endlich viele einfache Nullstellen $k_l = i\varkappa_l$, $l = 1, \dots, n$,

$$\left.\frac{da(k)}{dk}\right|_{k = i\varkappa_l} = -i c_l \|f_2(\cdot, i\varkappa_l)\|^2 \neq 0,$$

wobei $f_1(x, i\varkappa_l) = c_l f_2(x, i\varkappa_l)$. Funktion $\frac{1}{a(k)}$ ist beschränkt in einer Umgebung von $k=0$ in $\operatorname{Im}(k) \geq 0$.

Beweis. Die Nullstellen können keine Häufungspunkte auf $\mathbb{R}$ besitzen ($|a(k)|\geq 1$), weder in ∞ ($a(k) = 1 + O\left(\frac{1}{|k|}\right)$, $|k| \to \infty$). Also ist $k=0$ der einzige mögliche Häufungspunkt. Angenommen, sind $f_1(x,0)$ und $f_2(x,0)$ linear unabhängig. Dann gilt

$$\lim_{k\to 0} 2ik a(k) = W_1(f_1(x,0), f_2(x,0)) \neq 0 \Rightarrow a(k) \neq 0$$

in einer Umgebung von 0, und alles ist bewiesen.

Wenn aber $f_1(x,0) = c f_2(x,0)$, $c \neq 0$, ist die Situation difiziler. Angenommen, gibt es eine Folge von Nullstellen $k_n = i\varkappa_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Es gibt $A>0$ derart, dass $\forall \varkappa > 0$:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, i\varkappa) &> \tfrac{1}{2} e^{-\varkappa x}, \quad x \geq A \\ f_2(x, i\varkappa) &> \tfrac{1}{2} e^{\varkappa x}, \quad x \leq -A \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \int_A^\infty f_1(x,i\varkappa) f_1(x,0)\,dx &\geq \frac{1}{4\varkappa} e^{-\varkappa A} \\ \int_{-\infty}^{-A} f_2(x,i\varkappa) f_2(x,0)\,dx &\geq \frac{1}{4\varkappa} e^{-\varkappa A} \end{aligned}\right\}$$

Mit Hilfe der partiellen Integration:

$$\varkappa_n^2 \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x,i\varkappa_n) f_1(x,0)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(f_1''(x,i\varkappa_n) - V(x) f_1(x,i\varkappa_n)\right) f_1(x,0)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x,i\varkappa_n)\left(f_1''(x,0) - V(x) f_1(x,0)\right) dx = 0.$$

Also

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x,i\varkappa_n) f_1(x,0)\,dx = 0 \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow 0 = \int_A^\infty f_1(x,i\varkappa_n) f_1(x,0)\,dx + \int_{-A}^{A} f_1(x,i\varkappa_n) f_1(x,0)\,dx +$$

$$+ c\,c_n \int_{-\infty}^{-A} f_2(x,i\varkappa_n) f_2(x,0)\,dx$$

Da $c \cdot c_n = c \dfrac{f_1(x, ix_n)}{f_2(x, ix_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} c\dfrac{f_1(x,0)}{f_2(x,0)} = c^2 > 0$ und

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-A}^{A} f_1(x, ix_n) f_1(x,0)\,dx = \int_{-A}^{A} f_1^2(x,0)\,dx > 0$$

($f_1(x,k)$ stetig in $\operatorname{Im}(k)\geq 0$ gleichmäßig bez. x aus kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}$), kommen wir zum Widerspruch:

$$0 \geq \frac{1+c^2}{4\varkappa} e^{-\varkappa A} + \int_{-A}^{A} f_1^2(x,0)\,dx .$$

Also kann $k=0$ kein Häufungspunkt der Nullstellen sein, es gibt auch in diesem Fall endlich viele Nullstellen.

Um die Formel für die k-Ableitung zu beweisen, merke ($\dot{} = \frac{d}{dk}$):

$$W(f_1(x,k), f_2(x,k)) = 2ika(k) \Longrightarrow \text{ wenn } a(k_0)=0, \text{ dann}$$

$$\Longrightarrow W(\dot f_1(x,k_0), f_2(x,k_0)) + W(f_1(x,k_0), \dot f_2(x,k_0)) = 2ik_0\dot a(k_0)$$

Setze in

$$-y'' + V(x) y = k^2 y \qquad y = f_1(x,k), \quad \times \dot f_2(x,k)$$

$$-\dot y'' + V(x)\dot y = k^2 \dot y + 2ky \qquad y = f_2(x,k), \quad \times f_1(x,k) \quad -$$

$$\leadsto \left(-f_1'' + \cancel{V(x) f_1}\right)\dot f_2 - \left(-\dot f_2'' + \cancel{V(x)\dot f_2}\right) f_1 =$$

$$= \cancel{k^2 f_1 \dot f_2} - \cancel{k^2 \dot f_2 f_1} - 2k f_2 f_1$$

$$\leadsto (f_1'\dot f_2 - f_1\dot f_2')' = 2kf_1f_2, \text{ analog } (f_2'\dot f_1 - f_2\dot f_1')' = 2kf_1f_2$$

$$\Rightarrow W(f_1, \dot f_2)\Big|_{-A}^{x} = 2k\int_{-A}^{x} f_1 f_2\,ds$$

$$W(\dot f_1, f_2)\Big|_{x}^{A} = -2k\int_{x}^{A} f_1 f_2\,ds$$

$$\Rightarrow \quad W(\dot f_1, f_2) + W(f_1, \dot f_2) \quad - W(\dot f_1, f_2)\big|_{-A} - W(\dot f_1, f_2)\big|_{A}$$
$$= 2k \int_{-A}^{A} f_1 f_2 \, ds$$

Man kann zeigen:

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to\infty} e^{-ikx}\left(\dot f_1(x,k) - ix\, f_1(x,k)\right) = 0 \\ \lim_{x\to-\infty} e^{ikx}\left(\dot f_2(x,k) + ix f_2(x,k)\right) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(W(f_1, f_2) = 0\right)$$

$$\Rightarrow \text{Randterme} \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \quad W(\dot f_1, f_2) + W(f_1, \dot f_2) = 2k_0 \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x,k_0) f_2(x,k_0)\,dx$$

Also

$$\dot a(k_0) = -i \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x,k_0) f_2(x,k_0)\,dx = -ic_0 \, \| f_2(\cdot, k_0)\|^2 \quad (2)$$

EW von H sind einfach: $f_1(x, i\varkappa_l) \searrow_{x\to+\infty} 0$,
$W(f_1, f) = \text{konst} \Rightarrow f \nearrow_{x\to+\infty} \infty$ für jede andere Lösung von $Hf = k^2 f$.

Wir zeigen jetzt, daß die Eigenfunktionen des kontinuierlichen Spektrums $(f_{1,2}(x,k))$ und des diskreten Spektrums enthalten die ganze Information über das Potential $V(x)$.

Für $\lambda \in \mathbb{C}\setminus[0,\infty)$ definieren wir $k = \sqrt{\lambda}$ als den Zweig mit $\operatorname{Im} k > 0$ und setzen

$$R_\lambda(x,y) := \begin{cases} -\dfrac{f_1(x,k)f_2(y,k)}{2ik\,a(k)}, & x \geq y \\ -\dfrac{f_1(y,k)f_2(x,k)}{2ik\,a(k)}, & x \leq y \end{cases} = R_\lambda(y,x)$$

Für feste x,y ist $R_\lambda(x,y)$ meromorph in $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$ mit einfachen Nullstellen $\lambda_\ell = -\varkappa_\ell^2$, $\ell = 1,\dots,n$.
Für festes $\lambda \neq \lambda_\ell$ ist $R_\lambda(x,y)$ stetig bzg. x,y, mit

$$|R_\lambda(x,y)| \leq C\,\frac{e^{-\operatorname{Im}(k)|x-y|}}{|k|} \qquad (*)$$

Der Operator R_λ in $L^2(\mathbb{R})$ definiert als

$$(R_\lambda\,\psi)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} R_\lambda(x,y)\,\psi(y)\,dy$$

ist beschränkt, da

$$|k|^2\,\|R_\lambda\psi\|^2 \leq C^2 \int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\operatorname{Im}(k)|x-y|}\,|\psi(y)|^2\,dy\Big)^2 dx$$

$$= C^2 \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\operatorname{Im}(k)(|z_1|+|z_2|)} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x+z_1)\,\psi(x+z_2)|\,dx\,dz_1\,dz_2$$

$$\leq 4C^2\,\frac{\|\psi\|^2}{(\operatorname{Im}(k))^2}.$$

Wir zeigen: $R_\lambda = (H-\lambda I)^{-1}$ für $\lambda \in \mathbb{C}\setminus([0,\infty)\cup\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\})$, und H ist s.a. In der Tat, es sei $\psi \in L^2$. Dann $\varphi := R_\lambda\psi \in L^2$ ist zweimal differenzierbar f.ü. auf $\mathbb{R}$ und es gilt

$$-\varphi'' + V(x)\varphi = \lambda\varphi + \psi(x).$$

Diese Behauptung ist nicht anderes als die Methode der Variation von Konstanten

$$\varphi = A f_1(x,k) + B f_2(x,k)$$

$$\varphi' = A f_1'(x,k) + B f_2'(x,k) \Leftarrow \quad A' f_1 + B' f_2 = 0$$

$$\varphi'' = A f_1'' + B f_2'' + A' f_1' + B' f_2'$$

$$-\varphi'' + V\varphi = \lambda\varphi + \psi \Leftrightarrow$$

$$-A'f_1' - B'f_2' = \psi$$

Also

$$\begin{cases} A' f_1 + B' f_2 = 0 \\ A' f_1' + B' f_2' = -\psi \end{cases} \Leftrightarrow \quad A' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & f_2 \\ -\psi & f_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix}} = \frac{f_2 \psi}{-W(f_1,f_2)}$$

$$B' = \frac{\begin{vmatrix} f_1 & 0 \\ f_1' & -\psi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix}} = + \frac{f_1 \psi}{W(f_1,f_2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A(x) = -\dfrac{1}{2ik\,a(k)} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f_2(y,k)\psi(y)\,dy \\ B(x) = -\dfrac{1}{2ik\,a(k)} \displaystyle\int_{x}^{\infty} f_1(y,k)\psi(y)\,dy \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi = -\frac{f_1(x,k)}{2ik\,a(k)} \int_{-\infty}^{x} f_2(y,k)\psi(y)\,dy - \frac{f_2(x,k)}{2ik\,a(k)} \int_{x}^{\infty} f_1(y,k)\psi(y)\,dy$$

Also gilt es

$$(H-\lambda I)\, R_\lambda \psi = \psi \Leftrightarrow (H-\lambda I)\, R_\lambda = I.$$

Insbesondere Bild $(H-\lambda I) = L^2(\mathbb{R})$, sodass H s.a. ist. $\square$

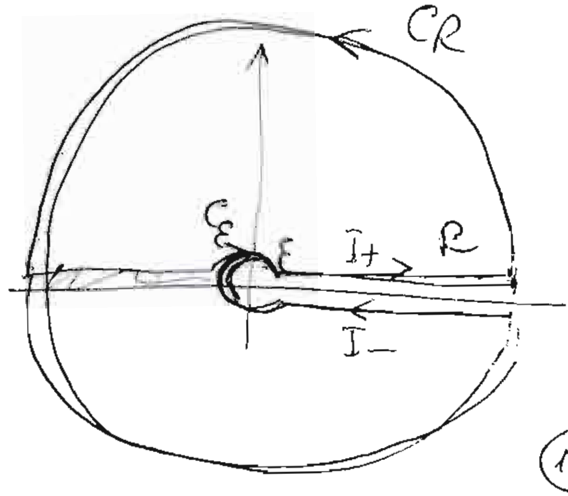
$\boxed{\text{VL 29, 15.02.2011}}$

Als Folgerung beweisen wir die Entwicklungsformel bez. Eigenfunktionen von H: $\forall \psi \in C_0^2(\mathbb{R})$

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk \left(u_1(x,k) \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u_1(y,k)}\, \psi(y)\,dy + u_2(x,k) \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u_2(y,k)}\, \psi(y)\,dy \right) + \sum_{l=1}^{n} \frac{\psi_l(x)}{\|\psi_l\|^2} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_l(y)\, \psi(y)\,dy ,$$

wobei $u_j(x,k) = \dfrac{f_j(x,k)}{a(k)}$ $(j=1,2)$, $\psi_\ell(x) = f_1(x, i\varkappa_\ell)$ $(\ell = 1,\dots,n)$.

Um das zu zeigen, setze
$$\varphi(x,\lambda) = (R_\lambda \psi)(x), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus [0,\infty).$$
Für festes x ist $\varphi(x,\lambda)$ meromorph in $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$ mit einfachen Polen bei $\lambda = \lambda_\ell$, $\ell = 1,\dots,n$, mit Residuen
$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_\ell} \varphi(x,\lambda) = \frac{ic_\ell}{a'(i\varkappa_\ell)} f_2(x, i\varkappa_\ell) \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y, i\varkappa_\ell)\,\psi(y)\,dy$$
$$= -\frac{(\psi_\ell, \psi)}{\|\psi_\ell\|^2}\,\psi_\ell(x)$$
Das Verhalten von φ bei $\lambda \to 0$ und $\lambda \to \infty$:
$$HR_\lambda = R_\lambda H = I + \lambda R_\lambda \Rightarrow$$
$$H\varphi = -\varphi'' + V\varphi = \lambda\varphi + \psi \Rightarrow \varphi = -\frac{1}{\lambda}\psi + \frac{1}{\lambda} R_\lambda \tilde{\varphi},$$
mit $\tilde{\varphi} = -\psi'' + V\psi \in C_0(\mathbb{R}) \underset{(*)}{\Rightarrow} |(R_\lambda \tilde{\varphi})(x)| \le \dfrac{C}{|\sqrt{\lambda}|}$, $|\lambda| \to \infty$
$$\to \quad \varphi(x,\lambda) = -\frac{1}{\lambda}\psi(x) + O(|\lambda|^{-3/2}), \quad |\lambda| \to \infty.$$
Man hat auch
$$\varphi(x,\lambda) = O(|\lambda|^{-1/2}), \quad \lambda \to 0.$$
Jetzt betrachten wir
$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi(x,\lambda)\,d\lambda,$$
C:



Dann, einerseits,
$$I = \sum_{\ell=1}^{n} \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_\ell} \varphi(x,\lambda) =$$
$$= -\sum_{\ell=1}^{n} \frac{(\psi_\ell, \psi)}{\|\psi_\ell\|^2}\,\psi_\ell(x)$$

andererseits

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \varphi(x,\lambda)\,d\lambda = -\psi(x)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} \varphi(x,\lambda)\,d\lambda = 0.$$

Also

$$\psi(x) - \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\|\psi_l\|^2} (\psi_l, \psi)\, \psi_l(x) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{I_+} - \int_{I_-} \right) \varphi(x,\lambda)\,d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \left(R_{\lambda+i0}(x,y) - R_{\lambda-i0}(x,y) \right) \psi(y)\,dy$$

$\left(\sqrt{\lambda+i0} = k \geq 0, \quad \sqrt{\lambda-i0} = -k \leq 0\right)$. Für $x \geq y$ haben wir

$$R_{\lambda+i0}(x,y) - R_{\lambda-i0}(x,y) = -\frac{1}{2ik} \left(\frac{f_1(x,k) f_2(y,k)}{a(k)} + \frac{f_1(x,-k) f_2(y,-k)}{a(-k)} \right)$$

Dabei

$$\left.\begin{aligned} f_1(x,-k) &= \frac{1}{a(+k)} f_2(x,+k) - \frac{b(+k)}{a(+k)} f_1(x,+k) \\ f_2(y,+k) &= \frac{1}{a(k)} f_1(y,-k) + \frac{b(+k)}{a(k)} f_2(y,-k) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{\lambda+i0}(x,y) - R_{\lambda-i0}(x,y) = \frac{i}{2k|a(k)|^2} \left(f_1(x,k)\overline{f_1(y,k)} + f_2(x,k)\overline{f_2(y,k)} \right)$$

$$= \frac{i}{2k} \left(u_1(x,k)\overline{u_1(y,k)} + u_2(x,k)\overline{u_2(y,k)} \right) \quad \blacksquare$$

$f_2(x,k) = a(k) f_1(x,-k) + b(k) f_1(x,+k) \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad f_1(x,-k) = \dfrac{f_2(x,k)}{a(k)} - \dfrac{b(k)}{a(k)} f_1(x,k)$

$f_1(y,-k) = a(-k) f_2(y,k) - b(+k) f_2(y,-k)$

$\Rightarrow f_2(y,k) = \dfrac{1}{a(-k)} f_1(y,-k) + \dfrac{b(k)}{a(-k)} f_2(y,-k)$

Eine andere Form des Entwicklungssatzes:

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk \Big(f_1(x,k)\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f_1(y,k)}\,\psi(y)\,dy + \frac{b(k)}{a(k)} f_1(x,k)\int_{-\infty}^{\infty} f_1(y,k)\psi(y)\,dy \Big)$$

$$+ \sum_{l=1}^{n} \frac{\psi_l(x)}{\|\psi_l(x)\|^2}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_l(y)\psi(y)\,dy$$

In der Tat:

$$\int_0^\infty dk \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1(x,k) f_2(y,k)}{a(k)}\psi(y)\,dy + \int_0^\infty dk\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1(x,-k) f_2(y,-k)}{a(-k)}\psi(y)\,dy$$

$$= \int_0^\infty dk\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x,k)\Big[f_1(y,-k) + \frac{b(k)}{a(k)} f_1(y,k)\Big]\psi(y)\,dy$$

$$+ \int_0^\infty dk\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x,-k)\Big[f_1(y,k) + \frac{b(-k)}{a(-k)} f_1(y,-k)\Big]\psi(y)\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dk\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x,k)\Big[f_1(y,-k) + \frac{b(k)}{a(k)} f_1(y,k)\Big]\psi(y)\,dy$$

Symbolisch (oder im Distributionssinne) schreibt man das als <u>Orthogonalitätsrelation</u>

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x,k)\overline{f_1(y,k)}\,dk + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x,k) f_1(y,k)\frac{b(k)}{a(k)}\,dk$$

$$+ \sum_{l=1}^{n}\frac{\psi_l(x)\psi_l(y)}{\|\psi_l\|^2} = \delta(x-y)$$

Unsere nächste wichtige Behauptung:

Satz. Es gibt eine nach x,t differenzierbare Funktion $K(x,t)$ $(t \geq x)$ derart, daß

$$f_1(x,k) = e^{ikx} + \int_x^\infty K(x,t)\, e^{ikt}\, dt$$

und

$$K(x,x) = \frac{1}{2}\int_x^\infty V(t)\,dt$$

und

$$|K(x,t)| \leq \frac{1}{2}\,\sigma\!\left(\frac{x+t}{2}\right) e^{\sigma_1(x) - \sigma_1\left(\frac{x+t}{2}\right)}$$

Man sieht, daß der Operator

$$(\mathcal{K}\varphi)(x) = \varphi(x) + \int_x^\infty K(x,t)\,\varphi(t)\,dt$$

transformiert $H_0 = -\frac{d^2}{dx^2}$ in $H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$ auf den Eigenräumen des kontinuierlichen Spektrums:

$$H_0\varphi(x) = k^2\varphi(x) \rightarrow$$

$$H(\mathcal{K}\varphi)(x) = k^2\mathcal{K}\varphi(x) \Leftrightarrow H\mathcal{K} = \mathcal{K}H_0$$

Zeigen wir zunächst, wie diese Darstellung zur Lösung der inversen Streuaufgabe führt.

Für den Operator $\mathcal{K}^{-1}$ haben wir eine ähnliche Darstellung:

$$(\mathcal{K}^{-1}\varphi)(x) = \varphi(x) + \int_x^\infty H(x,t)\,\varphi(t)\,dt,$$

also

$$e^{ikx} = f_1(x,k) + \int_x^\infty H(x,t)\, f_1(t,k)\,dt$$

Substitution davon in die Orthogonalitätsrelation gibt uns für $(y>x)$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x,k)e^{-iky}\,dk+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x,k)\,e^{iky}\frac{b(k)}{a(k)}\,dk$$

$$+\sum_{l=1}^{n}\frac{f_1(x,i\varkappa_l)}{\|f_1(\cdot,i\varkappa_l)\|^2}\,e^{-\varkappa_l y}=0 \qquad (y>x)$$

Hierein wird die Darstellung

$$f_1(x,k)=e^{ikx}+\int_x^{\infty}K(x,t)\,e^{ikt}\,dt$$

eingesetzt:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-y)}\,dk+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_x^{\infty}K(x,t)\,e^{ik(t-y)}\,dt\right)dk$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x+y)}\frac{b(k)}{a(k)}\,dk+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_x^{\infty}K(x,t)\,e^{ik(t+y)}\,dt\right)\frac{b(k)}{a(k)}\,dk$$

$$+\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{m_l}\,e^{-\varkappa_l(x+y)}+\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{m_l}\int_x^{\infty}K(x,t)\,e^{-i\varkappa_l(x+t)}\,dt=0$$

$$=\overset{=0}{\delta(x-y)}+K(x,y)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik(x+y)}\frac{b(k)}{a(k)}\,dk$$

$$+\int_x^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ik(t+y)}\frac{b(k)}{a(k)}\,dk\right)K(x,t)\,dt$$

$$+\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{m_l}\,e^{-\varkappa_l(x+y)}+\int_x^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{m_l}\,e^{-\varkappa_l(x+t)}\,dt\right)=0$$

Setzt man

$$F(x):=\sum_{l=1}^{n}\frac{1}{m_l}\,e^{-\varkappa_l x}+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{b(k)}{a(k)}\,e^{ikx}\,dx,$$ so gilt

$$\boxed{F(x+y)+K(x,y)+\int_x^{\infty}K(x,t)\,F(t+y)\,dt=0} \qquad y>x.$$

Diese Gleichung heißt Gelfand–Levitan–Marchenko-Gleichung für $+\infty$.

Startet man mit

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x,k)\overline{f_2(y,k)}\,dk = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{b(-k)}{a(k)} f_2(x,k) f_2(y,k)\,dk$$

$$+\sum_{j=1}^{\ell}\frac{1}{m_\ell^-} f_2(x,i\varkappa_j) f_2(y,i\varkappa_j) = \delta(x-y), \quad m_\ell^- = \| f_2(y,i\varkappa_\ell)\|_{L_2},$$

so bekommt man

$$\boxed{F^-(x+y) + K^-(x,y) + \int_{-\infty}^{x} K^-(x,t)\, F^-(t+y)\,dt = 0} \quad (x>y)$$

mit

$$F^-(x) := \sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{m_\ell^-} e^{\varkappa_\ell x} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{b(-k)}{a(k)} e^{-ikx}\,dx$$

– die GLM-Gleichung für $-\infty$.

<u>Satz</u>. Genügen die Funktionen $a(k)$ und $b(k)$ den Bedingungen:

- $a(-k) = \overline{a(k)}$, $b(-k) = \overline{b(k)}$, $|a(k)|^2 = 1 + |b(k)|^2$, $k\in\mathbb{R}$,
- $a(k)$ analytisch in $\operatorname{Im}(k)>0$ und stetig in $\operatorname{Im}(k)\geq 0$, hat dort endlich viele Nullstellen und $a(k) = 1 + O\left(\frac{1}{|k|}\right)$, $|k|\to\infty$,

so haben beide GLM-Gleichungen eindeutige Lösungen und

$$V(x) = -2\frac{d}{dx}K(x,x) = 2\frac{d}{dx}K^-(x,x)$$

; $m_\ell m_\ell^- = \|f_1(\cdot,i\varkappa_\ell)\|^2\,\|f_2(\cdot,i\varkappa_\ell)\|^2 = c_\ell^2\,\|f_2(i\varkappa_\ell)\|^4 = -\left(\dot a(i\varkappa_\ell)\right)^2$

Bemerkung.

$$a(k) = \prod_{\ell=1}^{n} \frac{k - i\varkappa_\ell}{k + i\varkappa_\ell} \exp\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log(1 + |b(k')|^2)}{k' - k} dk' \right)$$

Also reicht es aus, $b(k)$ und $i\varkappa_\ell$ vorzugeben! Oder $r(k) = \frac{b(k)}{a(k)}$, da

$$|r(k)|^2 = 1 - \frac{1}{1 + |b(k)|^2} \Rightarrow 1 + |b(k)|^2 = \frac{1}{1 - |r(k)|^2},$$

sodass

$$a(k) = \prod_{\ell=1}^{n} \frac{k - i\varkappa_\ell}{k + i\varkappa_\ell} \exp\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log(1 - |r(k')|^2)}{k - k'} dk' \right)$$

GLM Gleichung

$\boxed{\text{VL 30, 17.02.2011}}$

$$F(x+y) + K(x,y) + \int_x^\infty K(x,t)\, F(y+t)\, dt \,, \quad y \geq x$$

$$F(x) = \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{m_l} e^{-\varkappa_l x} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} r(k)\, e^{+ikx}\, dk$$

Interessante Klasse der Potentiale – reflektionsfreie:

$$r(k) = 0$$

Beispiel 1. $n=1$, $r(k)=0$, $F(x) = \gamma e^{-\varkappa x}$

$$K(x,y) + \int_x^\infty K(x,t)\, \gamma e^{-\varkappa(t+y)}\, dt = -\gamma e^{-\varkappa(x+y)}$$

Setze

$$K(x,y) = K(x)\, e^{-\varkappa y},$$

dann

$$K(x) + \gamma K(x) \int_x^\infty e^{-2\varkappa t}\, dt = -\gamma e^{-\varkappa x}$$

$$K(x) = -\frac{\gamma e^{-\varkappa x}}{1 + \frac{\gamma}{2\varkappa} e^{-2\varkappa x}}$$

$$\Rightarrow \quad K(x,x) = -\frac{\gamma e^{-2\varkappa x}}{1 + \frac{\gamma}{2\varkappa} e^{-2\varkappa x}}$$

$$\Rightarrow \quad V(x) = 2 \frac{d}{dx} \frac{\gamma e^{-2\varkappa x}}{1 + \frac{\gamma}{2\varkappa} e^{-2\varkappa x}} = 2\, \frac{\gamma(-2\varkappa)\, e^{-2\varkappa x}\left(1 + \cancel{\frac{\gamma}{2\varkappa} e^{-2\varkappa x}}\right) - \gamma e^{-2\varkappa x}\left(\cancel{-\gamma e^{-2\varkappa x}}\right)}{\left(1 + \frac{\gamma}{2\varkappa} e^{-2\varkappa x}\right)^2}$$

$$= -\frac{4\gamma\varkappa\, e^{-2\varkappa x}}{\left(1 + \frac{\gamma}{2\varkappa} e^{-2\varkappa x}\right)^2} = -\frac{8\varkappa^2 \cdot \frac{\gamma}{2\varkappa} e^{-2\varkappa x}}{\left(1 + \frac{\gamma}{2\varkappa} e^{-2\varkappa x}\right)^2}$$

$$= -\frac{2\varkappa^2}{\cosh^2 \varkappa(x - x_0)} \,, \qquad x_0 = \frac{1}{2\varkappa} \log \frac{\gamma}{2\varkappa}$$

Beispiel 2 $\quad F(x) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j e^{-\varkappa_j x}$ – zerfallender Kern

Suchen nach $K(x,y)$ in der Form

$$K(x,y) = \sum_{j=1}^{n} K_j(x) e^{-\varkappa_j y}$$

Einsetzen:

$$\sum_{j=1}^{n} K_j(x) e^{-\varkappa_j y} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \int_x^\infty K_l(x) e^{-\varkappa_l t} \gamma_j e^{-\varkappa_j (t+y)} dt$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} \gamma_j e^{-\varkappa_j (x+y)}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(K_j(x) + \sum_{l=1}^{n} \frac{K_l(x)\gamma_j e^{-(\varkappa_j+\varkappa_l)x}}{\varkappa_j+\varkappa_l} \right) e^{-\varkappa_j y} = -\sum_{j=1}^{n} \gamma_j e^{-\varkappa_j (x+y)}$$

Fordern

$$K_j(x) + \sum_{l=1}^{n} \frac{\gamma_j e^{-(\varkappa_j+\varkappa_l)x}}{\varkappa_j+\varkappa_l} K_l(x) = -\gamma_j e^{-\varkappa_j x}, \quad j = 1, \dots, n$$

Äquivalent:

$$A(x) K(x) = b(x), \quad A = I + \left(\frac{\gamma_j e^{-(\varkappa_j+\varkappa_l)x}}{\varkappa_j+\varkappa_l} \right)_{j,l=1}^{n}$$

$$b = \begin{pmatrix} -\gamma_1 e^{-\varkappa_1 x} \\ \vdots \\ -\gamma_n e^{-\varkappa_n x} \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$K_j(x) = (A^{-1} b)_j = \frac{\det A^{(j)}}{\det A},$$

wobei $A^{(j)}$ die Matrix A ist, in der j-te Spalte durch b ersetzt ist $\Leftrightarrow$ j-te Spalte nach x abgeleitet und mit $e^{\varkappa_j x}$ multipliziert. Also

$$K(x,x) = \sum_{j=1}^{n} K_j(x) e^{-\varkappa_j x} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\det(A^{(j)}) e^{-\varkappa_j x}}{\det A}$$

$$= \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^{n} \det(A \text{ mit der nach } x \text{ abgeleiteten } j\text{-ten Spalte})$$

$$= \frac{1}{\det A} \cdot \frac{d}{dx} \det A = \frac{d}{dx} \log \det A(x).$$

Also

$$V(x) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \log \det A(x)$$

Beispiel: $n=2$

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\gamma_1}{2\varkappa_1} e^{-2\varkappa_1 x} & \frac{\gamma_1}{\varkappa_1+\varkappa_2} e^{-(\varkappa_1+\varkappa_2)x} \\ \frac{\gamma_2}{\varkappa_1+\varkappa_2} e^{-(\varkappa_1+\varkappa_2)x} & 1 + \frac{\gamma_2}{2\varkappa_2} e^{-2\varkappa_2 x} \end{pmatrix}$$

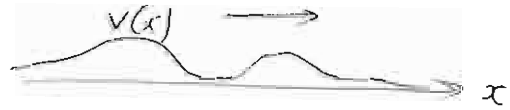
$\det A(x) =$

$$= 1 + \frac{\gamma_1}{2\varkappa_1} e^{-2\varkappa_1 x} + \frac{\gamma_2}{2\varkappa_2} e^{-2\varkappa_2 x} + \frac{\gamma_1\gamma_2}{4\varkappa_1\varkappa_2}\left(\frac{\varkappa_1-\varkappa_2}{\varkappa_1+\varkappa_2}\right)^2 e^{-2(\varkappa_1+\varkappa_2)x}$$

u.s.w.

(16) KdV-Gleichung und inverse Streumethode

$$V_t = 6 V V_x - V_{xxx}$$



Dispersion + Nichtlinearität

Lax-Darstellung

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x,t)$$

Behauptung: Evolviert $V(x,t)$ mit der Zeit t nach der KdV, so ist die Evolution der Streudaten des $H(t)$ einfach. ↯

Zum Beweis:

$$\dot{H} = [A, H] \quad \text{mit } A = -4\frac{d^3}{dx^3} + 3\left(V\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}V\right)$$

Hierbei nicht-trivial:

$$[A, H]$$

ist ein Multiplikationsoperator.