Universität Bonn,
Wintersemester 2010/11
Boris Springborn
Klaus Dankwart

23.11.2010

Aufgabenblatt 6
zur Vorlesung Geometrie 1

Aufgabe 1. (Lieklammer I)
Sei

$$\begin{aligned} R_1(\theta) &:= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; R_2(\theta) := \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ R_3(\theta) &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Vektorfelder

$$X(p) := \frac{d}{d\theta} R_1 \Big|_{\theta=0} p, \; Y(p) := \frac{d}{d\theta} R_2 \Big|_{\theta=0} p, \; Z(p) := \frac{d}{d\theta} R_3 \Big|_{\theta=0} p$$

in $\mathbb{R}^3$ und zeigen Sie $[X, Y] = Z$.

5 Punkte

Aufgabe 2. (Lieklammer II)
Sei

$$X(t) = f(t) \frac{\partial}{\partial t}, \; f > 0$$

ein nichtverschwindendes Vektorfeld auf der reellen Geraden.
Bestimmen Sie alle Vektorfelder $Y(t) = g(t) \frac{\partial}{\partial t}$, so dass die Lieklammer $[X, Y]$ verschwindet.

5 Punkte

Aufgabe 3. (Wechsel der Basisfelder in verschiedenen Koordinaten)
Sei $U := \mathbb{R}^2 - \{0\}$ und sei $(x, y) : U \to \mathbb{R}^2$ die Standardkarte, d.h. die Identität.
Sei (ρ, θ) eine andere Karte mit

$$x = exp(\rho) \cos(\theta), \; y = exp(\rho) \sin(\theta)$$

Drücken sie die Gauss-Basis $\frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial \theta}$ bzgl. der Karte (ρ, θ) in der Gauss-Basis $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ bzgl. der Standardkarte aus.

5 Punkte

Aufgabe 4. (Lokale Funktionen)
Machen Sie sich klar (ohne Beweis), dass die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} exp(-x^{-1}) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

unendlich oft differenzierbar ist.
Folgern Sie, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}, \epsilon > 0$, eine unendlich oft differenzierbare Funktion $g_\epsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, g_\epsilon \geq 0$ gibt, so dass

$$g_\epsilon(0) = 1,\ g_\epsilon(x) = 0\ \forall x : ||x|| > \epsilon$$

Folgern Sie weiterhin, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}, \epsilon', \epsilon > 0$, eine unendlich oft differenzierbare Funktion $g_{\epsilon,\epsilon'} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, g_{\epsilon,\epsilon'} \geq 0$ gibt, so dass

$$g_{\epsilon,\epsilon'}(x) = 1\ \forall x : ||x|| < \epsilon,\ g_{\epsilon,\epsilon'}(x) = 0\ \forall x : ||x|| > \epsilon + \epsilon'$$

Zeigen Sie, dass für jeden Punkt p auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M und jede Umgebung U von p eine kleinere Umgebung $U' \subset U$ von p zusammen mit einer differenzierbaren Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ existiert, so dass $f(x) = 1\ \forall x \in U', f(x) = 0\ \forall x \in M - U$.

5 Punkte

Viel Spass!

Abgabe ist am 30.11. in der Vorlesung.
Die Aufgabenblätter erhält man auch auf der Homepage:
http://www.math.uni-bonn.de/people/klaus