Universität Bonn,
Wintersemester 2010/11
Boris Springborn
Klaus Dankwart

11.01.2010

Aufgabenblatt 11
zur Vorlesung Geometrie 1

Aufgabe 1. (Energie und Variation)
Für eine stetig differenzierbare Kurve $c : [a, b] \to M$ auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) sei $E(c) := \int_a^b g(c'(t), c'(t))dt$ die *Energie* von c.

1. Für eine glatte Variation $c_\tau,\ \tau \in (-\epsilon, \epsilon),\ c_0 = c$ sei Y das Variationsfeld längs c. Zeigen Sie die folgende Variationsformel:

$$\frac{d}{d\tau}\bigg|_{\tau=0} E(c_\tau) = g\left(Y(b), c'(b)\right) - g\left(Y(a), c'(a)\right) - \int_a^b g(Y(t), (\nabla_{\frac{d}{dt}} c')(t))dt$$

2. Folgern Sie, dass c genau dann eine Geodätische ist, wenn für jede glatte Variation mit festen Endpunkten c_τ gilt:

$$\frac{d}{d\tau}\bigg|_{\tau=0} E(c_\tau) = 0$$

5 Punkte

Aufgabe 2. (Satz von Clairaut)
Sei c eine Geodätische auf einer Rotationsfläche, $\alpha(t)$ der Winkel, in dem c den Breitenkreis durch $c(t)$ schneidet, und $\rho(t)$ der Abstand von $c(t)$ zur Rotationsachse. Zeigen Sie, dass

$$\rho \cos \alpha$$

konstant ist.
Tipp: Eine Möglichkeit ist, Satz 3 aus Vorlesung 21 anzuwenden.

5 Punkte

Aufgabe 3. (Isometrien erhalten Geodätische)
Sei $f : (M, g^M) \to (N, g^N)$ eine Isometrie zwischen Riemannschen Mannigfaltigkeiten.

1. Zeigen Sie $f_*(\nabla^M_X Y) = \nabla^N_{f_* X} f_* Y$, wobei ∇^N, ∇^M die Levi-Civita-Zusammenhänge auf M, N sind.

2. Zeigen Sie, dass f Geodätische in M auf Geodätische in N abbildet.

5 Punkte

Aufgabe 4. Geodätische auf dem Torus
Sei $R > r > 0$ und

$$f(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} (R + r\cos(\varphi))\cos(\vartheta) \\ (R + r\cos(\varphi))\sin(\vartheta) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

die Parametrisierung des Torus im $\mathbb{R}^3$ mit der Unterraummetrik.

1. Zeigen Sie, dass $\sqrt{r^2\varphi'^2 + (R + r\cos(\varphi))^2\vartheta'^2}$ die Geschwindigkeit der Kurve $c(t) = f(\varphi(t), \vartheta(t))$ ist.
2. Zeigen Sie, dass c genau dann eine Geodätische ist, wenn φ, ϑ folgende Gleichungen erfüllen

$$\varphi'' + \frac{\sin(\varphi) \cdot \vartheta'^2}{r}(R + r\cos(\varphi)) = 0 \quad (1)$$

$$\vartheta'' - \frac{2r\sin(\varphi)\varphi'\vartheta'}{R + r\cos(\varphi)} = 0 \quad (2)$$

3. Folgern Sie aus (1) und (2), das folgende Ausdrücke konstant sind:

$$r^2\varphi'^2 + (R + r\cos(\varphi))^2\vartheta'^2$$
$$(R + r\cos(\varphi))^2\vartheta'$$

   Zeigen Sie außerdem, dass ϑ' entweder identisch verschwindet oder nie sein Vorzeichen ändert.

4. Sei $c = f(\varphi, \vartheta) : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Geodätische auf den Torus. Angenommen, $\varphi'(t_0) = 0$ für ein $t_0 \in I$ und für $\varphi_0 := \varphi(t_0)$ gelte $-\pi \leq \varphi_0 \leq \pi$.
   Zeigen Sie:

$$-\varphi_0 \leq \varphi(t) \leq \varphi_0, \forall t \in I$$

   (OBdA können Sie $\vartheta' > 0$ annehmen.)

5 Punkte

Raumänderung: Die Mittwochsvorlesung wird ab 2011 im Raum 0.006 stattfinden.
Abgabe ist am 18.01. in der Vorlesung.
Die Aufgabenblätter erhält man auch auf der Homepage:
http://www.math.uni-bonn.de/people/klaus