

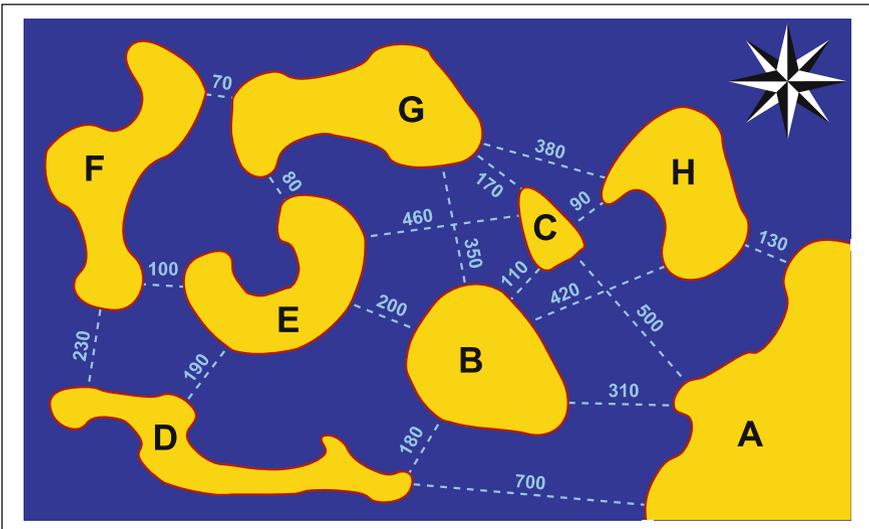
## Minimale aufspannende Bäume (Wenn das Naheliegende das Beste ist...)

Katharina Skutella und Martin Skutella

Technische Universität Berlin

Einst lebte in einem fernen Inselreich der Stamm der Algotaner. Die Stammesmitglieder hausten verstreut auf allen sieben Inseln des unten abgebildeten Inselreichs.

Zwischen den sieben Inseln und dem Festland verkehrten mehrere Fähren, die gegenseitige Besuche und Ausflüge auf das Festland ermöglichten. Die Fährverbindungen sind in der Karte (Abb. 35.1) gestrichelt eingezeichnet. Die Zahlen geben die Länge der Fährverbindungen in Metern an.



**Abb. 35.1.** Das Inselreich der Algotaner umfasste die sieben Inseln B,C,...,H. Die gestrichelten Linien stellen Fährverbindungen dar. Die Zahlen geben die Länge der Fährverbindungen in Metern an. Zum Beispiel verkehrte eine Fähre zwischen dem Festland A und Insel D, die bei jeder Überfahrt eine Strecke von 700 m zurücklegte

## Der Brückenbau der Algolaner

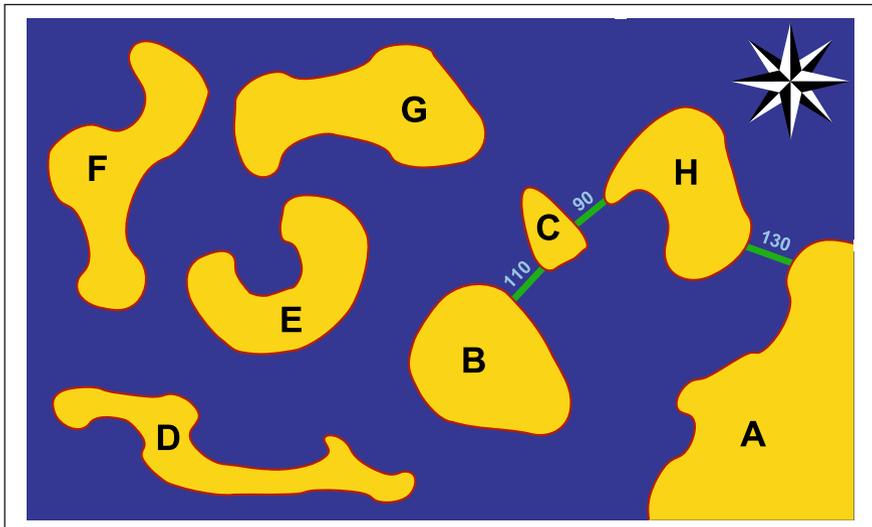
Bei stürmischem Wetter kam es regelmäßig vor, dass eine Fähre kenterte. Deshalb beschlossen die Algolaner, einige Fährverbindungen durch Brücken zu ersetzen.

Im ersten Jahr sollte durch den Bau einer Brücke eine der sieben Inseln an das Festland angeschlossen werden. Die Algolaner wählten die Brücke der Länge 130 m zwischen A und H, da die Verbindungen von A zu anderen Inseln länger sind.

Im zweiten Jahr wollte man eine weitere Insel an das Festland anschließen. In Frage kam also der Bau einer Brücke von A oder von H aus zu einer der anderen Inseln. Die Algolaner entschieden sich für die kürzestmögliche Brücke der Länge 90 m zwischen C und H.

Im dritten Jahr wollte man mit dem Bau einer weiteren Brücke (von A, C oder H aus) eine dritte Insel mit dem Festland verbinden. Die kürzestmögliche Variante war dieses Mal die Brücke der Länge 110 m zwischen B und C. Den Zwischenstand des laufenden Bauprojekts kannst du der Abb. 35.2 entnehmen. Wie du siehst, waren die Algolaner noch längst nicht fertig mit ihren Bauvorhaben.

In den folgenden Jahren wurden die Brücke der Länge 170 m zwischen C und G, dann die Brücke der Länge 70 m zwischen F und G, als nächstes die Brücke der Länge 80 m zwischen E und G und schließlich die Brücke der Länge 180 m zwischen B und D gebaut.



**Abb. 35.2.** Der Zwischenstand des Bauprojekts nach drei Jahren. Die Inseln B, C und H sind bereits an das Festland angebunden

Nach Ablauf des siebten Jahres waren also alle Inseln untereinander und mit dem Festland durch Brücken verbunden. Das Brückenprojekt war damit abgeschlossen. Das fertige Brückensystem der Algolander ist in Abb. 35.3 dargestellt.

Die Algolander waren sehr zufrieden, da der Aufwand für den Bau der Brücken zwar groß gewesen war, man aber andererseits überzeugt war, keine unnötig langen Brücken gebaut zu haben. Die Länge aller Brücken zusammen betrug, wie du leicht nachrechnen kannst, genau 830 m.

## Der Brückenbau nach dem Orkan

Kurz nach Fertigstellung der letzten Brücke fegte ein wütender Orkan über das Inselreich und zerstörte die mühsam errichteten Brücken. Nachdem sie sich von dem Schock erholt hatten, beschlossen die Algolander, ein neues Brückensystem zu errichten. Die neuen Brücken sollten wieder alle Inseln untereinander und mit dem Festland verbinden.

In Folge des Orkans war das Baumaterial knapp geworden. Man einigte sich darauf, zunächst eine möglichst kurze Brücke zu bauen. Daher wurde im ersten Jahr die Brücke der Länge 70 m zwischen F und G erbaut.

Auch im zweiten Jahr war nur wenig Material vorhanden, so dass man die nächst längere Brücke der Länge 80 m zwischen E und G erbaut.

Im dritten Jahr wurde gemäß dieser Strategie die Brücke der Länge 90 m zwischen C und H gebaut. Nach dem Bau dieser drei Brücken waren die drei

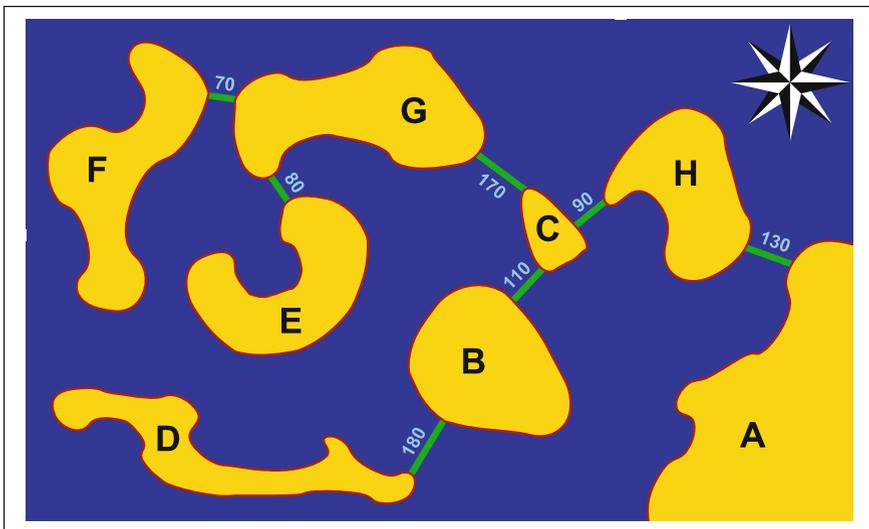


Abb. 35.3. Das fertige Brückensystem der Algolander

Inseln E, F und G und die beiden Inseln C und H miteinander verbunden (siehe Abb. 35.4).

Die kürzeste noch nicht bestehende Verbindung war im vierten Jahr die der Länge 100 m zwischen E und F. Da diese beiden Inseln jedoch bereits über G miteinander verbunden waren, errichtete man statt dessen die Brücke der Länge 110 m zwischen B und C.

Im fünften Jahr kam die Brücke der Länge 130 m zwischen A und H hinzu, danach die Brücke der Länge 170 m zwischen C und G und schließlich im siebten Jahr die Brücke der Länge 180 m zwischen B und D. Das neue Brückensystem der Algolander kannst du Abb. 35.5 entnehmen.

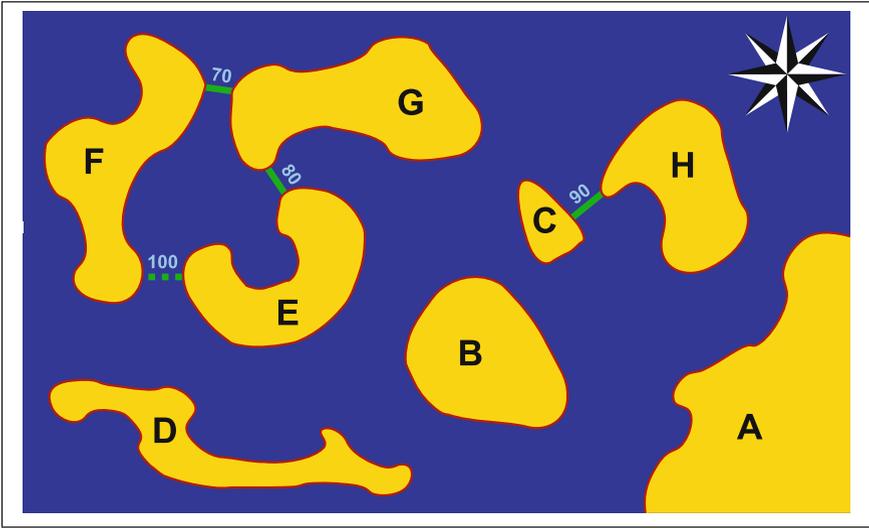
Mit Verblüffen stellten die Algolander fest, dass trotz der veränderten Strategie bei der Auswahl der Brücken wieder das gleiche Brückensystem der Länge 830 m entstanden war (vergleiche Abb. 35.3). Dies bestärkte die Algolander in ihrer Auffassung, das optimale Brückensystem für ihre Inseln gefunden zu haben. Und wenn kein zweiter Orkan sein Unwesen über dem Inselreich getrieben hat, dann spazieren die Algolander noch heute glücklich und stolz über ihre Brücken...

## Die Algorithmen von Prim und Kruskal

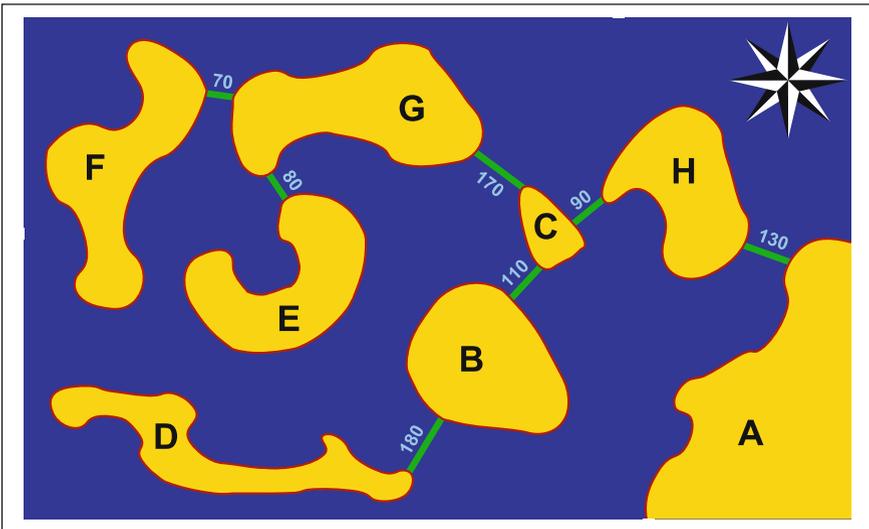
Jetzt fragst du dich bestimmt, ob die Algolander zurecht so stolz auf ihr Brückensystem waren. Vielleicht gibt es ja doch ein besseres, also kürzeres Brückensystem? Du kannst dich durch Ausprobieren davon überzeugen, dass jedes andere Brückensystem, das alle sieben Inseln und das Festland miteinander verbindet, länger als 830 m ist.

Ein Brückensystem minimaler Gesamtlänge, das einige Orte (hier das Festland A und die Inseln B bis H) miteinander verbindet, heißt „minimaler aufspannender Baum“. Das Problem, einen minimalen aufspannenden Baum zu finden, hat neben dem Brückenbau zahlreiche andere praktische Anwendungen. Es tritt beispielsweise auf, wenn Grundstücke eines Neubaugebietes möglichst kostengünstig an die Kanalisation angeschlossen werden sollen. Andere Anwendungen tauchen beim Entwurf von Computer-Chips und bei der Planung von Verkehrs- oder Kommunikationsnetzen (Telefon, Fernsehen, Internet etc.) auf.

Hinter den beiden Strategien der Algolander stecken bekannte Algorithmen zur Lösung des Problems. Die erste Strategie ist unter dem Namen „Algorithmus von Prim“ bekannt. Dieser Algorithmus bindet die Orte nacheinander an das Festland an. Dabei wird in jedem Schritt die kürzestmögliche Brücke gebaut.



**Abb. 35.4.** Der Stand des zweiten Brückenbauprojekts nach drei Jahren. Das Brückensystem besteht aus drei Brücken der Längen 70 m, 80 m und 90 m. Die kürzeste, noch nicht bestehende Verbindung ist diejenige zwischen den Inseln E und F (in der Karte gestrichelt eingezeichnet). Die Algotaner entschieden sich im vierten Jahr jedoch gegen den Bau dieser Brücke, da diese beiden Inseln bereits über G miteinander verbunden sind



**Abb. 35.5.** Das zweite Brückensystem der Algotaner

### Algorithmus von Prim

Wähle einen speziellen Ort aus (Festland) und nenne ihn erreichbar.

Alle anderen Orte sind zunächst nicht erreichbar.

Führe den folgenden Schritt so oft aus, bis alle Orte erreichbar sind:

Baue die kürzeste Brücke zwischen zwei Orten, von denen einer erreichbar und der andere nicht erreichbar ist, und nenne den bislang nicht erreichbaren Ort erreichbar.

Die zweite oben beschriebene Strategie (nach dem Orkan) ist unter dem Namen „Algorithmus von Kruskal“ bekannt. Dieser Algorithmus baut in jedem Schritt die kürzeste Brücke, die zwei noch nicht miteinander verbundene Orte verbindet. Er unterscheidet sich von dem Algorithmus von Prim darin, dass er nicht nur Brücken in Betracht zieht, die eine Verbindung zum Festland herstellen, sondern den Bau beliebiger Brücken zwischen bislang unverbundenen Orten erlaubt.

### Algorithmus von Kruskal

Führe den folgenden Schritt so oft aus, bis alle Orte untereinander durch Brücken verbunden sind:

Baue die kürzeste Brücke, die zwei Orte verbindet, die bislang nicht voneinander aus erreichbar sind.

Die Algorithmen von Prim und Kruskal berechnen einen minimalen aufspannenden Baum und sie haben eine weitere Gemeinsamkeit. Führe dir noch einmal das Vorgehen der Algolander vor Augen. Bei beiden Verfahren haben die Algolander relativ kurzsichtig von Jahr zu Jahr geplant. Sie haben jedes Jahr die beste (d.h. kürzeste) Brücke gebaut, die zu dem Zeitpunkt in Frage kam. Dabei haben sie keine Rücksicht darauf genommen, welche Auswirkungen die getroffene Entscheidung für den weiteren Verlauf des Brückenbauprojekts hat. Wie du siehst, kann auch das „Naheliegende“ einmal zum Erfolg führen.

Algorithmen mit dieser Eigenschaft werden auch „greedy“ (englisch für „gierig“) genannt, weil sie in jedem Schritt die beste Wahl treffen, die momentan zur Verfügung steht. Solch ein „kurzsichtiger“ Ansatz führt bei anderen Problemen nicht immer zum Ziel. Stelle dir beispielsweise vor, Du sollst nur die Insel D durch ein Brückensystem minimaler Länge an das Festland A anbinden. In dem kurzsichtig entworfenen Brückensystem der Algolander erreicht man D von A aus über die Inseln H, C und B. Für diesen Weg ergibt sich eine Gesamtlänge von 510 m. Bestimmt kannst du eine kürzere Verbindung zwischen A und D finden! Wenn du mehr darüber erfahren möchtest, wie man die kürzeste Verbindung vom Festland A zu der Insel D findet, dann schau doch mal in Kap. 34 nach.

Die beiden Algorithmen haben übrigens eine weitere interessante Eigenschaft. Sie berechnen immer eine Lösung, in der die Länge der längsten Brücke so klein wie möglich ist. Am Beispiel des Inselreichs kannst du das überprüfen.

## Zum Weiterlesen

### 1. Kapitel 34 (Kürzeste Wege)

Nicht alle Algolander waren zufrieden mit ihren Brücken. Zum Beispiel beschwerte sich Häuptling Hinkfuß von der Insel D, der regelmäßig den Mediziner auf dem Festland konsultierte, dass der Weg von D über B, C und H nach A unnötig lang sei (510 Brückenmeter). Man hätte doch besser eine Brücke von A nach B bauen sollen, welche die Verbindung auf 490 Brückenmeter verkürzt hätte. Wie man die kürzeste Verbindung vom Festland zu allen Inseln findet, erfährst du in Kap. 34.

### 2. Kapitel 42 (Das Travelling Salesman Problem)

Auch der Milchmann Müde-Molke, der täglich jede Insel mit einem Sack Kokosnüsse belieferte, machte seinem Unmut Luft. Seiner Meinung nach hätte man die Brücken so bauen sollen, dass sich ein möglichst kurzer Rundweg vom Festland aus über alle Inseln ergeben hätte. Wie dem Milchmann geholfen werden kann, erfährst du in Kap. 42.

### 3. Kapitel 3 (Schnelle Sortieralgorithmen)

Möchte man den Algorithmus von Kruskal anwenden, ist es ratsam, zunächst die zur Diskussion stehenden Verbindungen der Länge nach zu sortieren, um sie dann in dieser Reihenfolge abarbeiten zu können. Wie man möglichst schnell sortiert, erfährst du in Kap. 3.

### 4. Kapitel 9 (Zyklensuche in Graphen)

Im vierten Jahr nach dem Orkan bauten die Algolander nicht etwa die kürzere Brücke von E nach F, sondern die Brücke von B nach C. Denn die Brücke von E nach F hätte zwei Inseln miteinander verbunden, die bereits über mehrere andere Brücken miteinander verbunden waren. Man kann das auch so ausdrücken: Der Bau der Brücke von E nach F hätte einen Zyklus (oder Kreis) von E über F nach G und zurück nach E ergeben. Mehr über Zyklen und wie man sie findet erfährst du in Kap. 9.

### 5. Lutz-Westphal, B.: *Günstig verbunden: Minimale aufspannende Bäume*. In: Hussmann, S., Lutz-Westphal, B. (Hrsg.): *Kombinatorische Optimierung erleben*. Vieweg Verlag, 1. Auflage, 2007, Kap. 2, S. 39–66

Leitungsnetze planen, Straßen erneuern und Computer verkabeln: Dieses Buch behandelt weitere Anwendungsbeispiele für minimale aufspannende Bäume. Die Beispiele werden sorgfältig und ausführlich modelliert. Die Lösungsalgorithmen werden anschaulich und verständlich erklärt. In diesem Buch findest du u.a. den Beweis dafür, dass die Algorithmen von Prim und Kruskal immer einen optimalen Baum bestimmen. Das Buch richtet sich gezielt auch an Schülerinnen und Schüler.

### 6. Gritzmann, P., Brandenburg, B.: *Das Geheimnis des kürzesten Weges: Ein mathematisches Abenteuer*, Springer, 3. Auflage, 2005, S. 138–161

Auf ihren mathematischen Abenteuern lüftet die 15-jährige Ruth auch das „Geheimnis“ des minimalen aufspannenden Baumes. Warum der Algorithmus von Prim tatsächlich immer einen optimalen Baum findet, erfährst du in diesem unterhaltsamen und spannenden Buch.

7. Cormen, T. H., Leiserson, C. E., Rivest, R. L., Stein, C.: *Introduction to Algorithms (Second Edition)*, MIT Press, 2001.

Wie man die Algorithmen von Prim und Kruskal so auf dem Computer programmiert, dass sie möglichst schnell die gesuchte Lösung finden, und vieles mehr, erfährst du in diesem Buch, dass auch an vielen Universitäten in Anfängervorlesungen für angehende Informatikerinnen und Informatiker verwendet wird.