Universität Bonn,
Wintersemester 2010/11
Boris Springborn
Klaus Dankwart

14.12.2010

Aufgabenblatt 9
zur Vorlesung Geometrie 1

Aufgabe 1. (Torsionsfreie Zusammenhänge)
Zeigen Sie, dass ein Zusammenhang ∇ auf einer Mannigfaltigkeit M genau dann torsionsfrei ist, wenn bzgl. jeder Karte die Christoffelsymbole Γ_{ij}^k symmetrisch in i, j sind, d.h. $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

5 Punkte

Aufgabe 2. (Christoffelsymbole in lokalen Koordinaten)
Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und sei ∇ der Levi-Civita-Zusammenhang bzgl. g. In einer Karte (U, u) sei $g_{ij} := g(\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j})$ und die Matrix $(g^{ij})_{ij}$ sei die Inverse der Matrix $(g_{ij})_{ij}$. Seien außerdem Γ_{ij}^k die Christoffelsymbole bzgl. ∇ in der Karte.
Zeigen Sie

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l g^{kl} \left(\frac{\partial}{\partial u_i} g_{jl} + \frac{\partial}{\partial u_j} g_{li} - \frac{\partial}{\partial u_l} g_{ij} \right)$$

5 Punkte

Aufgabe 3. (Konforme Änderungen von Riemannsche Metriken)
Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei $f \in C^\infty(M)$. Zeigen Sie, dass es ein Vektorfeld $\operatorname{grad}_g(f) \in \Gamma(TM)$ gibt, so dass

$$g(\operatorname{grad}_g(f), X) = X(f), \forall X \in \Gamma(TM)$$

Sei $\tilde{g} := \exp(2f) \cdot g$ eine neue Metrik und sei ∇ bzw. $\tilde{\nabla}$ der Levi-Civita-Zusammenhang bzgl. g bzw. $\tilde{g}$. Zeigen Sie

$$\tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y = (X \cdot f)Y + (Y \cdot f)X - g(X, Y) \operatorname{grad}_g f$$

Tipp: Benutzen Sie die Formel aus der Vorlesung welche $g(\nabla_X Y, Z),\ X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ nur durch g und die Lieklammer ausdrückt. Benutzen Sie außerdem, dass $exp(2f) \cdot g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z)$.

5 Punkte

Aufgabe 4. (Hyperbolische Ebene)
Sei $\mathbb{H}^2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\},\ g_{(x,y)}(v,w) := \frac{1}{y^2} < v, w >$ die hyperbolische Ebene als Riemannsche Mannigfaltigkeit wie in Blatt 8, Aufgabe 4.

1. Berechnen Sie die Christoffelsymbole der Standardkarte sowohl mit den Formeln aus Aufgabe 2 als auch aus Aufgabe 3.

2. Eine Diffeomorphismus $f : (M, g^M) \to (N, g^N)$ zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten ist eine *Isometrie* wenn

$$g_p^M(v,w) = g_{f(p)}^N(df(v), df(w)),\ \forall p \in M,\ v, w \in T_pM$$

Wir definieren die folgenden Abbildungen

$$\begin{aligned} T_a &: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+a \\ y \end{pmatrix} \\ S_a &: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix} \\ I &: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $T_a, S_a, I, a \in \mathbb{R}$ Isometrien sind.

5 Punkte

Viel Spass!

Abgabe ist am 21.12. in der Vorlesung.
Die Aufgabenblätter erhält man auch auf der Homepage:
http://www.math.uni-bonn.de/people/klaus