Universität Bonn,
Wintersemester 2010/11
Boris Springborn
Klaus Dankwart

25.01.2010

Aufgabenblatt 13
zur Vorlesung Geometrie 1

Notation: Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und sei d die Innere Metrik. Sei ferner $W_\epsilon(p) := \{v \in T_pM | g_p(v, v) < \epsilon^2\}$

Aufgabe 1. (Kürzeste sind Geodätische)
Sei $c : [a, b] \to M$ eine stückweise glatte Kurve, so dass $l(c) = d(c(a), c(b))$ und $g(c'(t), c'(t)) = 1$ für alle $t \in [a, b]$ in denen c glatt ist.
Zeigen Sie, dass c eine Geodätische ist.
Tipp:

- Zeigen Sie, dass die Einschränkung von c auf ein beliebiges Teilinterval die gleichen Bedingungen erfüllt.
- Sei $I \subset [a, b]$ ein Intervall, so dass $c|_I$ glatt. Zeigen Sie, dass $c|_I$ eine Geodätische ist.
- Benutzen Sie das Lemma aus der Vorlesung. (siehe Rückseite)

5 Punkte

Aufgabe 2. (Hessesche und Geodätische)

1. Sei $c : [a, b] \to M$ eine Geodätische und $h \in C^\infty(M)$. Zeigen Sie:
$$(h \circ c)'' = \operatorname{hess} h(c', c')$$
2. Für $p \in M$ sei $h : M \to \mathbb{R}, q \mapsto d(p, q)^2$. Zeigen Sie:
Wenn $\exp_p$ die Menge $W_\epsilon(p)$ diffeomorph nach M abbildet, dann ist $h|_{\exp_p(W_\epsilon(p))}$ glatt und $\operatorname{hess} h_p$ positiv definit.
3. Seien $p \in M$ und h wie in Teil 2. Zeigen Sie, dass es eine Umgebung U von p gibt, so dass $\operatorname{hess} h_q$ positiv definit für alle $q \in U$.
Sie können ohne Beweis benutzen, dass die Menge der positiv definiten symmetrischen Matrizen eine offene Teilmenge aller symmetrischen Matrizen ist.

5 Punkte

Aufgabe 3. (Punkte in kleinen Umgebungen werden durch harmlose Geodätische verbunden)
Angenommen, $\exp_p$ bildet $W_\epsilon(p)$ diffeomorph auf $U \subset M$ ab. Zeigen Sie:
Es gibt ein $\delta > 0$, so dass für alle $q_1, q_2 \in \exp_p(W_\delta(p))$ es, bis auf Parametrisierung, genau eine kürzeste verbindende Geodätische gibt. Diese verläuft ganz in U.
Tipp: Wieder das Lemma aus der Vorlesung

5 Punkte

Aufgabe 4. (Punkte haben konvexe Umgebungen)
Eine Menge $U \subset M$ heiße *konvex*, wenn es für alle $q_1, q_2 \in U$ bis auf Parametrisierung genau eine kürzeste verbindende Geodätische gibt und diese ganz in U verläuft.
Zeigen Sie, dass es für jeden Punkt $p \in M$ ein $\delta_0 > 0$ gibt, so dass für alle $\delta < \delta_0$

$$\exp_p(W_\delta(p))$$

konvex ist.
Tipp: Benutzen Sie Aufgabe 2 und Aufgabe 3. Benutzen Sie weiterhin, dass eine streng konvexe Funktion $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ ihr Maximum nicht im Inneren annimmt.

5 Punkte

Zur Erinnerung, das folgende Lemma:

Lemma. Seien M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $p \in M$. Dann gibt es $\epsilon > 0$ und eine Umgebung U von p in M, so daß für alle $q \in U$ die Menge $W_\epsilon(q)$ durch exp diffeomorph in M abgebildet wird.

Raumänderung: Die Mittwochsvorlesung wird ab 2011 im Raum 0.006 stattfinden.
Abgabe ist am 01.02. in der Vorlesung.

Die Aufgabenblätter erhält man auch auf der Homepage:
http://www.math.uni-bonn.de/people/klaus