Universität Bonn,
Wintersemester 2010/11
Boris Springborn
Klaus Dankwart

18.01.2010

Aufgabenblatt 12
zur Vorlesung Geometrie 1

Aufgabe 1. (Geodätische Koordinaten)
Für eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) und $p \in M$ sei $\epsilon > 0$ so klein, dass $\exp_p$ den Ball

$$W_\epsilon = \{v \in T_pM | g_p(v, v) < \epsilon^2\}$$

diffeomorph nach M abbildet.
Für eine Orthonormalbasis $e_1, \ldots, e_n$ von (T_pM, g_p) sei

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) = \exp_p(\sum x_i e_i).$$

Die Abbildung $u = \phi^{-1}$ nennt man ein *geodätisches Koordinatensystem* um p. Seien g_{ij} die Komponenten von g bzüglich u und seien Γ_{ij}^k die Christoffelsymbole. Zeigen Sie:

1. $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$
2. $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$
3. $\frac{\partial}{\partial u_k}\Big|_p g_{ij} = 0$

Tipp:

- Für 1: Zeigen Sie $\frac{\partial}{\partial u_i}\Big|_{\phi(x)} = d\exp_p\big|_x (e_i)$
- Für 2: Schreiben Sie für $v \in T_pM$ die Geodätischengleichung von $c(t) = exp_p(tv)$ in geodätischen Koordinaten und folgern Sie $\Gamma_{ij}^k v_i v_j = 0$
- Für 3: Benutzen Sie 2

5 Punkte

Aufgabe 2. (Innere Metrik induziert die richtige Topologie)
Für ein Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) sei d die Innere Metrik. Zeigen Sie, dass die von d induzierte Topologie (d-Topologie) und Mannigfaltigkeitstopologie (m-Topologie) auf M übereinstimmen. (Das heißt, eine Menge ist genau dann d-offen, wenn sie m-offen ist.)

5 Punkte

Aufgabe 3. (Gradient und Hessesche)
Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $f \in C^\infty(M)$. Zeigen Sie:

1. Es existiert ein eindeutig bestimmtes glattes Vektorfeld $\operatorname{grad} f$, so dass

$$df(v) = g(\operatorname{grad} f(p), v)$$

   für alle $p \in M,\ v \in T_pM$. $\operatorname{grad} f$ heißt das *Gradientenfeld* von f.

2. Für $p \in M,\ v, w \in T_pM$ ist die *Hessesche* von f in p die auf T_pM definierte Bilinearform

$$(\operatorname{hess} f)_p(v, w) = g(\nabla_v \operatorname{grad} f, w)$$

   Zeigen Sie, dass $(\operatorname{hess} f)_p$ symmetrisch ist.

Tipp: Zeigen Sie, dass $(\operatorname{hess} f)_p(X, Y) = (\operatorname{hess} f)_p(Y, X)$ für beliebige Vektorfelder $X, Y \in \Gamma(TM)$

5 Punkte

Aufgabe 4. (Gradientenfelder konstanter Länge)
Sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und $f \in C^\infty(M)$. Angenommen, $\operatorname{grad} f$ hat konstante Länge. Zeigen Sie:

1. $\nabla_{\operatorname{grad} f} \operatorname{grad} f = 0$

2. Die Integralkurven des Vektorfeldes $\operatorname{grad} f$ sind Geodätische

Tipp: Für 1 benutzen Sie Teil 2 aus Aufgabe 3.

5 Punkte

Raumänderung: Die Mittwochsvorlesung wird ab 2011 im Raum 0.006 stattfinden.
Abgabe ist am 25.01. in der Vorlesung.
Die Aufgabenblätter erhält man auch auf der Homepage:
http://www.math.uni-bonn.de/people/klaus