Universität Bonn,
Wintersemester 2010/11
Boris Springborn
Klaus Dankwart

02.11.2010

Aufgabenblatt 3
zur Vorlesung Geometrie 1

Aufgabe 1. (Rotationsflächen I)
Sei $c : I \to \mathbb{R}^2, c := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, b > 0$ eine reguläre, nach Bogenlänge parametrisierte Kurve die das offene Intervall $I \subset \mathbb{R}$ homöomorph auf $c(I)$ abbildet. Sei M die aus c entstandene Rotationsfläche mit der Parametrisierung

$$f(t, \phi) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t)\cos(\phi) \\ b(t)\sin(\phi) \end{pmatrix}$$

(siehe Vorlesung 5)

1. Berechnen Sie geodätische Krümmung, Normalkrümmung und geodätische Torsion der Meridiane und Breitenkreise in M.
2. Unter welchen Bedingungen sind die Breitenkreise bzw. Meridiane Geodätische, Krümmungslinien oder Asymptotenlinien?

5 Punkte

Aufgabe 2. (Rotationsflächen II)
Seien M, f, c wie aus Aufgabe 1.
Wir möchten die Hauptkrümmungen von M berechnen.

1. Zeigen Sie, dass $\partial_t f$ ein Eigenvektor des Weingartenoperators zum Eigenwert $a''b' - b''a'$ ist.
   Tipp: Zeigen und benutzen Sie dafür die Gleichung $a'a'' + b'b'' = 0$
2. Zeigen Sie, dass $\partial_\phi f$ ein Eigenvektor des Weingartenoperators zum Eigenwert $\frac{a'}{b}$ ist.
   Bemerken Sie, dass b der Radius des Meridians an $(a, b, 0)$ ist.

5 Punkte

Aufgabe 3. (Konforme Abbildungen)
Sei $f : U \to \mathbb{R}^3$ eine lokale Parametrisierung einer Fläche M. f heißt *konform* wenn die Matrix der ersten Fundamentalform g_p bzgl. der Basis $\partial_1 f, \partial_2 f$ in jedem Punkt von der Form $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$ ist.
Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

1. f ist konform.

2. Der Schnittwinkel zweier Kurven im Parameterbereich ist stets gleich dem Schnittwinkel ihrer Bilder auf der Fläche.

5 Punkte

Aufgabe 4. (Lokale Lösbarkeit von Anfangswertproblemen)
Ein differenzierbares Vektorfeld V auf einer Fläche M ist eine differenzierbare Abbildung welche jeden Punkt $p \in M$ einen Vektor $v \in T_pM \subset \mathbb{R}^3$ zuordnet.
Sei V differenzierbar und sei $p \in M$. Zeigen Sie, dass es ein $t_0 > 0$ und genau eine Kurve $c : [0, t_0) \to M$ gibt, sodass

$$c(0) = p, c'(t) = V(c(t)), 0 < t < t_0$$

Sie können Aussagen zur Lösbarkeit und Eindeutigkeit von Anfangswertproblemen in $\mathbb{R}^2$ aus der Analysis verwenden.

5 Punkte

Viel Spass!

Abgabe ist am 9.11. in der Vorlesung.