

Aufgabenblatt 7 zur Vorlesung Geometrie 1

Aufgabe 1. (Flüsse von Vektorfeldern)

Seien

$$X := \frac{\partial}{\partial x}, \quad Y := \frac{\partial}{\partial y}, \quad R := -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$$

Vektorfelder in \mathbb{R}^2 .

Berechnen Sie die Flüsse von X, Y, R und skizzieren Sie die Integralkurven. Seien außerdem $u, v, w \in \mathbb{R}, w \neq 0$ und $V := uX + vY + wR$. Berechnen Sie den Fluss von V und skizzieren Sie die Integralkurve.

5 Punkte

Aufgabe 2. (Liesche Ableitung)

Seien X, Y Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit. Man definiert die *Liesche Ableitung* von Y als das Vektorfeld

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$$

Finden Sie zwei Vektorfelder Y_1, Y_2 auf \mathbb{R}^2 , die entlang der x-Achse übereinstimmen, für die aber die Liesche Ableitung $\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x}} Y_1 \neq \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial x}} Y_2$ nicht übereinstimmt.

Bemerkung: Dies zeigt, dass man Liesche Ableitungen entlang von Kurven nicht sinnvoll definieren kann.

5 Punkte

Aufgabe 3. (Lieklammer und Kommutator von linearen Abbildungen)

Seien $A, B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineare Abbildungen. Wir definieren den Kommutator:

$$[A, B] := AB - BA$$

- Zeigen Sie folgende Gleichung:

$$[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = 0$$

- Sei

$$X_A(p) := Ap$$

das aus A entstandene Vektorfeld auf \mathbb{R}^n . Zeigen Sie

$$[X_A, X_B] = -X_{[A, B]}$$

5 Punkte

Aufgabe 4. (Lieklammer und paralleles Einparken)

Der momentane Zustand eines Fahrzeugs wird durch die Koordinate (x, y) für die Position, θ für die Fahrtrichtung und φ für den Lenkwinkel beschrieben. Betrachten Sie die Vektorfelder

$$\text{Lenk} = \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$\text{Fahr} = \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial x} + \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial y} + \tan(\varphi) \frac{\partial}{\partial \theta}$$

Berechnen Sie die Vektorfelder

$$\text{Dreh} = [\text{Lenk}, \text{Fahr}]$$

$$\text{Drift} = [\text{Fahr}, \text{Dreh}]$$

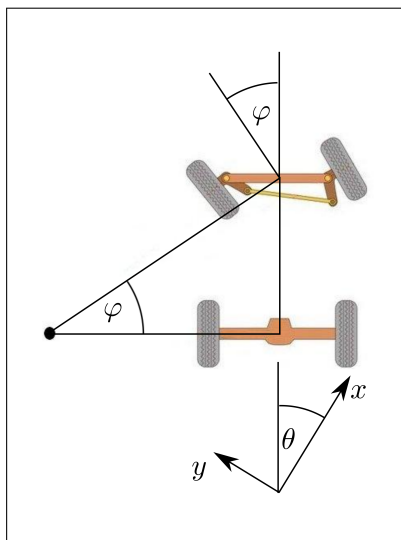


Abbildung 1: siehe <http://de.wikipedia.org/wiki/Lenkung>

5 Punkte

Viel Spass!

Abgabe ist am 7.12. in der Vorlesung.

Die Aufgabenblätter erhält man auch auf der Homepage:

<http://www.math.uni-bonn.de/people/klaus>