Universität Bonn,
Wintersemester 2010/11
Boris Springborn
Klaus Dankwart

21.12.2010

Aufgabenblatt 10 zur Vorlesung Geometrie 1

Aufgabe 1. (Zusammenhänge sind durch ihren Paralleltransport eindeutig bestimmt)
Für einen Zusammenhang ∇ auf einer Mannigfaltigkeit M, eine Kurve $c : I \to M$ und $t_0, t_1 \in I$ sei $P_{c,t_0,t_1} : T_{c(t_0)}M \to T_{c(t_1)}M$ die Abbildung die einen Vektor v auf die Auswertung des durch v eindeutig definierten parallelen Vektorfeldes V entlang c zur Zeit t_1 abbildet, d.h.

$$P_{c,t_0,t_1} : v \mapsto V(t_1),\ \nabla_{\frac{d}{dt}} V = 0,\ V(t_0) = v$$

Sei nun $Y \in \Gamma(TM)$, $X \in T_pM$ und $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$, $c(0) = p$, $c'(0) = X$. Zeigen Sie:

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(P_{c,t,0}(Y(c(t))) - Y(c(0))) = \nabla_X Y$$

Tipp:

- Die Abbildung $t \mapsto P_{c,t,0}(Y(c(t))$ ist ein Vektorfeld entlang der konstanten Kurve $t \mapsto c(0)$. Zeigen Sie

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(P_{c,t,0}(Y(c(t))) - Y(c(0))) = \nabla_{\frac{d}{dt}} P_{c,t,0}(Y(c(t)))$$

- Sei

$$V(t,s) := P_{c,t,s}(Y(c(t)))$$

  das Vektorfeld längs der Abbildung $(-\epsilon, \epsilon)^2 \to M$, $(t,s) \mapsto c(s)$.
  Zeigen Sie:

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s}} V = \nabla_{c'(s)} Y$$

5 Punkte

Aufgabe 2.
Sei $f : U \to M$ eine differenzierbare Abbildung einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ in eine Mannigfaltigkeit M zusammen mit einem torsionfreien Zusammenhang ∇. Zeigen Sie

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial s}} \frac{\partial}{\partial t} f(s,t) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial s} f(s,t)$$

Tipp: Benutzen Sie die lokale Darstellung von $f^*\nabla$ aus Vorlesung 18 und die Ergebnisse aus Aufgabenblatt 9.

5 Punkte

Aufgabe 3. (parallele Vektorfelder längs Kurven)
Sei $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ die Sphäre mit dem Standardzusammenhang. Sei $\theta \in [-\pi, \pi]$ und

$$c_\theta : [0, 2\pi] \to S^2, t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t)\cos(\theta) \\ \sin(t)\cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie parallelen Vektorfelder X_θ, Y_θ entlang c_θ mit

$$X_\theta(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ Y_\theta(0) = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ 0 \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.
Sei $X^{(1)}, \ldots, X^{(n)} \in \Gamma(TM)$ Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit M, so dass für jeden Punkt $p \in M$ die Vektoren $X^{(i)}(p)$ eine Basis des T_pM bilden. Zeigen Sie, dass es einen eindeutigen Zusammenhang ∇ gibt, so dass

$$\nabla_Y X^{(i)} = 0, \ \forall i, \ \forall Y \in \Gamma(TM)$$

Unter welchen Bedigungen ist ∇ torsionfrei?

5 Punkte

Wir wünschen euch schöne und entspannte Weihanchten!

Abgabe ist am 11.01. in der Vorlesung.
Die Aufgabenblätter erhält man auch auf der Homepage:
http://www.math.uni-bonn.de/people/klaus