Universität Bonn,
Wintersemester 2010/11
Boris Springborn
Klaus Dankwart

19.10.2010

Aufgabenblatt 1
zur Vorlesung Geometrie 1

Aufgabe 1. (Untermannigfaltigkeiten)

1. Sei M_i eine m_i-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^{n_i}$ für $i = 1, 2$. Zeigen Sie, dass die Menge
$$N := M_1 \times M_2 \subset \mathbb{R}^{n_1+n_2}$$
eine $(m_1 + m_2)$-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$ ist.

2. Sei U eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$ k-fach stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass die Menge
$$M := \{(p, f(p)), p \in U\} \subset \mathbb{R}^{m+n}$$
eine m-dimensionale C^k-Untermannigfaltigkeit des R^{m+n} ist.

5 Punkte

Aufgabe 2. (Differentialrechnung)
Sei $GL_n(\mathbb{R})$ die Menge der invertierbaren $n \times n$ Matrizen welche wir als Teilmenge des $\mathbb{R}^{n^2}$ auffassen.

1. Zeigen Sie, dass $GL_n(\mathbb{R})$ eine offene Menge im $\mathbb{R}^{n^2}$ ist.

2. Sei A^τ die Transponierte von A und bezeichne $Sym_n(\mathbb{R})$ den Vektorraum der symmetrischen $n \times n$ Matrizen.
Machen sie sich klar, dass $Sym_n(\mathbb{R})$ ein $\frac{n(n+1)}{2}$-dimensionaler Vektorraum ist.
Bezeichne f die Abbildung
$$f : GL_n(\mathbb{R}) \to Sym_n(\mathbb{R}), A \mapsto A^\tau A$$
   (a) Berechnen Sie das Differential df_A an der Stelle A.
   (Tipp: Berechnen Sie dies zuerst für $A = Id$)
   (b) Bestimmen Sie den Kern von df_A. Wie groß ist der Rang von df_A?

5 Punkte

Aufgabe 3. (Parametrisierung von Kurven)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall.

1. Sei $c : I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre Kurve, so dass $0 \in I, c(0) = 0, c'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   Zeigen Sie, dass es eine offene Umgebung $U \subset I$ von 0 und einen Diffeomorphismus $\Phi : V \to U$ einer offenen Menge $V \subset \mathbb{R}$ gibt, so dass die Kurve $\tilde{c} := c \circ \Phi : V \to \mathbb{R}^2$ von der Form eines Graphen ist
   $$\tilde{c}(t) = \begin{pmatrix} t \\ h(t) \end{pmatrix}$$
   Zeigen Sie, dass $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist.

2. Sei nun $c : I \to \mathbb{R}^2$ irgendeine reguläre Kurve und $s_0 \in I$. Sei $T(s_0)$ der Tangentialvektor an $c(s_0)$ und v ein Vektor welcher linear unabhängig von $T(s_0)$ ist.
   Zeigen Sie, dass es eine offene Umgebung $U \subset I$ von s_0 und einen Diffeomorphismus $\Phi : V \to U$ einer offenen Menge $V \subset \mathbb{R}$ gibt, so dass die Kurve $\tilde{c} := c \circ \Phi : V \to \mathbb{R}^2$ von der folgenden Form ist:
   $$\tilde{c}(t) = c(s_0) + tT(s_0) + h(t)v$$

5 Punkte

Aufgabe 4. (Krümmung von Kurven)
Seien $h_1, h_2 : I \to \mathbb{R}$ zweifach stetig differenzierbare Funktionen auf einer offenen Menge $I \subset \mathbb{R}$. Sei $s_0 \in I$ und sei $h_i(s_0) = h_i'(s_0) = 0, i = 1, 2$.
Seien $c_i : I \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, h_i(t))$ die Graphen von h_i.
Sei $\kappa_i(t)$ die Krümmung von $c_i(t)$ und nehmen wir an, dass $\kappa_1(s_0) > \kappa_2(s_0)$.
Zeigen sie, dass es eine Umgebung U von s_0 gibt, so dass

$$h_1(t) > h_2(t), \forall t \in U - \{s_0\}$$

5 Punkte

Viel Spass!

Abgabe ist am 26.10. in der Vorlesung.