Universität Bonn,
Wintersemester 2010/11
Boris Springborn
Klaus Dankwart

9.11.2010

Aufgabenblatt 4
zur Vorlesung Geometrie 1

Aufgabe 1. (Lamberts flächentreue Zylinderprojektion)
Eine lokale Parametrisierung $f : U \to M$ einer Fläche im $\mathbb{R}^3$ heißt *flächentreu* genau dann wenn für jede offene Menge $V \subset U$ der Flächeninhalt von V gleich dem Flächeninhalt von $f(V)$ ist.
Sei

$$f : (-1,1) \times (0, 2\pi) \to S^2, (v, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{1-z^2}\cos(\varphi) \\ \sqrt{1-z^2}\sin(\varphi) \\ z \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass f flächentreu ist.

5 Punkte

Aufgabe 2. (Normalkrümmung und zweite Fundamentalform)
Sei M eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ und bezeichne α_p die zweite Fundamentalform im Punkt $p \in M$.
Sei I ein offenes Intervall und sei $c : I \to M, ||c'(t)|| = 1$ eine differenzierbare, nach Bogenlänge parametrisierte Kurve.

1. Zeigen Sie die folgende Gleichung für die Normalkrümmung von c:

$$\kappa_n(t) = \alpha_{c(t)}(c'(t), c'(t))$$

2. Nehmen Sie an, dass die Gausskrümmung in p echt negativ ist. Zeigen Sie, dass es genau zwei Richtungen $v_1, v_2 \in T_pM$ gibt, so dass die Ableitung jeder Asymptotenlinie in p in einer dieser Richtungen liegt.
Zeigen Sie, dass die Eigenrichtungen des Weingartenopertors die Winkelhalbierenden von v_1, v_2 sind.

3. Seien w_1, w_2 linear unabhängige Einheitsvektoren in Hauptkrümmungsrichtung an p bzgl. der Hauptkrümmungen κ_1, κ_2.
Sei $v := \sin(\varphi)w_1 + \cos(\varphi)w_2$ ein anderer Einheitvektor in T_pM und sei c eine Kurve, sodass $c(0) = p, c'(0) = v$. Zeigen Sie folgende Gleichung für die Normalenkrümmung von c in p.

$$\kappa_n(c(0)) = \sin(\varphi)^2\kappa_1 + \cos(\varphi)^2\kappa_2$$

5 Punkte

Aufgabe 3. (Traktrix und Pseudosphäre)

1. Wir möchten eine stetige Kurve $c : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^2, c = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ konstruieren die auf $\mathbb{R}_{>0}$ differenzierbar ist und folgende Bedingungen erfüllt.

   - $c(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, ||c'(t)|| = 1 \forall t > 0$
   - Der Vertikalanteil von $c + c'$ ist 0, d.h. $c + c'$ liegt auf der x-Achse.

   Folgern Sie:

   $$b(t) = exp(-t)$$

   Folgern Sie, dass a die folgende Gleichung erfüllt

   $$(a(t)')^2 = 1 - exp(-2t), a' > 0$$

   Zeigen sie, dass

   $$a(t) = t - \sqrt{1 - exp(-2t)} + \log\left(1 + \sqrt{1 - exp(-2t)}\right)$$

   für alle $t > 0$ die Differentialgleichung erfüllt.

2. Sei c die Kurve aus dem ersten Aufgabenteil und sei M die aus c entstandene Rotationsfläche. Benutzen Sie die Lösungen aus Aufgabenblatt 3 und berechnen Sie die Gausskrümmung von M in jedem Punkt.

5 Punkte

Viel Spass!

Abgabe ist am 16.11. in der Vorlesung.
Die Aufgabenblätter erhält man auch auf der Homepage:
http://www.math.uni-bonn.de/people/klaus