

Technische Universität Berlin
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik

Masterarbeit

Zur Berechnung von Kontaktdarstellungen

vorgelegt von
Hendrik Schrezenmaier

Berlin 2016

Erstgutachter: Prof. Dr. Stefan Felsner
Zweitgutachter: Prof. Dr. Martin Henk

Zusammenfassung

Eine Kontaktdarstellung eines ebenen Graphen $G = (V, E)$ ist eine Abbildung $\phi : V \rightarrow A$ von der Knotenmenge von G in eine Menge A von geometrischen Objekten, so dass sich die Bilder $\phi(v)$ und $\phi(w)$ zweier verschiedener Knoten $v, w \in V$ genau dann berühren, wenn $\{v, w\} \in E$ ist, und ansonsten disjunkt sind. In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit zwei verschiedenen Klassen von Kontaktdarstellungen: Kontaktdarstellungen mit Rechtecken und Kontaktdarstellungen mit Dreiecken. Dabei interessieren wir uns vor allem für den Spezialfall, in dem alle Rechtecke Quadrate beziehungsweise in dem alle Dreiecke gleichseitig sind. Es ist bekannt, dass solche Kontaktdarstellungen unter gewissen Voraussetzungen für den Graphen G immer existieren. Allerdings weiß man nicht, wie man diese effizient berechnen kann.

Wir werden uns für beide Probleme jeweils einen Algorithmus anschauen, der zumindest in praktischen Tests gute Ergebnisse liefert, dessen Korrektheit aber bislang nicht bewiesen werden konnte. Die Idee dieser Algorithmen ist es, die kombinatorische Struktur der Kontaktdarstellung festzusetzen (zum Beispiel, ob die Quadrate $\phi(v)$ und $\phi(w)$ für eine Kante $\{v, w\} \in E$ über- oder nebeneinander liegen) und dann ein lineares Gleichungssystem für die Seitenlängen der einzelnen Quadrate beziehungsweise Dreiecke zu lösen. Wenn die Lösung nichtnegativ ist, lässt sich aus dieser die gesuchte Kontaktdarstellung konstruieren und ansonsten kann mit Hilfe dieser Lösung die kombinatorische Struktur geändert und von vorne begonnen werden.

Die Hauptresultate dieser Arbeit sind neue Existenzbeweise für beide Klassen von Kontaktdarstellungen, die auf den Ideen der beschriebenen Algorithmen basieren. Um eine Kontaktdarstellung mit Quadraten zu finden, werden wir dabei mit einer Kontaktdarstellung mit beliebigen Rechtecken starten und diese dann stetig umformen, so dass sich die Seitenverhältnisse aller Rechtecke dem Wert 1 annähern. Und auch das Problem, eine Kontaktdarstellung mit gleichseitigen Dreiecken zu finden, werden wir so modellieren, dass wir für die Dreiecke einen Seitenverhältnisbegriff einführen und dann analog vorgehen können.

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Einführung | 5 |
| 1.1 | Die Themen und verwandte Arbeiten | 5 |
| 1.2 | Aufbau | 6 |
| 2 | Grundlagen | 8 |
| 2.1 | Vektoren | 8 |
| 2.2 | Graphen, Wege und Kreise | 8 |
| 2.3 | Ebene Graphen | 8 |
| 2.4 | Matchings | 9 |
| 2.5 | Bipolare Orientierungen | 10 |
| 2.6 | α -Orientierungen | 11 |
| 3 | Rechteckskontaktdarstellungen | 12 |
| 3.1 | Transversale Strukturen | 14 |
| 3.1.1 | Transversale Strukturen und Rechteckszerlegungen | 15 |
| 3.1.2 | Die Menge der transversalen Strukturen | 17 |
| 3.2 | Berechnung von Rechteckskontaktdarstellungen | 22 |
| 3.2.1 | Das Gleichungssystem | 24 |
| 3.2.2 | Der Algorithmus | 33 |
| 3.3 | Existenzbeweis | 35 |
| 3.3.1 | Dekomposition | 35 |
| 3.3.2 | Zulässige Seitenverhältnisvektoren für eine feste transversale Struktur | 37 |
| 3.3.3 | Benachbarte transversale Strukturen | 41 |
| 3.3.4 | Abschluss des Beweises | 52 |
| 4 | Dreieckskontaktdarstellungen | 55 |
| 4.1 | Schnyder Woods | 57 |
| 4.1.1 | Schnyder Woods und Dreieckskontaktsysteme | 59 |
| 4.1.2 | Die Menge der Schnyder Woods | 61 |
| 4.2 | Berechnung von Dreieckskontaktdarstellungen | 63 |
| 4.2.1 | Das Gleichungssystem | 65 |
| 4.2.2 | Der Algorithmus | 71 |
| 4.3 | Existenzbeweis | 73 |
| 4.3.1 | Dekomposition | 73 |
| 4.3.2 | Zulässige Seitenverhältnisvektoren für einen festen Schnyder Wood | 74 |
| 4.3.3 | Benachbarte Schnyder Woods | 76 |

| | | |
|----------|----------------------------------|-----------|
| 4.3.4 | Abschluss des Beweises | 83 |
| 5 | Fazit und Ausblick | 84 |
| 5.1 | Fazit | 84 |
| 5.2 | Ausblick | 84 |

1 Einführung

Wir werden jetzt zunächst einen Überblick über die in der vorliegenden Arbeit behandelten Themen geben und diese in den Rahmen verwandter Arbeiten setzen. Anschließend werden wir dann eine Übersicht über den Aufbau der Arbeit geben.

1.1 Die Themen und verwandte Arbeiten

In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit Kontaktdarstellungen von ebenen Graphen G . Eine solche Kontaktdarstellung ist eine Menge $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ von geometrischen Objekten in der Ebene, die sich paarweise entweder berühren oder disjunkt sind und deren Kontaktgraph gerade G ist. Der Kontaktgraph ist dabei der Graph, dessen Knotenmenge A ist und der für jede Berührung zweier Elemente a_i und a_j von A eine Kante $\{a_i, a_j\}$ besitzt.

Eines der bekanntesten Resultate in diesem Bereich ist das Kreispackungstheorem von Koebe [Koe36] aus dem Jahr 1936. Dieses besagt, dass jeder zusammenhängende einfache ebene Graph eine Kontaktdarstellung mit Kreisen besitzt. Eine mächtige Verallgemeinerung dieses Theorems ist das Monstertheorem von Schramm [Sch96] von 1996. Dieses erlaubt es, für jeden Knoten v von G eine beliebige glatte geschlossene topologische Kreisscheibe b_v vorzugeben, und besagt, dass dann eine Kontaktdarstellung A von G existiert, so dass für alle Knoten v von G das zu v gehörige Element a_v von A positiv homothetisch zu b_v ist, also aus b_v durch Skalierung und Verschiebung entsteht.

Wir möchten uns in dieser Arbeit jedoch mit Kontaktdarstellungen mit achsenparallelen Quadraten beziehungsweise homothetischen gleichseitigen Dreiecken beschäftigen. Da Vierecke und Dreiecke nicht glatt sind, folgt die Existenz solcher Kontaktdarstellungen nicht direkt aus dem Monstertheorem von Schramm. Indem man die Vierecke und Dreiecke als Grenzwerte von glatten geschlossenen topologischen Kreisscheiben betrachtet, ist es dennoch möglich, die Existenz dieser Kontaktdarstellungen unter bestimmten Voraussetzungen für den Graphen G mit Hilfe des Monstertheorem zu beweisen. Für den Fall der Kontaktdarstellungen mit Quadraten erwähnt Schramm diese Beweisstrategie in [Sch93] und verweist dabei auf eine Argumentation in seiner Dissertation [Sch90b]. Und für den Fall der Kontaktdarstellungen mit gleichseitigen Dreiecken wird dieser Ansatz in [GLP11] verfolgt. Für die Existenz von Kontaktdarstellungen mit Quadraten gibt es allerdings auch Beweise, die nicht auf dem Monstertheorem beruhen, zum Beispiel in [Sch93] oder [Lov09]. Diese Beweise liefern als Nebenergebnis auch die Eindeutigkeit einer solchen Kontaktdarstellung bis auf Skalierung. Für die Existenz von Kontaktdarstellungen mit gleichseitigen Dreiecken ist jedoch kein eigenständiger

Beweis bekannt und die Frage nach der Eindeutigkeit offen.

Da die Existenz von Kontaktdarstellungen mit Quadraten oder gleichseitigen Dreiecken damit geklärt ist, ist die nächste Frage, die sich anschließt, ob man diese auch effizient berechnen kann. Da keiner der bekannten Existenzbeweise einen polynomiellen Algorithmus liefert, benötigen wir für die Klärung dieser Frage neue Ansätze. Einen solchen liefert Felsner in [Fel09] für Kontaktdarstellungen mit gleichseitigen Dreiecken. Die Idee dabei ist es, in Form eines *Schnyder Woods* die kombinatorische Struktur der gesuchten Kontaktdarstellung festzulegen und anschließend ein lineares Gleichungssystem für die Seitenlängen der einzelnen Dreiecke zu lösen. Falls diese Lösung nichtnegativ ist, lässt sich dann sofort die gesuchte Kontaktdarstellung konstruieren und ansonsten wird mit Hilfe der Lösung der Schnyder Wood geändert und von vorne begonnen. Die Korrektheit dieses Algorithmus konnte bislang weder bewiesen noch widerlegt werden. Doch durch praktische Untersuchungen dieses Algorithmus im Rahmen von [Ruc11] konnte keine Instanz gefunden werden, auf welcher der Algorithmus nicht terminiert, und die Anzahl der benötigten Iterationen war dabei sogar immer sehr gering. Für das Problem der Berechnung von Kontaktdarstellungen mit Quadraten beschreibt Felsner in [Fel13] einen analogen Algorithmus, der anstelle von Schnyder Woods für die Festlegung der kombinatorischen Struktur *transversale Strukturen* verwendet. Auch in diesem Fall terminiert der Algorithmus laut [Pic11] in der Praxis nach wenigen Iterationen und konnte die Korrektheit bislang weder bewiesen noch widerlegt werden.

Die Hauptmotivation für die Beschäftigung mit diesem Thema ist es, einem Korrektheitsbeweis dieser beiden Algorithmen näher zu kommen. Der Beitrag, den wir im Folgenden dabei leisten werden, ist, dass wir neue Existenzbeweise für Kontaktdarstellungen mit Quadraten und mit gleichseitigen Dreiecken präsentieren werden, die auf den Ideen dieser Algorithmen beruhen.

1.2 Aufbau

In Kapitel 2 werden wir die in dieser Arbeit verwendeten Begriffe und Notationen festlegen. Dabei werden wir auch kleine Hilfssätze beweisen, die wir später benötigen werden, die sich aber nicht direkt auf die Themen dieser Arbeit beziehen, sondern eher von allgemeinerer Natur sind.

In Kapitel 3 werden wir uns dann mit Rechteckskontaktdarstellungen, also einer Verallgemeinerung von Kontaktdarstellungen mit Quadraten, beschäftigen. Dabei werden wir in Abschnitt 3.1 zunächst transversale Strukturen einführen und deren Zusammenhang mit Rechteckskontaktdarstellungen beleuchten. In Abschnitt 3.2 werden wir dann den Algorithmus zur Berechnung von Rechteckskontaktdarstellungen beschreiben und schließlich in Abschnitt 3.3 unseren neuen Existenzbeweis präsentieren.

Kapitel 4 beschäftigt sich mit Dreieckskontaktdarstellungen und ist, um die Orientierung zu erleichtern, genauso gegliedert wie Kapitel 3. Das heißt, in Abschnitt 4.1 führen wir Schnyder Woods ein und beleuchten deren Zusammenhang mit Dreieckskontaktdarstellungen, in Abschnitt 4.2 beschreiben wir den Algorithmus zur Berechnung von Dreieckskontaktdarstellungen und in Abschnitt 4.3 präsentieren wir den neuen

Existenzbeweis für Kontaktdarstellungen mit homothetischen gleichseitigen Dreiecken.

Zum Schluss fassen wir in Kapitel 5 noch einmal unsere Ergebnisse zusammen und nennen offene Probleme, an denen in Zukunft weitergearbeitet werden kann.

2 Grundlagen

Wir werden nun damit beginnen, Begriffe und Notationen festzulegen, die wir später verwenden werden.

2.1 Vektoren

Eine *Norm* eines Vektors $x \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir als $\|x\|$. Wenn es relevant ist, geben wir im Index an, um welche Norm es sich dabei handelt. Zum Beispiel ist

$$\|[x_1, \dots, x_n]\|_\infty := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

die Maximumsnorm von $[x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{R}^n$. Wenn wir nicht explizit angeben, um welche Norm es sich handelt, ist dies nicht relevant.

Für ein $x \in \mathbb{R}^n$ und ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ ist $B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| \leq r\}$ der *abgeschlossene Ball* und $B^\circ(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| < r\}$ der *offene Ball* mit dem Radius r um den Mittelpunkt x . Auch hier geben wir wieder im Index an, welche Norm verwendet wird, falls dies relevant ist.

2.2 Graphen, Wege und Kreise

Für eine gerichtete Kante $e = (v, w)$ in einem Graphen definieren wir $e^{-1} := (w, v)$. Und für eine Menge E von gerichteten Kanten definieren wir $E^{-1} := \{e^{-1} : e \in E\}$.

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ein *Kantenzug* in G ist eine Folge (v_1, \dots, v_k) mit $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ für $i = 1, \dots, k-1$, falls G ungerichtet ist, beziehungsweise mit $(v_i, v_{i+1}) \in E$ für $i = 1, \dots, k-1$, falls G gerichtet ist. Für einen Kantenzug $P = (v_1, \dots, v_k)$ definieren wir $P^{-1} := (v_k, \dots, v_1)$. Ein *Pfad* in G ist ein Kantenzug mit $v_i \neq v_j$ für alle $i, j \in \{1, \dots, k\}$ mit $i \neq j$. Ein *Zykel* in G ist ein Kantenzug (v_1, \dots, v_k) mit $v_1 = v_k$. Und ein *Kreis* in G ist ein Zykel (v_1, \dots, v_k) , so dass (v_1, \dots, v_{k-1}) ein Pfad ist.

2.3 Ebene Graphen

Ein *planarer Graph* ist ein Graph, der in der Ebene kreuzungsfrei gezeichnet werden kann. Ein *ebener Graph* ist ein planarer Graph mit einer im kombinatorischen Sinne festen Einbettung in die Ebene durch die Angabe der Rotationsschemata der Knoten. In einem zusammenhängenden ebenen Graphen $G = (V, E)$ gilt die Eulersche Formel

$$|V| - |E| + |F| = 2,$$

wobei F die Menge der Flächen von G ist.

Ein *Winkel* in einem ebenen Graphen ist ein Paar (v, f) von einem Knoten v von G und einer zu v inzidenten Fläche f von G .

Ein gerichteter Kreis C in einem ebenen gerichteten Graphen heißt *essentiell*, wenn es keinen gerichteten Pfad gibt, der von einem Knoten auf C über Kanten im Inneren von C zu einem anderen Knoten auf C verläuft.

Der *Dualgraph* eines ebenen Graphen $G = (V, E)$ ist der ebene Graph, dessen Knotenmenge die Menge der Flächen von G ist und der für jede Kante e von G eine Kante zwischen den beiden an e angrenzenden Flächen besitzt.

2.4 Matchings

Ein *Matching* eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Teilmenge $M \subseteq E$, so dass $e_1 \cap e_2 = \emptyset$ für alle $e_1, e_2 \in M$ mit $e_1 \neq e_2$ gilt. Ein *perfektes Matching* ist ein Matching M mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass jeder Knoten von G zu einer Matchingkante inzident ist, also dass es für alle $v \in V$ ein $e \in M$ mit $v \in e$ gibt.

In einem bipartiten Graphen G mit den beiden Knotenklassen $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $W = \{w_1, \dots, w_n\}$ induziert jedes perfekte Matching M eine Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ durch

$$\sigma(i) = j \Leftrightarrow \{v_i, w_j\} \in M.$$

Wir definieren dann das *Signum* $\text{sgn}(M)$ eines perfekten Matchings M als das Signum der zugehörigen Permutation. Dieses ist also von der Nummerierung der Knoten in V und W abhängig. Da wir im Folgenden aber nur das Signum verschiedener perfekter Matchings eines Graphen vergleichen möchten, spielt dies keine Rolle, solange wir die Nummerierungen beibehalten.

Proposition 2.1. *Es sei G ein bipartiter ebener Graph und alle inneren Flächen f von G seien durch Kreise der Länge $\ell_f \equiv_4 2$ begrenzt. Dann gilt in G für alle Kreise der Länge ℓ mit k inneren Knoten*

$$\ell + 2k \equiv_4 2.$$

Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung des entsprechenden Satzes für ebene Graphen, deren Flächen durch Kreise der Länge 6 begrenzt werden, aus [Ruc11]. Auch der folgende Beweis ist eine Verallgemeinerung des Beweises aus dieser Arbeit.

Beweis. Wir beweisen die Behauptung per vollständiger Induktion über die Anzahl der inneren Flächen des Kreises.

Für einen Kreis mit einer einzigen inneren Fläche ist die Behauptung klar. Denn dann hat der Kreis die Länge $\ell = 4n + 2$ für ein $n \in \mathbb{N}$ sowie $k = 0$ innere Knoten und es gilt

$$\ell + 2k = 4n + 2 + 2 \cdot 0 \equiv_4 2.$$

Es sei nun C ein Kreis mit mehr als einer inneren Fläche und f eine innere Fläche von C , deren inzidente Kanten, die auf dem Kreis C liegen, einen nichtleeren

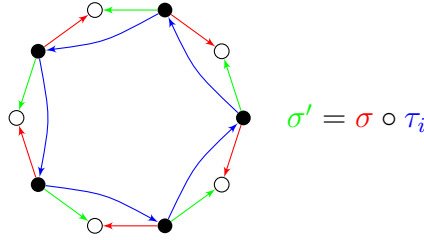


Abbildung 2.1: Die Permutation τ_i aus dem Beweis von Lemma 2.2

Pfad (v_0, \dots, v_{m_1}) bilden. Der Randkreis von f sei $(v_0, \dots, v_{m_1} = w_0, \dots, w_{m_2} = v_0)$. C' sei dann der Kreis, der aus C entsteht, indem (v_0, \dots, v_{m_1}) durch (w_{m_2}, \dots, w_0) ersetzt wird. ℓ' sei dessen Länge und k' die Anzahl seiner inneren Knoten. Nach der Induktionsvoraussetzung gilt dann $\ell' + 2k' \equiv_4 2$. Weiter gilt $m_1 + m_2 = \deg(f) = 4n + 2$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Insgesamt erhalten wir somit

$$\ell + 2k = (\ell' + m_1 - m_2) + 2(k' + m_2 - 1) = \ell' + 2k' + 4n \equiv_4 2.$$

□

Unter den Voraussetzungen von Proposition 2.1 enthält also ein Kreis der Länge ℓ eine gerade Anzahl innerer Knoten, falls $\ell \equiv_4 2$ ist, und eine ungerade Anzahl innerer Knoten, falls $\ell \equiv_4 0$ ist. Andere Kreislengthen sind in einem bipartiten Graphen nicht möglich.

Lemma 2.2. *Es sei G ein bipartiter ebener Graph und alle inneren Flächen f von G seien durch Kreise der Länge $\ell_f \equiv_4 2$ begrenzt. Weiter seien M und M' perfekte Matchings von G . Dann gilt $\text{sgn}(M) = \text{sgn}(M')$.*

Beweis. Wir betrachten die symmetrische Differenz $D := (M \cup M') \setminus (M \cap M')$. Jeder Knoten hat in D entweder den Grad 0 oder den Grad 2. D ist also eine disjunkte Vereinigung von Kreisen C_1, \dots, C_m . Jeder dieser Kreise C_i enthält eine gerade Anzahl innerer Knoten, da M und M' perfekte Matchings sind. Nach Proposition 2.1 hat C_i also die Länge $4n_i + 2$ für ein $n_i \in \mathbb{N}$. Auf den Knoten von C_i unterscheiden sich die zu M gehörende Permutation σ und die zu M' gehörende Permutation σ' daher um eine zyklische Permutation τ_i der Länge $2n_i + 1$ (siehe Abbildung 2.1). Es gilt also $\text{sgn}(\tau_i) = (-1)^{2n_i} = 1$. Insgesamt erhalten wir $\sigma' = \sigma \circ \tau_1 \circ \dots \circ \tau_m$ und damit

$$\text{sgn}(\sigma') = \text{sgn}(\sigma) \cdot \text{sgn}(\tau_1) \cdot \dots \cdot \text{sgn}(\tau_m) = \text{sgn}(\sigma),$$

beziehungsweise $\text{sgn}(M') = \text{sgn}(M)$.

□

2.5 Bipolare Orientierungen

Ein gerichteter Graph G heißt *azyklisch*, wenn es in G keinen gerichteten Kreis gibt. G besitzt dann mindestens eine *Quelle*, also einen Knoten ohne eingehende Kanten, und

mindestens eine *Senke*, also einen Knoten ohne ausgehende Kanten. Falls ein azyklischer Graph genau eine Quelle und genau eine Senke besitzt, nennen wir ihn eine *bipolare Orientierung*.

2.6 α -Orientierungen

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph und $\alpha : V \rightarrow \mathbb{N}$ eine Abbildung. Eine Orientierung X von G heißt dann eine α -Orientierung von G , falls $\text{outdeg}_X(v) = \alpha(v)$ für alle $v \in V$ ist.

Lemma 2.3. *Es sei $G = (V, E)$ ein Graph, $\alpha : V \rightarrow \mathbb{N}$ eine Abbildung und X sowie Y zwei verschiedene α -Orientierungen von G . Dann gibt es eine Familie C_1, \dots, C_k von gerichteten Kreisen in X , deren Umkehrung X in Y überführt.*

Beweis. Es sei D der aufspannende Teilgraph von X , der genau die Kanten enthält, die in Y andersherum orientiert sind als in X . Dann gilt $\text{indeg}_D(v) = \text{outdeg}_D(v)$ für alle $v \in V$. D ist also eine disjunkte Vereinigung von gerichteten Kreisen C_1, \dots, C_k . \square

3 Rechteckskontaktdarstellungen

Wir beginnen mit den grundlegenden Definitionen.

Definition 3.1. Eine *Rechteckszerlegung* ist eine Zerlegung eines Rechtecks (im Folgenden *Grundrechteck* genannt) in eine endliche Menge von Rechtecken (im Folgenden *Teilrechtecke* genannt), deren Inneres paarweise disjunkt ist. Eine *erweiterte Rechteckszerlegung* \mathcal{R}' zu einer Rechteckszerlegung \mathcal{R} entsteht, indem das Grundrechteck von \mathcal{R} wie in Abbildung 3.1 von vier unbeschränkten, gelabelten Flächen umschlossen wird. In einer erweiterten Rechteckszerlegung ist also festgelegt, welche der vier Seiten des Grundrechtecks, und damit auch jedes Teilrechtecks, links, rechts, oben und unten liegt.

Im Folgenden werden alle Rechteckszerlegungen erweitert sein, auch wenn dies nicht mehr explizit erwähnt wird. Falls die vier gelabelten Flächen nicht explizit angegeben werden, ist die Lage dieser Flächen implizit durch die Orientierung der Rechteckszerlegung gegeben.

Definition 3.2. Ein *Segment* einer Rechteckszerlegung \mathcal{R} ist ein maximales Intervall, das eine Teilmenge der Vereinigung der Ränder der Teilrechtecke von \mathcal{R} ist.

Definition 3.3. Der *Skelettgraph* $G_{\text{skel}}(\mathcal{R})$ einer Rechteckszerlegung \mathcal{R} ist der ebene Graph, dessen Knotenmenge die Punkte sind, in denen sich mindestens drei Teilrechtecke von \mathcal{R} berühren und der genau dann eine Kante zwischen zwei Knoten besitzt, wenn es zwei Teilrechtecke gibt, deren Ränder jeweils diese beiden Knoten beinhalten (siehe Abbildung 3.2 (b)).

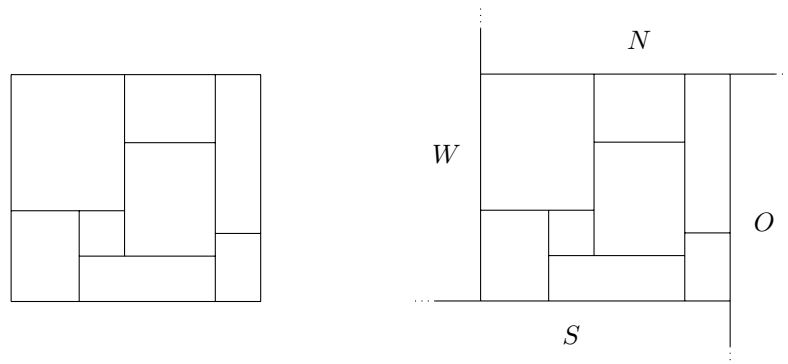
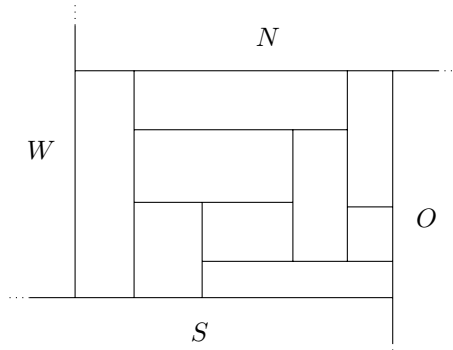
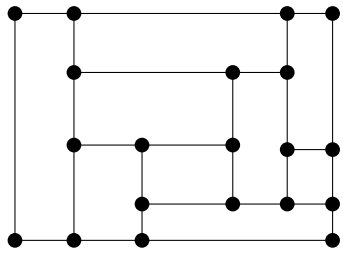


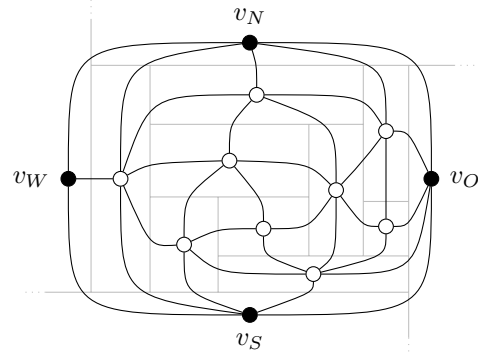
Abbildung 3.1: Eine Rechteckszerlegung und die zugehörige erweiterte Rechteckszerlegung



(a) Eine Rechteckszerlegung \mathcal{R}



(b) Der Skelettgraph $G_{\text{skel}}(\mathcal{R})$



(c) Der Rechteckdualgraph $G^*(\mathcal{R})$

Abbildung 3.2: Der Skelettgraph und der Rechteckdualgraph einer Rechteckszerlegung

Wir können eine Rechteckszerlegung \mathcal{R} als eine (nicht nur im kombinatorischen Sinne) feste planare Einbettung von $G_{\text{skel}}(\mathcal{R})$ interpretieren.

Definition 3.4. Der *Rechteckdualgraph* $G^*(\mathcal{R})$ einer Rechteckszerlegung \mathcal{R} ist der ebene Graph, dessen Knotenmenge die Menge der Teilrechtecke von \mathcal{R} zusammen mit den vier unbeschränkten Flächen ist und der genau dann eine Kante zwischen zwei Knoten besitzt, wenn sich die zugehörigen Flächen in \mathcal{R} berühren (siehe Abbildung 3.2 (c)).

Der Rechteckdualgraph $G^*(\mathcal{R})$ einer Rechteckszerlegung \mathcal{R} ist also gerade der Dualgraph von $G_{\text{skel}}(\mathcal{R})$, wenn wir $G_{\text{skel}}(\mathcal{R})$ um vier Kanten in der äußeren Fläche erweitern, die jeweils von einem Knoten ins Unendliche führen. Die Flächen von $G_{\text{skel}}(\mathcal{R})$ korrespondieren dann also zu den Knoten von $G^*(\mathcal{R})$, die Knoten von $G_{\text{skel}}(\mathcal{R})$ zu den Flächen von $G^*(\mathcal{R})$ sowie die Kanten von $G_{\text{skel}}(\mathcal{R})$ zu den Kanten von $G^*(\mathcal{R})$. Anstatt von den Knoten, Kanten beziehungsweise Flächen von $G_{\text{skel}}(\mathcal{R})$ zu sprechen, werden wir der Einfachheit halber auch von den Knoten, Kanten beziehungsweise Flächen von \mathcal{R} sprechen.

In einem Knoten einer Rechteckszerlegung \mathcal{R} können sich entweder genau drei oder genau vier Flächen berühren. Letzteren Fall werden wir allerdings ausschließlich als Degeneration eines Falles interpretieren, in dem sich nur drei Teilrechtecke berühren (siehe Abbildung 3.3). Die Knoten von \mathcal{R} haben also alle den Grad drei. Somit

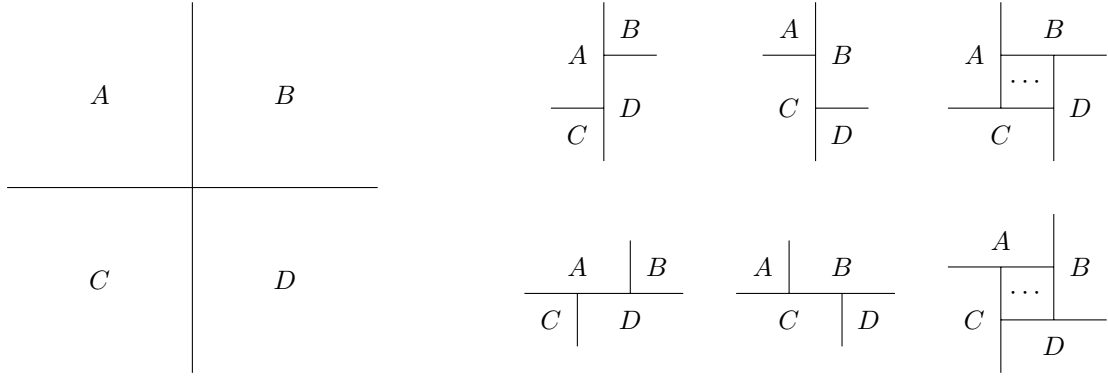


Abbildung 3.3: Ein degenerierter Rechteckskontakt und die sechs Interpretationsmöglichkeiten

haben auch alle inneren Flächen von $G^*(\mathcal{R})$ den Grad drei und $G^*(\mathcal{R})$ ist eine innere Triangulierung des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W) .

Der Rechteckdualgraph $G^*(\mathcal{R})$ besitzt keine Mehrfachkanten und ist daher offensichtlich 3-zusammenhängend. Außerdem kann $G^*(\mathcal{R})$ kein trennendes Dreieck besitzen, da die Teilrechtecke von \mathcal{R} , die zu den Knoten im Inneren eines solchen trennenden Dreiecks gehören würden, in einem einzigen Punkt liegen müssten.

Definition 3.5. Einen 3-zusammenhängenden ebenen Graphen ohne trennende Dreiecke nennen wir *irreduzibel*.

Also ist insbesondere $G^*(\mathcal{R})$ irreduzibel.

Wir interessieren uns im Folgenden für den umgekehrten Fall, in dem wir uns eine irreduzible innere Triangulierung G des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W) vorgeben und eine Rechteckszerlegung \mathcal{R} suchen, deren Rechteckdualgraph G ist.

Definition 3.6. Der Graph G sei eine irreduzible innere Triangulierung des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W) . Dann nennen wir eine Rechteckszerlegung \mathcal{R} eine *Rechteckskontakt*darstellung von G , wenn $G^*(\mathcal{R}) = G$ ist.

3.1 Transversale Strukturen

Wir werden nun eine Struktur einführen, die von einer Rechteckszerlegung auf ihrem Rechteckdualgraphen induziert wird.

Definition 3.7. Es sei G eine innere Triangulierung des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W) . Eine *transversale Struktur* auf G ist dann eine Orientierung und Färbung der inneren Kanten von G , das heißt aller Kanten von G , die nicht inzident zur äußeren Fläche sind, und eine Färbung derselben in den Farben Rot und Blau, so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

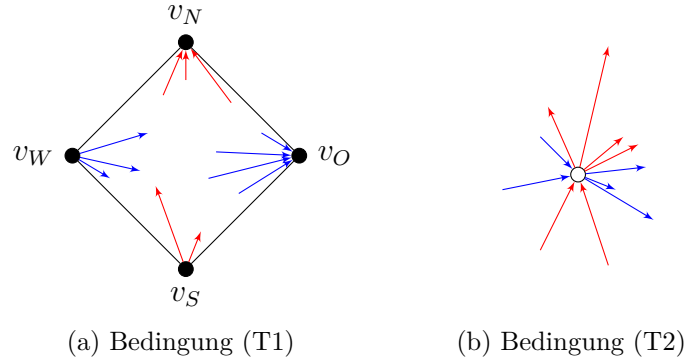


Abbildung 3.4: Die lokalen Bedingungen einer transversalen Struktur

- (T1) Alle zu v_N inzidenten Kanten sind rot und eingehend, alle zu v_O inzidenten blau und eingehend, alle zu v_S inzidenten rot und ausgehend und alle zu v_W inzidenten blau und ausgehend (siehe Abbildung 3.4 (a)).
- (T2) Jeder Knoten $v \neq v_N, v_O, v_S, v_W$ ist inzident zu genau vier nichtleeren Blöcken von Kanten, wobei der erste Block nur rote eingehende, der zweite nur blaue eingehende, der dritte nur rote ausgehende und der vierte nur blaue ausgehende Kanten enthält und die Blöcke im Uhrzeigersinn in dieser Reihenfolge auftreten (siehe Abbildung 3.4 (b)).

3.1.1 Transversale Strukturen und Rechteckszerlegungen

Eine nichtdegenerierte Rechteckszerlegung \mathcal{R} induziert nun folgendermaßen eine transversale Struktur auf ihrem Rechteckdualgraphen $G := G^*(\mathcal{R})$: Es sei $e = \{v, w\}$ eine innere Kante von G . Dann korrespondieren v und w zu zwei Flächen von \mathcal{R} , die sich berühren. Falls diese beiden Flächen übereinander liegen, färben wir die Kante e rot und orientieren sie zu dem Knoten hin, der zu der oberen Fläche gehört. Falls sie hingegen nebeneinander liegen, färben wir die Kante e blau und orientieren sie zu dem Knoten hin, der zu der rechten Fläche gehört (siehe Abbildung 3.5). Wir nennen die auf diese Weise konstruierte transversale Struktur dann auch die transversale Struktur von \mathcal{R} . Falls \mathcal{R} hingegen eine degenerierte Rechteckszerlegung ist, nennen wir die transversale Struktur jeder nichtdegenerierten Interpretation von \mathcal{R} eine transversale Struktur von \mathcal{R} .

Proposition 3.1. *T sei eine transversale Struktur auf einer irreduziblen inneren Triangulierung G des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W) . Dann gibt es eine nichtdegenerierte Rechteckszerlegung \mathcal{R} , so dass T die transversale Struktur von \mathcal{R} ist, und eine solche lässt sich in linearer Zeit berechnen.*

Wir skizzieren nun einen Beweis aus [He93], indem wir die dort verwendete Konstruktion beschreiben.

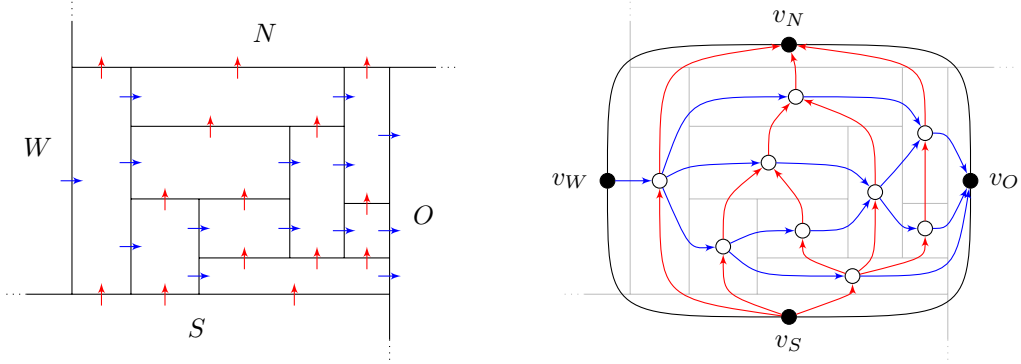


Abbildung 3.5: Die auf einem Rechteckdualgraphen induzierte transversale Struktur

Beweisskizze. Es sei $G_{S \rightarrow N}$ der Teilgraph von G , der die roten Kanten von T enthält und deren Orientierung aus T übernimmt, mit den zusätzlichen orientierten Kanten (v_S, v_W) , (v_W, v_N) , (v_S, v_O) , (v_O, v_N) und (v_S, v_N) . $G_{S \rightarrow N}$ erbt von G eine planare Einbettung und kann daher selbst als ebener Graph betrachtet werden. Ferner ist $G_{S \rightarrow N}$ eine bipolare Orientierung mit der Quelle v_S und der Senke v_N . Für jeden inneren Knoten v von G bezeichnen wir nun die Fläche von $G_{S \rightarrow N}$, die im Uhrzeigersinn zwischen den eingehenden und den ausgehenden Kanten von v liegt, als $f_{\text{links}}(v)$. Und die Fläche, die im Uhrzeigersinn zwischen den ausgehenden und den eingehenden Kanten von v liegt, bezeichnen wir als $f_{\text{rechts}}(v)$.

Analog konstruieren wir den Graphen $G_{W \rightarrow O}$, der aus dem Teilgraphen von G , der die blauen Kanten von T enthält und deren Orientierung aus T übernimmt, und den zusätzlichen Kanten (v_W, v_S) , (v_S, v_O) , (v_W, v_N) , (v_N, v_O) und (v_W, v_O) besteht. Auch $G_{W \rightarrow O}$ erbt eine planare Einbettung von G und ist eine bipolare Orientierung mit der Quelle v_W und der Senke v_O . Für jeden inneren Knoten v von G bezeichnen wir die Fläche von $G_{W \rightarrow O}$, die im Uhrzeigersinn zwischen den eingehenden und den ausgehenden Kanten von v liegt, als $f_{\text{oben}}(v)$ und die Fläche, die im Uhrzeigersinn zwischen den ausgehenden und den eingehenden Kanten von v liegt, als $f_{\text{unten}}(v)$.

Es sei nun $G_{S \rightarrow N}^*$ der Dualgraph von $G_{S \rightarrow N}$ mit folgender Orientierung: Für zwei Flächen f_l und f_r von $G_{S \rightarrow N}$, die in $G_{S \rightarrow N}$ links und rechts von einer Kante e liegen, orientieren wir in $G_{S \rightarrow N}^*$ die Kante zwischen f_l und f_r von f_l nach f_r , wenn $e \neq (v_S, v_N)$ ist, beziehungsweise von f_r nach f_l , wenn $e = (v_S, v_N)$ ist. Auch $G_{S \rightarrow N}^*$ ist dann eine bipolare Orientierung, deren Quelle die Fläche f_W von $G_{S \rightarrow N}$ ist, die rechts von (v_S, v_N) liegt, und deren Senke die Fläche f_O von $G_{S \rightarrow N}$ ist, die links von (v_S, v_N) liegt (siehe Abbildung 3.6). Es sei nun eine Abbildung $F : V(G_{S \rightarrow N}^*) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, die $F(f) < F(g)$ für alle Kanten (f, g) von $G_{S \rightarrow N}^*$ erfüllt. F kann zum Beispiel eine topologische Sortierung von $G_{S \rightarrow N}^*$ sein oder man definiert $F(f)$ für alle $f \in V(G_{S \rightarrow N}^*)$ als die Länge eines längsten gerichteten Pfades von f_W nach f in $G_{S \rightarrow N}^*$. Schließlich definieren wir für alle inneren Knoten v von G die Koordinaten $x_{\text{links}}(v) := F(f_{\text{links}}(v))$ und $x_{\text{rechts}}(v) := F(f_{\text{rechts}}(v))$.

Analog können wir mit Hilfe des Graphen $G_{W \rightarrow O}^*$ für alle inneren Knoten v von G

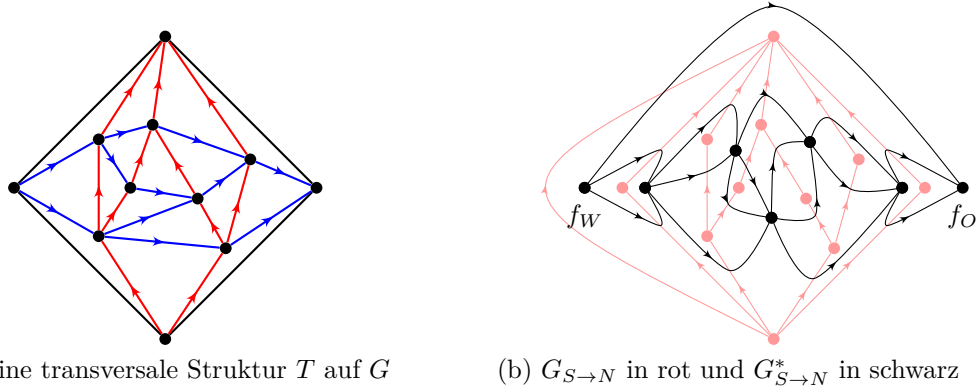


Abbildung 3.6: Die bipolaren Orientierungen $G_{S \to N}$ und $G_{S \to N}^*$

die Koordinaten $y_{\text{unten}}(v)$ und $y_{\text{oben}}(v)$ definieren.

Für jeden inneren Knoten v von G definieren wir jetzt das Teilrechteck von \mathcal{R} , das zu v gehört, als $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x_{\text{links}}(v) \leq x \leq x_{\text{rechts}}(v), y_{\text{unten}}(v) \leq y \leq y_{\text{oben}}(v)\}$. Dann ist \mathcal{R} eine nichtdegenerierte Rechteckszerlegung mit der transversalen Struktur T . \square

3.1.2 Die Menge der transversalen Strukturen

Wir werden nun die Menge aller transversalen Strukturen auf einer festen irreduziblen inneren Triangulierung des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W) untersuchen.

Wir beginnen mit der Feststellung, dass diese Menge nicht leer ist.

Theorem 3.2. *Der Graph G sei eine irreduzible innere Triangulierung des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W) . Dann gibt es auf G eine transversale Struktur und eine solche kann in linearer Zeit berechnet werden.*

Wir skizzieren jetzt einen Beweis aus [Fus10], wobei wir erneut in erster Linie die Konstruktion beschreiben.

Beweisskizze. Die Idee des Algorithmus ist es, einen Kreis C zu betrachten und schrittweise zu verkleinern, der folgende Invarianten erfüllt:

- (I1) Genau diejenigen inneren Kanten von G , die außerhalb von C liegen, sind orientiert und gefärbt.
- (I2) Für alle inneren Knoten von G , die außerhalb von C liegen, ist Bedingung (T2) erfüllt.
- (I3) Für alle inneren Knoten v von G , die auf C liegen, ist folgende Teilbedingung von (T2) erfüllt: Die zu v inzidenten Kanten, die außerhalb von C liegen, bilden im Uhrzeigersinn betrachtet drei Blöcke: einen (eventuell leeren) aus blauen eingehenden Kanten, einen nichtleeren aus roten ausgehenden Kanten und einen (eventuell leeren) aus blauen ausgehenden Kanten.

- (I4) Folgende Teilbedingung von (T1) ist erfüllt: Alle Kanten, die außerhalb von C liegen und inzident zu v_N, v_O, v_S beziehungsweise v_W sind, sind eingehende, rote Kanten, eingehende, blaue Kanten, ausgehende, rote Kanten beziehungsweise ausgehende, blaue Kanten.
- (I5) Der Kreis C enthält die Kanten $\{v_S, v_W\}$ und $\{v_S, v_O\}$.
- (I6) Keine Kante im Inneren von C verbindet zwei Knoten von $C \setminus \{v_S\}$.

Initialisiert wird C mit dem Knoten v_S sowie allen Nachbarn von v_N , einschließlich v_W und v_O , und alle inneren Kanten, die inzident zu v_N sind, werden rot gefärbt und zu v_N hin orientiert (siehe Abbildung 3.7 (b)). Dann sind offensichtlich alle Invarianten erfüllt.

Der Kreis C besteht immer aus den Kanten $\{v_S, v_W\}$ und $\{v_S, v_O\}$ sowie einem Pfad, der die Knoten v_W und v_O verbindet. Für zwei Knoten v und w , die auf diesem Pfad liegen, sagen wir, dass v links von w liegt, wenn v auf diesem Pfad näher an v_W liegt als w . In diesem Fall bezeichnen wir dann den Teilpfad, der v mit w verbindet, mit $[v, w]$.

Um zu beschreiben, wie wir den Kreis C aktualisieren, benötigen wir weitere Definitionen. Ein *innerer Pfad* von C ist ein Pfad P , der zwei Knoten v und w von $C \setminus \{v_S\}$ über Knoten verbindet, die innerhalb von C liegen. Wir bezeichnen dann den Kreis, der durch den Zusammenschluss von P und $[v, w]$ entsteht, mit C_P . Wir nennen den Pfad P *zulässig*, wenn er folgende Eigenschaften erfüllt:

- Die Pfade P und $[v, w]$ besitzen jeweils mindestens zwei Kanten.
- Jede Kante, die innerhalb von C_P liegt, verbindet einen Knoten von $P \setminus \{v, w\}$ mit einem Knoten von $[v, w] \setminus \{v, w\}$.
- Der Kreis C' , der aus C durch Ersetzen von $[v, w]$ durch P entsteht, ist dergestalt, dass keine Kante, die innerhalb von C' liegt, zwei Knoten von $C' \setminus \{v_S\}$ verbindet.

Ein solcher zulässiger innerer Pfad existiert immer, solange es Knoten gibt, die innerhalb von C liegen. Auf die Konstruktion eines zulässigen inneren Pfades werden wir hier allerdings nicht genauer eingehen.

Die Aktualisierung des Kreises C läuft nun folgendermaßen ab: Zunächst finden wir einen zulässigen inneren Pfad P . v und w seien die Endknoten von P . Dann färben wir alle Kanten, die innerhalb von C_P liegen, rot und orientieren sie zu dem Knoten auf $[v, w]$ hin. Die Kanten, die auf $[v, w]$ liegen, färben wir blau und orientieren wir von v nach w . Abschließend aktualisieren wir C , indem wir in C den Pfad $[v, w]$ durch P ersetzen. Es ist leicht zu prüfen, dass nach dem Aktualisierungsschritt wieder alle Invarianten erfüllt sind.

Nach dem letzten Aktualisierungsschritt besitzt C keine inneren Knoten mehr. Dann färben wir alle Kanten, die innerhalb von C liegen, rot und orientieren sie von v_S weg. Und die Kanten von $[v_W, v_O]$ färben wir blau und orientieren sie von v_W nach v_O (siehe Abbildung 3.7 (h)). Dann ist auf Grund von (I2) und (I3) die Bedingung (T2) erfüllt

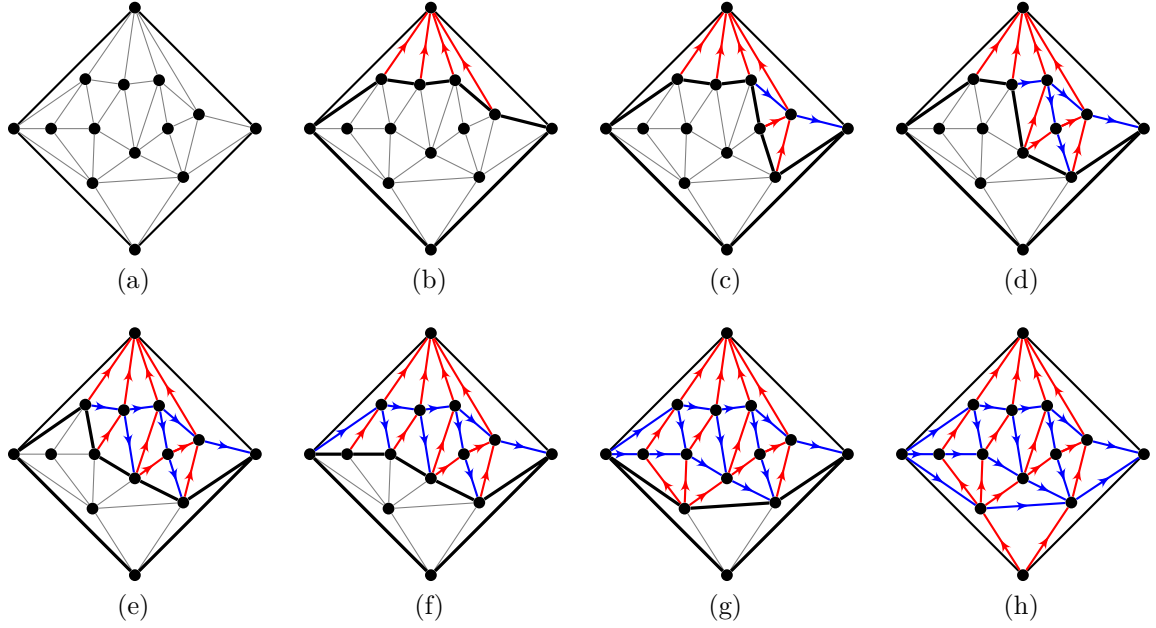


Abbildung 3.7: Ein vollständiger Durchlauf des Algorithmus zum Berechnen einer transversalen Struktur

und auf Grund unserer Konstruktion auch (T1). Damit ist die Konstruktion der transversalen Struktur auf G also abgeschlossen. Ein Beispiel für einen vollständigen Durchlauf des Algorithmus ist in Abbildung 3.7 zu sehen. \square

Als nächstes möchten wir zeigen, dass die transversalen Strukturen auf einer irreduziblen inneren Triangulierung des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W) in Bijektion zu α -Orientierungen eines anderen Graphen stehen.

Definition 3.8. Der *Winkelgraph* Q einer irreduziblen inneren Triangulierung G des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W) ist der ebene bipartite Graph, dessen schwarze Knotenklasse die Menge $V(G)$ der Knoten von G ist, dessen weiße Knotenklasse die Menge $F(G)$ der inneren Flächen von G ist und in dem die Knoten $v \in V(G)$ und $f \in F(G)$ genau dann adjazent sind, wenn diese in G inzident sind (siehe Abbildung 3.8).

Der Winkelgraph einer irreduziblen inneren Triangulierung G des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W) erbt eine planare Einbettung von G . Deshalb können wir diesen als innere Quadrangulierung eines Achtecks betrachten.

Wir definieren die Abbildung $\alpha_4 : V(Q) \rightarrow \mathbb{N}$ durch

$$\alpha_4(v) := \begin{cases} 0, & \text{falls } v \in \{v_O, v_W\}, \\ 2, & \text{falls } v \in \{v_N, v_S\}, \\ 4, & \text{falls } v \text{ schwarz und } v \notin \{v_N, v_O, v_S, v_W\}, \\ 1, & \text{falls } v \text{ weiß.} \end{cases}$$

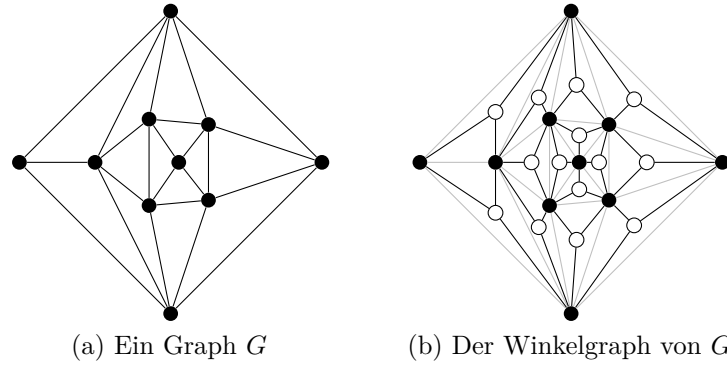


Abbildung 3.8: Der Winkelgraph einer irreduziblen inneren Triangulierung des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W)

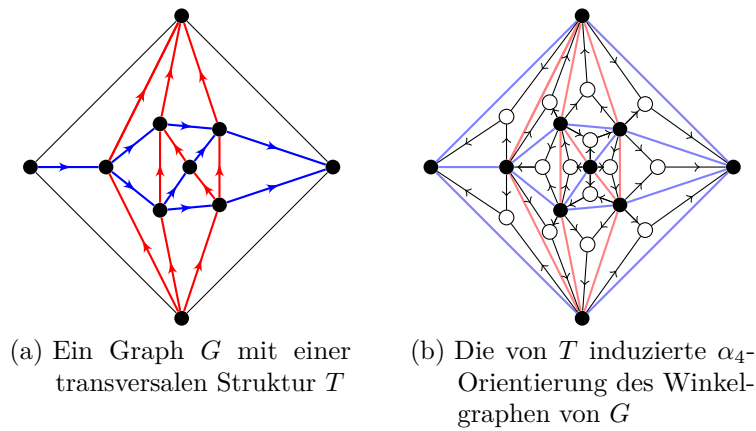


Abbildung 3.9: Die von einer transversalen Struktur induzierte α_4 -Orientierung

Eine transversale Struktur T auf G induziert dann eine α_4 -Orientierung X von Q : Zunächst färben wir die äußeren Kanten von G blau, so dass anschließend alle Kanten von G gefärbt sind. Eine Kante e von Q korrespondiert zu einem Winkel in T . Falls dieser Winkel zwischen zwei verschiedenfarbigen Kanten liegt, orientieren wir e zum weißen Knoten hin. Und falls er zwischen zwei gleichfarbigen Kanten liegt, orientieren wir e zum schwarzen Knoten hin (siehe Abbildung 3.9). In X haben dann wegen (T2) alle inneren schwarzen Knoten den Ausgangsgrad 4 und wegen (T1) sowie der blauen Färbung der äußeren Kanten v_O sowie v_W den Ausgangsgrad 0 und v_N sowie v_S den Ausgangsgrad 2. Dass die weißen Knoten den Ausgangsgrad 1 haben, folgt aus Lemma 3.3. Wir nennen X auch die zu T gehörige α_4 -Orientierung.

Lemma 3.3. *Es sei T eine transversale Struktur auf einer irreduziblen inneren Triangulierung des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W) mit blau gefärbten äußeren Kanten. Dann hat T keine einfarbige innere Fläche. Das heißt, dass jede innere Fläche von T zwei inzidente Kanten in der einen Farbe und die dritte inzidente Kante in der anderen Farbe hat.*

Der folgende Beweis stammt aus [Fus10].

Beweis. Es sei n die Anzahl der inneren Knoten, f die Anzahl der inneren Flächen und λ die Anzahl der zweifarbigen Winkel von T .

Nach (T2) gibt es genau $4n$ zweifarbige Winkel an den inneren Knoten von T und nach (T1) gibt es genau 4 zweifarbige Winkel an den äußeren Knoten von T . Wir erhalten also $\lambda = 4n + 4$.

Durch Hinzufügen der Kante $\{v_W, v_O\}$ in der äußeren Fläche wird T zu einer Triangulierung T' . Es sei v' die Anzahl der Knoten und f' die Anzahl der Flächen von T' . Dann gilt nach der Eulerschen Formel $f' = 2v' - 4$. Damit folgt

$$f = f' - 2 = 2v' - 6 = 2(n + 4) - 6 = 2n + 2.$$

Eine innere Fläche von T hat entweder drei inzidente Kanten in einer einzigen Farbe oder zwei inzidente Kanten in der einen und eine inzidente Kante in der anderen Farbe. Im ersten Fall hat die Fläche keinen zweifarbigen Winkel und im zweiten Fall genau zwei. Wegen $\lambda = 2f$ müssen nach dem Schubfachprinzip also alle diese Flächen vom zweiten Typ sein. \square

Theorem 3.4. *Der Graph G sei eine irreduzible innere Triangulierung des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W) und Q eine α_4 -Orientierung des Winkelgraphen von G . Dann gibt es genau eine transversale Struktur T auf G , so dass Q die zu T gehörige α_4 -Orientierung ist, und diese lässt sich in linearer Zeit berechnen.*

Auch in diesem Fall skizzieren wir wieder einen Beweis aus [Fus10] und beschreiben dabei hauptsächlich die verwendete Konstruktion.

Beweisskizze. Die Idee des Algorithmus ist es, einen Pfad P von v_W nach v_O zu betrachten und schrittweise in Richtung des Knoten v_S wandern zu lassen, der folgende Invarianten erfüllt:

- (I1) Genau diejenigen Kanten von G , die oberhalb von P liegen, sind orientiert und gefärbt.
- (I2) Jeder Knoten auf $P \setminus \{v_W, v_O\}$ besitzt in Q auf beiden Seiten von P zwei ausgehende Kanten.
- (I3) Die Bedingung (T2) ist für alle inneren Knoten von G erfüllt, die oberhalb von P liegen.
- (I4) Folgende Teilbedingung von (T2) ist für alle Knoten $v \in P \setminus \{v_W, v_O\}$ erfüllt: Die zu v inzidenten Kanten, die oberhalb von P liegen, bilden im Uhrzeigersinn betrachtet drei Blöcke: einen (eventuell leeren) aus eingehenden, blauen Kanten, einen nichtleeren aus ausgehenden, roten Kanten und einen (eventuell leeren) aus ausgehenden, blauen Kanten.
- (I5) Folgende Teilbedingung von (T1) ist erfüllt: Alle bereits orientierten und gefärbten Kanten, die inzident zu v_N, v_O, v_S beziehungsweise v_W sind, sind eingehende, rote Kanten, eingehende, blaue Kanten, ausgehende, rote Kanten beziehungsweise ausgehende, blaue Kanten.

(I6) Die Kanten von G , die bereits orientiert und gefärbt sind, vertragen sich mit der α_4 -Orientierung Q , das heißt, für alle Winkel (v, f) in G , die von zwei bereits orientierten und gefärbten Kanten begrenzt sind, ist die zugehörige Kante in Q genau dann von v weg orientiert, wenn der Winkel zweifarbig ist.

Zu Beginn wird der Pfad P mit allen Nachbarn von v_N initialisiert. Zudem werden alle inneren Kanten, die inzident zu v_N sind, zu v_N hin orientiert und rot gefärbt (siehe Abbildung 3.10 (b)). Die Invarianten (I1) bis (I6) sind dann offensichtlich alle erfüllt.

Für zwei Knoten v und v' , die auf dem Pfad P liegen, sagen wir, dass v links von v' liegt, wenn v auf diesem Pfad näher an v_W liegt als v' . In diesem Fall bezeichnen wir dann den Teilpfad, der v mit v' verbindet, mit $[v, v']$.

Für einen Knoten w auf P sei $e_{\text{links}}(w)$ die am weitesten links gelegene zu w inzidente Kante von Q , die unterhalb von P liegt, und $e_{\text{rechts}}(w)$ die am weitesten rechts gelegene zu w inzidente Kante von Q , die unterhalb von P liegt. v sei nun der am weitesten rechts liegende Knoten auf P , der erfüllt, dass $e_{\text{rechts}}(v)$ zu v hin orientiert ist, und v' sei der am weitesten links liegende Knoten auf $[v, v_O] \setminus \{v\}$, der erfüllt, dass $e_{\text{links}}(v')$ zu v' hin orientiert ist. Solange P über innere Kanten von G verläuft, sind diese Knoten v und v' wohldefiniert. Für alle Knoten $w \in [v, v'] \setminus \{v, v'\}$ sind dann die Kanten $e_{\text{links}}(w)$ sowie $e_{\text{rechts}}(w)$ von w weg orientiert. Außerdem sind v und v' auf P nicht benachbart. Denn sonst hätte der weiße Startknoten von $e_{\text{rechts}}(v)$ mindestens zwei ausgehende Kanten.

Es sei $v = w_0, w_1, \dots, w_k, w_{k+1} = v'$ die Folge der Knoten auf $[v, v']$. Der Pfad $P(v, v')$ sei dann der Pfad aus Kanten von G , der in v startet, dann die Nachbarn von w_1, \dots, w_k unterhalb von P besucht und in v' endet.

Der Aktualisierungsschritt läuft nun folgendermaßen ab: Zunächst färben wir alle Kanten auf $[v, v']$ blau und orientiere sie von v nach v' . Die Kanten innerhalb des Gebiets, das von $[v, v']$ und $P(v, v')$ eingeschlossen wird, färben wir rot und orientieren wir von den Knoten auf $P(v, v')$ zu den Knoten auf $[v, v']$. Abschließend ersetzen wir in P den Teilpfad $[v, v']$ durch $P(v, v')$. Es ist leicht zu prüfen, dass nach dem Aktualisierungsschritt wieder alle Invarianten erfüllt sind.

Nach dem letzten Aktualisierungsschritt verläuft P nicht mehr über innere Kanten von G . Dann ist also $P = (v_W, v_S, v_O)$ und damit sind alle inneren Kanten von G gefärbt und orientiert. Auf Grund von (I3) handelt es sich bei dieser Färbung und Orientierung tatsächlich um eine transversale Struktur und auf Grund von (I6) ist dies auch die transversale Struktur, die zu Q gehört. Ein Beispiel für einen vollständigen Durchlauf des Algorithmus ist in Abbildung 3.10 zu sehen. \square

3.2 Berechnung von Rechteckskontaktdarstellungen

Wir möchten uns nun mit dem Problem beschäftigen, zu einer gegebenen irreduziblen inneren Triangulierung G des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W) eine Rechteckskontaktdarstellung von G mit festgelegten Seitenverhältnissen für die Teilrechtecke zu berechnen. Dazu benötigen wir zunächst einige Definitionen.

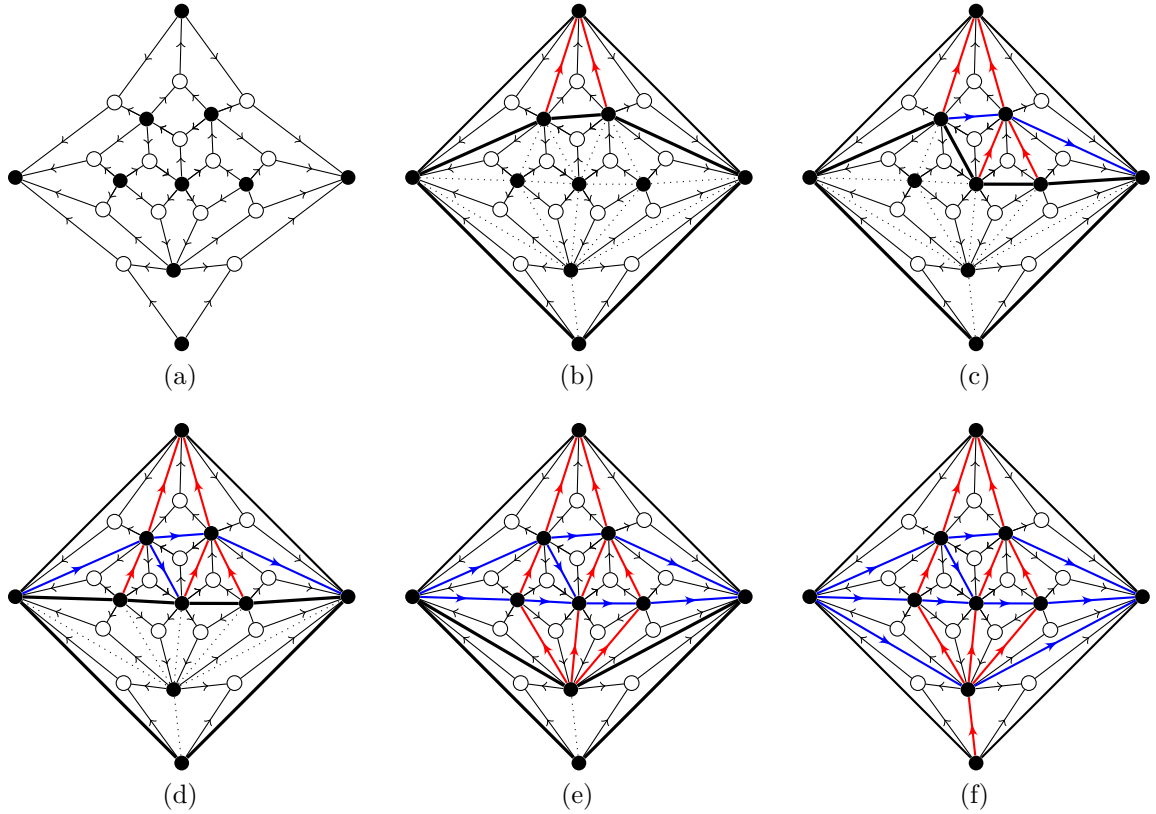


Abbildung 3.10: Ein vollständiger Durchlauf des Algorithmus, der zu einer gegebenen α_4 -Orientierung die zugehörige transversale Struktur berechnet

Definition 3.9. Es sei R ein nichtdegeneriertes Teilrechteck einer Rechteckszerlegung. h sei die Höhe und b die Breite von R . Dann heißt der Quotient $\frac{h}{b}$ das *Seitenverhältnis* von R .

Definition 3.10. Der Graph G sei eine irreduzible innere Triangulierung des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W) mit den inneren Knoten v_1, \dots, v_n und \mathcal{R} eine Rechteckskontaktdarstellung von G . Dann nennen wir den Vektor $s \in \mathbb{R}_{>0}^n$ einen *Seitenverhältnisvektor* von \mathcal{R} , falls für $i = 1, \dots, n$ das Teilrechteck von \mathcal{R} , das zu v_i gehört, das Seitenverhältnis s_i hat, sofern es nicht degeneriert ist.

Der Seitenverhältnisvektor einer nichtdegenerierten Rechteckskontaktdarstellung ist also eindeutig, der einer degenerierten Rechteckskontaktdarstellung hingegen nicht.

Definition 3.11. Eine Rechteckszerlegung \mathcal{R} heißt ein *Squaring*, falls alle nichtdegenerierten Teilrechtecke von \mathcal{R} Quadrate sind, also falls $[1, \dots, 1]$ ein Seitenverhältnisvektor von \mathcal{R} ist.

Nun sind wir in der Lage, das Haupttheorem dieses Kapitels zu formulieren.

Theorem 3.5. *Der Graph G sei eine irreduzible innere Triangulierung des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W) mit den inneren Knoten v_1, \dots, v_n und $s \in \mathbb{R}_{>0}^n$ eine Seitenverhältnissvorgabe. Dann gibt es eine (möglicherweise degenerierte) Rechteckskontakttdarstellung von G , so dass s ein Seitenverhältnisvektor von G ist.*

Dabei steht jedoch meist das folgende Korollar im Zentrum des Interesses.

Korollar 3.6. *Der Graph G sei eine irreduzible innere Triangulierung des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W) . Dann gibt es eine (möglicherweise degenerierte) Rechteckskontakttdarstellung von G , die ein Squaring ist.*

Die Existenz einer Rechteckskontakttdarstellung mit festgelegten Seitenverhältnissen für die Teilrechtecke wird in [Sch93] bewiesen. Jedoch führt keiner der bekannten Beweise von Theorem 3.5 beziehungsweise Korollar 3.6 zu einem effizienten Algorithmus für die Berechnung der gesuchten Rechteckskontakttdarstellung. Wir werden uns nun einen Algorithmus anschauen, der das Problem in der Praxis zwar effizient löst, dessen Korrektheit und gute Laufzeit aber beide bislang nicht bewiesen werden konnten.

Die Idee des Algorithmus ist die Folgende: Wir starten mit einer beliebigen transversalen Struktur auf dem gegebenen Graphen G . Basierend auf dieser transversalen Struktur erstellen wir ein Gleichungssystem für die Seitenlängen der Teilrechtecke der gesuchten Rechteckskontakttdarstellung. Falls die Lösung dieses Gleichungssystems nichtnegativ ist, sind wir fertig und können aus der Lösung die Rechteckskontakttdarstellung konstruieren. Falls die Lösung aber nicht nichtnegativ ist, nutzen wir die Lösung, um zu einer neuen transversalen Struktur auf G zu wechseln, und beginnen von vorne.

3.2.1 Das Gleichungssystem

Es sei G eine irreduzible innere Triangulierung des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W) mit den inneren Knoten v_1, \dots, v_n , T eine transversale Struktur auf G und $s \in \mathbb{R}_{>0}^n$ eine Seitenverhältnissvorgabe. Wir werden nun ein lineares Gleichungssystem beschreiben, das die Kantenlängen einer Rechteckskontakttdarstellung von G mit dem Seitenverhältnisvektor s und der transversalen Struktur T berechnet, sofern eine solche existiert.

Wir erzeugen für jeden Knoten v von G eine Variable x_v , die für die Breite des zu v gehörigen Teilrechtecks steht, sowie für jede innere Kante e von G eine Variable x_e , die für die Länge der zu e gehörigen Kante der Rechteckskontakttdarstellung steht. Für einen Knoten v von G bezeichnen wir mit $\delta_b^-(v)$ die Menge der in T blauen, eingehenden Kanten von v , mit $\delta_b^+(v)$ die Menge der in T blauen, ausgehenden Kanten von v , mit $\delta_r^-(v)$ die Menge der in T roten, eingehenden Kanten von v und mit $\delta_r^+(v)$ die Menge der in T roten, ausgehenden Kanten von v . Für jeden inneren Knoten v_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, erzeugen wir folgende vier Gleichungen:

$$s_i x_{v_i} = \sum_{e \in \delta_b^-(v_i)} x_e, \quad x_{v_i} = \sum_{e \in \delta_r^-(v_i)} x_e, \quad s_i x_{v_i} = \sum_{e \in \delta_b^+(v_i)} x_e, \quad x_{v_i} = \sum_{e \in \delta_r^+(v_i)} x_e.$$

Dazu kommen noch die folgenden vier Gleichungen für die äußeren Knoten:

$$x_{v_N} = \sum_{e \in \delta_r^-(v_N)} x_e, \quad x_{v_O} = \sum_{e \in \delta_b^-(v_O)} x_e, \quad x_{v_S} = \sum_{e \in \delta_r^+(v_S)} x_e, \quad x_{v_W} = \sum_{e \in \delta_b^+(v_W)} x_e.$$

Dieses System ist ein homogenes lineares Gleichungssystem und besitzt daher die triviale Nulllösung. Um dies zu vermeiden, fügen wir eine letzte Gleichung hinzu:

$$x_{v_N} = 1.$$

Insgesamt erhalten wir also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_{v_N} &= 1, \\ \sum_{e \in \delta_b^-(v_i)} x_e - s_i x_{v_i} &= 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ \sum_{e \in \delta_r^-(v_i)} x_e - x_{v_i} &= 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ \sum_{e \in \delta_b^+(v_i)} x_e - s_i x_{v_i} &= 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ \sum_{e \in \delta_r^+(v_i)} x_e - x_{v_i} &= 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ \sum_{e \in \delta_r^-(v_N)} x_e - x_{v_N} &= 0, \\ \sum_{e \in \delta_b^-(v_O)} x_e - x_{v_O} &= 0, \\ \sum_{e \in \delta_r^+(v_S)} x_e - x_{v_S} &= 0, \\ \sum_{e \in \delta_b^+(v_W)} x_e - x_{v_W} &= 0. \end{aligned}$$

Indem wir die linken Seiten der Gleichungen in einer Matrix $A_T(s)$ und die rechte Seite in dem Vektor $b := [1, 0, 0, \dots, 0]^T$ sammeln, schreiben wir für dieses Gleichungssystem auch kurz $A_T(s)x = b$.

Proposition 3.7. *Es sei T eine transversale Struktur auf einer irreduziblen inneren Triangulierung G des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W) mit den inneren Knoten v_1, \dots, v_n und $s \in \mathbb{R}_{>0}^n$ eine Seitenverhältnisvorgabe. Dann ist das Gleichungssystem $A_T(s)x = b$ eindeutig lösbar.*

Der folgende Beweis stammt aus [Ruc11].

Beweis. Wir stellen zunächst fest, dass das Gleichungssystem aus genau $4n + 5$ Gleichungen besteht.

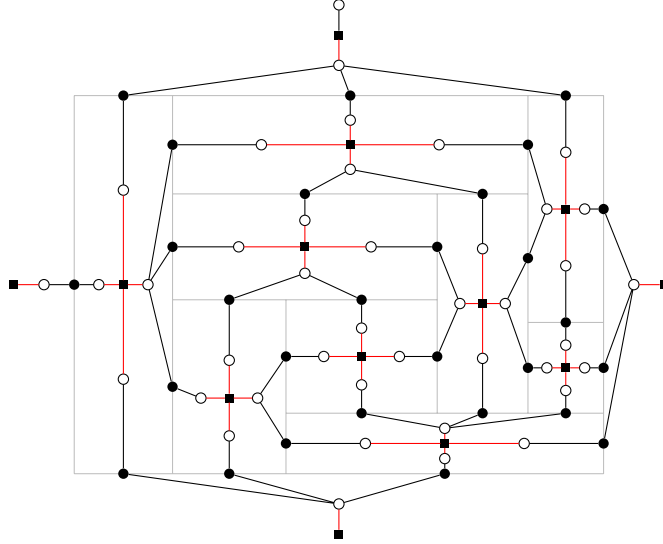


Abbildung 3.11: Der Graph $G_{A_T(s)}$, dessen bipartite Adjazenzmatrix die Matrix $A_T(s)$ ist

Es sei H der ebene Graph, der aus G durch Hinzufügen der Kante $\{v_N, v_S\}$ in der äußeren Fläche entsteht. Dann ist H eine Triangulierung und es gilt nach der Eulerschen Formel $|E(H)| = 3|V(H)| - 6$, also

$$|E(G)| = |E(H)| - 1 = 3|V(G)| - 7.$$

Die Anzahl der Variablen des Gleichungssystems beträgt daher

$$|V(G)| + (|E(G)| - 4) = 4|V(G)| - 11 = 4(n + 4) - 11 = 4n + 5.$$

Das Gleichungssystem hat also genauso viele Gleichungen wie Variablen. Folglich reicht es, zu zeigen, dass die Determinante der Matrix $A_T(s)$ nicht verschwindet.

Wir interpretieren $A_T(s)$ nun als gewichtete Adjazenzmatrix eines bipartiten Graphen $G_{A_T(s)}$, dessen Kanten schwarz und rot gefärbt sind. Die schwarze Knotenklasse bilden dabei die Variablen des Gleichungssystems, also die Knoten und inneren Kanten von G , und die weiße Knotenklasse bilden die Gleichungen des Gleichungssystems. Wir bezeichnen die schwarzen Knoten mit a_1, \dots, a_m und die weißen Knoten mit b_1, \dots, b_m . Die Kante $\{a_i, b_j\}$ existiert genau dann, wenn $(A_T(s))_{ij} \neq 0$ ist, und ist in diesem Fall genau dann schwarz, wenn $(A_T(s))_{ij} > 0$ ist. Da der Graph $G_{A_T(s)}$ nicht von s abhängt, nennen wir diesen auch kurz G_T . Eine Realisierung der transversalen Struktur T als Rechteckszerlegung induziert eine planare Zeichnung von G_T (siehe Abbildung 3.11), weshalb wir G_T als ebenen Graphen betrachten werden.

Nach der Leibniz-Formel ist $\det(A_T(s)) = \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) \prod_i (A_T(s))_{i\sigma(i)}$. Die Permutationen σ stehen hierbei in Bijektion zu den perfekten Matchings des vollständigen bipartiten Graphen, von dem G_T ein aufspannender Teilgraph ist. Dabei wird jeweils der weiße Knoten a_i mit dem schwarzen Knoten $b_{\sigma(i)}$ gematcht. Der Summand $\text{sgn}(\sigma) \prod_i (A_T(s))_{i\sigma(i)}$ ist genau dann ungleich Null, wenn σ zu einem perfekten

Matching von G_T korrespondiert. Wir definieren die *Signatur* $\text{signat}(\sigma)$ einer Permutation σ als das Vorzeichen des zugehörigen Summanden der Determinante von $A_T(s)$, also

$$\text{signat}(\sigma) := \begin{cases} +1, & \text{falls } \text{sgn}(\sigma) \prod_i (A_T(s))_{i\sigma(i)} > 0, \\ -1, & \text{falls } \text{sgn}(\sigma) \prod_i (A_T(s))_{i\sigma(i)} < 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir werden nun zwei Fakten zeigen: Aus $\text{signat}(\sigma), \text{signat}(\tau) \neq 0$ für zwei Permutationen σ und τ folgt $\text{signat}(\sigma) = \text{signat}(\tau)$ und es existiert eine Permutation σ mit $\text{signat}(\sigma) \neq 0$. Aus diesen beiden Aussagen folgt dann sofort $\det(A_T(s)) \neq 0$.

Es sei nun σ eine Permutation mit $\text{signat}(\sigma) \neq 0$. Dann korrespondiert σ zu einem perfekten Matching von G_T . Ein perfektes Matching von G_T beinhaltet genau $n + 3$ rote Kanten. Denn genau die n schwarzen Knoten, die zu den inneren Knoten von G korrespondieren, sowie die drei schwarzen Knoten, die zu v_O, v_S und v_W korrespondieren, sind in einem solchen Matching inzident zu roten Kanten und alle anderen schwarzen Knoten zu schwarzen Kanten. Daher gilt $\text{signat}(\sigma) = (-1)^n \text{sgn}(\sigma)$.

Es sei τ eine weitere Permutation mit $\text{signat}(\tau) \neq 0$. Dann erhalten wir analog $\text{signat}(\tau) = (-1)^n \text{sgn}(\tau)$ und somit müssen wir nur noch $\text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\tau)$ zeigen, um $\text{signat}(\sigma) = \text{signat}(\tau)$ zu beweisen. Da in G_T aber alle inneren Flächen durch Kreise der Länge $10 \equiv_4 2$ begrenzt sind, folgt $\text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\tau)$ sofort aus Lemma 2.2.

Jetzt zeigen wir noch, dass es eine Permutation σ mit $\text{signat}(\sigma) \neq 0$ gibt, indem wir zeigen, dass G_T ein perfektes Matching besitzt. Dazu konstruieren wir Teilmengen M_1, M_2, M_3 und M_4 der Kantenmenge von G_T und zeigen anschließend, dass $M := M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4$ ein perfektes Matching ist. Für jeden inneren Knoten v von G fügen wir folgende Kanten zu den Mengen M_1, M_2, M_3 und M_4 hinzu:

- Es sei w_S der Knoten, der zu der Gleichung bezüglich $\delta_r^-(v)$ gehört. Weiter seien $w_S^{(1)}, \dots, w_S^{(k_S)}$ von links nach rechts die Knoten, die zu den Kanten in $\delta_r^-(v)$ gehören. Dann fügen wir die Kante $\{w_S, w_S^{(1)}\}$ zu M_1 hinzu (siehe Abbildung 3.12).
- Es sei w_O der Knoten, der zu der Gleichung bezüglich $\delta_b^+(v)$ gehört. Weiter seien $w_O^{(1)}, \dots, w_O^{(k_O)}$ von oben nach unten die Knoten, die zu den Kanten in $\delta_b^+(v)$ gehören. Dann fügen wir die Kante $\{w_O, w_O^{(1)}\}$ zu M_2 hinzu (siehe Abbildung 3.12).
- Falls die linke obere Ecke des Teilrechtecks, das zu v gehört, von der Form \top ist, fügen wir die Kanten $\{v, w_W\}$ und $\{w_N, w_N^{(1)}\}$ zu M_3 hinzu. Dabei seien w_W und w_N die Knoten, die zu den Gleichungen bezüglich $\delta_b^-(v)$ und $\delta_r^+(v)$ gehören, und $w_N^{(1)}, \dots, w_N^{(k_N)}$ von links nach rechts die Knoten, die zu den Kanten in $\delta_r^+(v)$ gehören (siehe Abbildung 3.12 (a)).
- Falls die linke obere Ecke des Teilrechtecks, das zu v gehört, hingegen von der Form \vdash ist, fügen wir die Kanten $\{v, w_N\}$ und $\{w_N, w_W^{(1)}\}$ zu M_4 hinzu. Dabei seien w_N und w_W wie oben definiert und $w_W^{(1)}, \dots, w_W^{(k_W)}$ von oben nach unten die Knoten, die zu den Kanten in $\delta_b^-(v)$ gehören (siehe Abbildung 3.12 (b)).

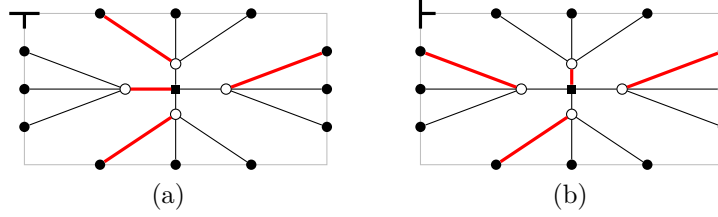


Abbildung 3.12: Konstruktion eines perfekten Matchings in G_{A_T}

Außerdem fügen wir noch Kanten zu M_1 hinzu, die außerhalb des Grundrechtecks liegen. Dies sind zum Einen die Kanten zwischen v_W , v_O sowie v_S und ihrem jeweiligen einzigen Nachbarn. Auch die Kante zwischen v_N und dem Knoten, der zu der inhomogenen Gleichung gehört, fügen wir zu M_1 hinzu. Und schließlich erweitern wir M_1 noch um die Kante zwischen dem anderen zu v_N benachbarten Knoten und dem am weitesten links liegenden Knoten, der zu einer Kante von $\delta_r^-(v_N)$ gehört. Abbildung 3.13 zeigt ein Beispiel für ein auf diese Weise konstruiertes perfektes Matching in G_T .

Es bleibt zu zeigen, dass M ein perfektes Matching ist. Für die Knoten von G_T , die zu Knoten von G oder zu Gleichungen gehören, ist offensichtlich, dass diese genau eine inzidente Kante in M besitzen. Es sei nun v_e ein Knoten von G_T , der zu einer Kante e von G gehört, die in T rot ist. Dann ist e in der Rechteckszerlegung, die wir für die planare Zeichnung von G_T verwendet haben, eine horizontale Kante und der linke Endpunkt von e hat eine der folgenden Formen: \top , \vdash oder \perp . Falls er von der Form \top ist, besitzt v_e genau eine inzidente Kante in M_4 , aber keine in M_1 , M_2 oder M_3 . Falls er von der Form \vdash ist, besitzt v_e genau eine inzidente Kante in M_1 , aber keine in M_2 , M_3 oder M_4 . Und falls er von der Form \perp ist, besitzt v_e ebenfalls genau eine inzidente Kante in M_1 , aber keine in M_2 , M_3 oder M_4 . In jedem Fall hat v_e also genau eine inzidente Kante in M . Wenn v_e hingegen ein Knoten von G_T ist, der zu einer Kante von G gehört, die in T blau ist, können wir auf ähnliche Weise unterscheiden, von welcher Form der obere Endpunkt der vertikalen Kante e ist, und erhalten, dass v_e entweder zu genau einer Kante in M_2 und keiner Kante in M_1 , M_3 oder M_4 inzident ist oder aber zu genau einer Kante in M_3 und keiner Kante in M_1 , M_2 oder M_4 . Auch in diesem Fall besitzt v_e also genau eine inzidente Kante in M .

Also ist M ein perfektes Matching und damit der Beweis abgeschlossen. \square

Aus dem Beweis von Proposition 3.7 folgt zusätzlich diese Beobachtung:

Lemma 3.8. *Es sei T eine transversale Struktur auf einer irreduziblen inneren Triangulierung G des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W) und $s, s' \in \mathbb{R}_{>0}^n$ zwei Seitenverhältnisvorgaben für G . Dann haben $\det(A_T(s))$ und $\det(A_T(s'))$ dasselbe Vorzeichen. Es gilt also $\det(A_T(s)) \det(A_T(s')) > 0$.*

Jetzt möchten wir noch zeigen, dass aus einer nichtnegativen Lösung des Gleichungssystems die gesuchte Rechteckskontaktendarstellung konstruiert werden kann. Die Konstruktion der Rechteckskontaktendarstellung aus der Lösung des Gleichungssystems ist von [Sei15] inspiriert. Den Beweis der Korrektheit dieser Konstruktion vereinfachen

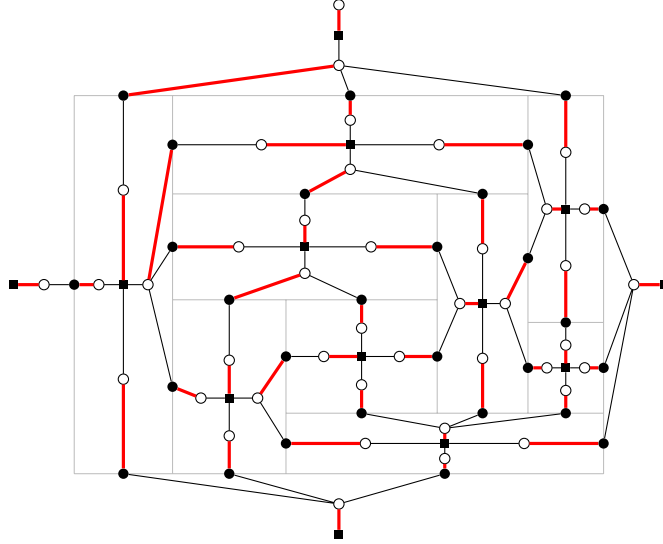


Abbildung 3.13: Ein Beispiel für ein perfektes Matching in G_{A_T} , das wie im Beweis von Proposition 3.7 konstruiert wurde

wir jedoch, indem wir ausnutzen, dass wir bereits wissen, dass zu jeder transversalen Struktur eine nichtdegenerierte Rechteckskontaktdarstellung mit dieser transversalen Struktur existiert (siehe Proposition 3.1). Der Beweis in [Sei15] ist rein kombinatorischer Natur und verwendet kein solches Vorwissen. Zusätzlich wird dort noch gezeigt, dass mit demselben Algorithmus auch aus Lösungen des Gleichungssystems, die nicht nichtnegativ sind, Rechteckszerlegungen konstruiert werden können, die dann aber keine Rechteckskontaktdarstellungen des gegebenen Graphen G mehr sind.

Proposition 3.9. *Es sei T eine transversale Struktur auf einer irreduziblen inneren Triangulierung G des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W) mit den inneren Knoten v_1, \dots, v_n und $s \in \mathbb{R}_{>0}^n$ eine Seitenverhältnisvorgabe. Weiter sei x die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems $A_T(s)x = b$. Falls $x \geq 0$ ist, gibt es eine bis auf Skalierung eindeutige Rechteckskontaktdarstellung \mathcal{R} von G , so dass s ein Seitenverhältnisvektor und T eine transversale Struktur von \mathcal{R} ist. \mathcal{R} ist in diesem Fall genau dann nichtdegeneriert, wenn $x > 0$ ist, und kann in Linearzeit aus x berechnet werden. Falls x hingegen nicht nichtnegativ ist, existiert keine Rechteckskontaktdarstellung \mathcal{R} von G , so dass s ein Seitenverhältnisvektor und T eine transversalen Struktur von \mathcal{R} ist.*

Beweis. Zunächst ist klar, dass die Lösung des Gleichungssystems $A_T(s)x = b$ nichtnegativ ist, wenn es eine Rechteckskontaktdarstellung \mathcal{R} von G gibt, so dass s ein Seitenverhältnisvektor und T eine transversale Struktur von \mathcal{R} ist. Denn wenn wir \mathcal{R} so skalieren, dass anschließend die Breite von \mathcal{R} den Wert 1 hat, und dann für alle Knoten v von G die Variable x_v auf die Breite des zu v gehörigen Teilrechtecks von \mathcal{R} sowie für alle inneren Kanten e von G die Variable x_e auf die Länge der zu e gehörigen Kante von \mathcal{R} setzen, gilt $A_T(s)x = b$. Aus der Eindeutigkeit der Lösung des Gleichungssystems folgt dann auch die Eindeutigkeit der gesuchten Rechteckskontaktdarstellung bis auf

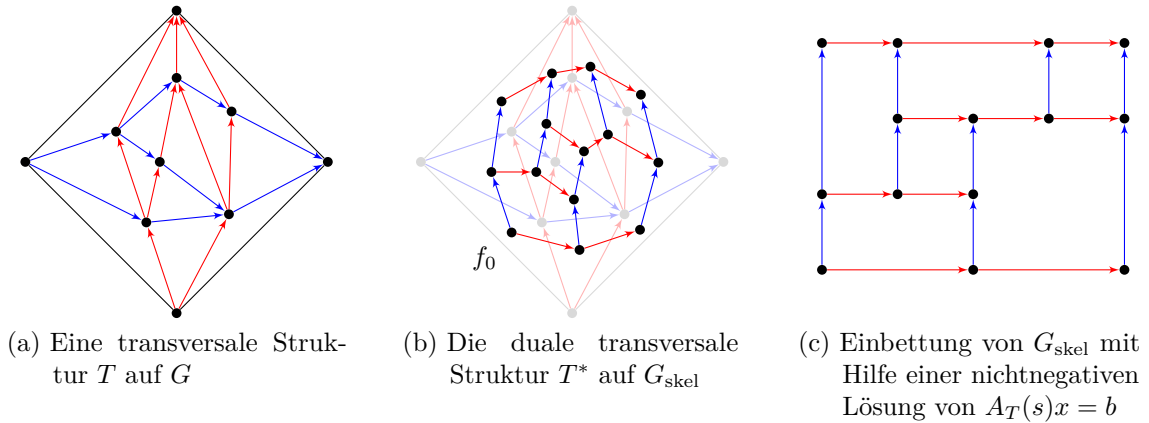


Abbildung 3.14: Konstruktion einer Rechteckskontaktdarstellung aus einer nichtnegativen Lösung von $A_T(s)x = b$

Skalierung. Und die Tatsache, dass genau dann $x > 0$ ist, wenn \mathcal{R} nichtdegeneriert ist, ist damit ebenfalls klar.

Es bleibt also zu zeigen, dass es eine Rechteckskontaktdarstellung \mathcal{R} von G gibt, so dass s ein Seitenverhältnisvektor und T eine transversale Struktur von \mathcal{R} ist, wenn die Lösung von $A_T(s)x = b$ nichtnegativ ist. Dazu definieren wir zunächst den Begriff der *dualen transversalen Struktur*. Die duale transversale Struktur T^* zu der transversalen Struktur T ist folgende Orientierung und Färbung der Kanten des Skelettgraphen G_{skel} der gesuchten Rechteckskontaktdarstellung, also des dualen Graphen von G ohne die äußere Fläche:

- Wenn eine Kante e in T blau ist, färben wir die zugehörige Kante in G_{skel} ebenfalls blau und orientieren sie von der Fläche, die rechts von e liegt, zu der Fläche hin, die links von e liegt.
- Wenn eine Kante e in T hingegen rot ist, färben wir die zugehörige Kante in G_{skel} rot und orientieren sie von der Fläche, die links von e liegt, zu der Fläche hin, die rechts von e liegt.

Abbildung 3.14 (b) zeigt ein Beispiel für eine duale transversale Struktur.

Die *Länge* einer Kante e von G_{skel} definieren wir als den zweidimensionalen Vektor

$$\ell(e) := \begin{cases} [x_e, 0], & \text{falls } e \text{ in } T^* \text{ rot ist,} \\ [0, x_e], & \text{falls } e \text{ in } T^* \text{ blau ist.} \end{cases}$$

Die Länge $\ell(P)$ eines gerichteten Kantenzuges P in G_{skel} definieren wir dann als die Summe der Längen der Kanten auf P , die in der Richtung durchlaufen werden, die der Orientierung in T^* entspricht, abzüglich der Summe der Längen der Kanten auf P , die in der entgegengesetzten Richtung durchlaufen werden.

Wir zeigen nun per vollständiger Induktion über die Anzahl der umschlossenen Flächen, dass die Länge eines gerichteten Kreises C in G_{skel} Null ist.

Wenn C nur eine einzige Fläche von G_{skel} umschließt, sei v_i der Knoten von G , zu dem diese Fläche gehört. Es seien E_r^+ die Menge der roten Kanten, die von C in der richtigen Richtung durchlaufen werden, E_r^- die Menge der roten Kanten, die von C in der falschen Richtung durchlaufen werden, und analog E_b^+ sowie E_b^- die Mengen der blauen Kanten, die von C in der richtigen beziehungsweise falschen Richtung durchlaufen werden. Außerdem sei C ohne Beschränkung der Allgemeinheit im Uhrzeigersinn orientiert. Dann ist

$$\begin{aligned}
\ell(C) &= \sum_{e \in E_r^+} \ell(e) - \sum_{e \in E_r^-} \ell(e) + \sum_{e \in E_b^+} \ell(e) - \sum_{e \in E_b^-} \ell(e) \\
&= \sum_{e \in \delta_r^+(v_i)} \ell(e) - \sum_{e \in \delta_r^-(v_i)} \ell(e) + \sum_{e \in \delta_b^+(v_i)} \ell(e) - \sum_{e \in \delta_b^-(v_i)} \ell(e) \\
&= \left[\sum_{e \in \delta_r^+(v_i)} x_e - \sum_{e \in \delta_r^-(v_i)} x_e, \sum_{e \in \delta_b^+(v_i)} x_e - \sum_{e \in \delta_b^-(v_i)} x_e \right] \\
&= [x_{v_i} - x_{v_i}, s_i x_{v_i} - s_i x_{v_i}] \\
&= [0, 0].
\end{aligned}$$

Der Kreis C umschlieÙe nun mehr als eine Fläche. Es sei dann f eine innere Fläche von C , deren inzidente Kanten, die auf dem Kreis C liegen, einen nichtleeren Pfad bilden. Der Kreis C_f , der den Rand von f im Uhrzeigersinn durchläuft, sei $e_1, \dots, e_k, \dots, e_l$, wobei e_1, \dots, e_k die Kanten seien, die auf C liegen, und e_{k+1}, \dots, e_l die Kanten, die im Inneren von C liegen. C' sei nun der Kreis, der aus C durch Ersetzen von e_1, \dots, e_k durch $e_l^{-1}, \dots, e_{k+1}^{-1}$ entsteht. Nach der Induktionsvoraussetzung gilt dann $\ell(C_f) = 0$ sowie $\ell(C') = 0$ und damit

$$\begin{aligned}
\ell(C) &= \ell(C') + \sum_{j=1}^k \ell(e_j) - \sum_{j=k+1}^l \ell(e_j^{-1}) \\
&= \ell(C') + \sum_{j=1}^l \ell(e_j) \\
&= \ell(C') + \ell(C_f) = 0 + 0 = 0.
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass die Länge jedes gerichteten Kreises Null ist.

Jetzt sei C ein beliebiger gerichteter Zykel in G_{skel} . Dann können wir die Kantenmenge von C partitionieren in Kantenmengen von gerichteten Kreisen C_1, \dots, C_k und Paare $\{e_1, e_1^{-1}\}, \dots, \{e_l, e_l^{-1}\}$ von entgegengesetzt durchlaufenen Kanten. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\ell(C) &= \sum_{i=1}^k \ell(C_i) + \sum_{i=1}^l (\ell(e_i) - \ell(e_i^{-1})) \\
&= \sum_{i=1}^k 0 + \sum_{i=1}^l 0 = 0.
\end{aligned}$$

Nun sind wir an dem Punkt, dass wir beschreiben können, wie wir die gesuchte Rechteckskontaktendarstellung \mathcal{R} konstruieren, falls $x \geq 0$ ist. Da \mathcal{R} eine planare Einbettung von G_{skel} ist, deren Kanten geradlinig sind, reicht es, wenn wir die Koordinaten der Knoten von G_{skel} angeben. f_0 sei die innere Fläche von G , die zu v_W und v_S inzident ist. Dann definieren wir die Koordinaten eines Knotens f von G_{skel} als die Länge $\ell(P)$ eines beliebigen Kantenzuges P von f_0 nach f in G_{skel} (siehe Abbildung 3.14 (c)).

Als erstes möchten wir nun zeigen, dass diese Einbettung von G_{skel} wohldefiniert ist. Dazu sei f ein Knoten von G_{skel} und P sowie P' seien zwei Kantenzüge von f_0 nach f . Dann sei C der gerichtete Zykel in G_{skel} , der zunächst über P von f_0 nach f verläuft und dann über $(P')^{-1}$ zurück zu f_0 verläuft. Es ist also

$$\ell(P) - \ell(P') = \ell(P) + \ell((P')^{-1}) = \ell(C) = 0$$

beziehungsweise $\ell(P) = \ell(P')$ und somit die Einbettung von f wohldefiniert.

Jetzt wollen wir noch zeigen, dass die Einbettung \mathcal{R} von G_{skel} eine Rechteckskontaktendarstellung von G ist. Auf Grund der Konstruktion der Koordinaten der Knoten von G_{skel} in \mathcal{R} ist klar, dass für alle inneren Knoten v_i von G die zu v_i gehörige Fläche von G_{skel} in \mathcal{R} ein (möglicherweise degeneriertes) Rechteck mit dem Seitenverhältnis s_i ist. Es ist ebenfalls klar, dass die äußeren Kanten von G_{skel} in \mathcal{R} ein Rechteck bilden und dass die Art des Kontakts zweier nichtdegenerierter Flächen von \mathcal{R} , die zu den adjazenten inneren Knoten v und w von G gehören, mit der Farbe und Orientierung der Kante $\{v, w\}$ in T verträglich ist. Wir müssen also nur noch zeigen, dass \mathcal{R} kreuzungsfrei ist.

Nach Proposition 3.1 gibt es eine nichtdegenerierte Rechteckskontaktendarstellung \mathcal{R}' mit der transversalen Struktur T von G . Durch Skalierung können wir erreichen, dass die Höhe und die Breite von \mathcal{R}' der Höhe und der Breite von \mathcal{R} entsprechen. $\tilde{x}(\mathcal{R}) \geq 0$ sei der Vektor der Kantenlängen von \mathcal{R} und $\tilde{x}(\mathcal{R}') > 0$ der Vektor der Kantenlängen von \mathcal{R}' . Dann sind $\tilde{x}(\mathcal{R})$ sowie $\tilde{x}(\mathcal{R}')$ Lösungen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} \sum_{e \in \delta_b^-(v_i)} x_e &= \sum_{e \in \delta_b^+(v_i)} x_e, & i = 1, \dots, n, \\ \sum_{e \in \delta_r^-(v_i)} x_e &= \sum_{e \in \delta_r^+(v_i)} x_e, & i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Dann ist aber für alle $0 \leq t \leq 1$ auch $(1-t)\tilde{x}(\mathcal{R}') + t\tilde{x}(\mathcal{R})$ eine Lösung dieses Gleichungssystems und wir können mit obiger Konstruktion für alle $0 \leq t \leq 1$ eine planare Einbettung \mathcal{R}_t von G_{skel} konstruieren, so dass $\tilde{x}(\mathcal{R}_t) = (1-t)\tilde{x}(\mathcal{R}') + t\tilde{x}(\mathcal{R})$ der Vektor der Kantenlängen von \mathcal{R}_t ist, alle inneren Flächen von G_{skel} in \mathcal{R}_t Rechtecke sind und die Kontakte von benachbarten Flächen in \mathcal{R}_t mit T verträglich sind.

Wir werden nun zeigen, dass es kein $0 \leq t' < 1$ gibt, so dass ein Knoten v von G_{skel} in $\mathcal{R}_{t'}$ auf einer Kante e von G_{skel} liegt, die nicht inzident zu v ist. Dazu nehmen wir an, dass doch ein solches $0 \leq t' < 1$ existiert und führen diese Annahme zu einem Widerspruch. Da die Menge dieser t' abgeschlossen ist, können wir dann zusätzlich annehmen, dass t' minimal mit dieser Eigenschaft ist. Wir unterscheiden nun zwei Fälle. Im ersten Fall liegt v echt zwischen den beiden Endknoten von e . Dann seien f_1 und f_2

die beiden zu e inzidenten Flächen von G_{skel} . Da $\tilde{x}(\mathcal{R}_{t'}) > 0$ ist, kann v auf Grund der Konstruktion von $\mathcal{R}_{t'}$ nicht inzident zu f_1 oder f_2 sein. Das wiederum bedeutet aber, dass es wegen der Stetigkeit von $\tilde{x}(\mathcal{R}_t)$ ein $0 \leq t'' < t'$ geben muss, so dass v in $\mathcal{R}_{t''}$ auf dem Rand von f_1 oder f_2 liegt, im Widerspruch zur Minimalität von t' . Im zweiten Fall liegt v auf einem Endknoten w von e . Dann seien f_1, f_2 und f_3 die drei zu w inzidenten Flächen von G_{skel} . Auch in diesem Fall muss es dann im Widerspruch zur Minimalität von t' ein $0 \leq t'' < t'$ geben, so dass v in $\mathcal{R}_{t''}$ auf dem Rand von f_1, f_2 oder f_3 liegt. Die Annahme, dass ein solches t' existiert, ist also falsch. Damit folgt aus der Stetigkeit von $\tilde{x}(\mathcal{R}_t)$ in t , dass in $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1$ in einem Schnittpunkt zweier Kanten e_1 und e_2 von G_{skel} , die keinen gemeinsamen Endknoten besitzen, immer einer der Endknoten von e_1 oder e_2 liegt. Da wir solche Berührungen als Degenerationen interpretieren, schließt dies den Beweis ab. \square

3.2.2 Der Algorithmus

Definition 3.12. Der Graph G sei eine irreduzible innere Triangulierung des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W) , T eine transversale Struktur auf G und $s \in \mathbb{R}_{>0}^n$ eine Seitenverhältnisvorgabe für G . Außerdem sei x die eindeutige Lösung des Gleichungssystems $A_T(s)x = b$. Wir nennen eine Kante e von G *nichtnegativ*, wenn $x_e \geq 0$ ist, und *negativ*, falls $x_e < 0$ ist. Es sei weiter Q die zu T gehörige α_4 -Orientierung des Winkelgraphen von G . Da die inneren Flächen von Q zu den Kanten von G korrespondieren, können wir die Bezeichnungen *nichtnegativ* und *negativ* auch für diese übernehmen. Eine Kante von Q heißt dann eine *Wechselkante (bezüglich s)*, wenn sie zwischen einer nichtnegativen und einer negativen Fläche liegt.

Lemma 3.10. *Der Graph G sei eine irreduzible innere Triangulierung des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W) , T eine transversale Struktur auf G und $s \in \mathbb{R}_{>0}^n$ eine Seitenverhältnisvorgabe für G . Ferner sei Q die zu T gehörige α_4 -Orientierung des Winkelgraphen von G . Die Menge der Wechselkanten bezüglich s von Q ist dann eine kantendisjunkte Vereinigung von gerichteten Zykeln.*

Beweis. Es sei E_1 die Menge der Wechselkanten, die von einem Knoten aus $V(G)$ zu einem Knoten aus $F(G)$ führen, und E_2 sei die Menge der Wechselkanten, die umgekehrt von einem Knoten aus $F(G)$ zu einem Knoten aus $V(G)$ führen. Wir werden nun zwei injektive Abbildungen $\phi : E_1 \rightarrow E_2$ und $\psi : E_2 \rightarrow E_1$ angeben, die zusätzlich die Eigenschaft erfüllen, dass für alle $e \in E_1 \cup E_2$ der Endknoten von $\phi(e)$ beziehungsweise von $\psi(e)$ mit dem Startknoten von e übereinstimmt. Damit folgt dann, dass ϕ und ψ Bijektionen sind und somit jeder Knoten von Q genauso viele eingehende wie ausgehende Wechselkanten besitzt, so dass diese in kantendisjunkte Zyklen partitioniert werden können.

Es sei $e = (v, f) \in E_1$. Wir nehmen zunächst an, dass $x_v \geq 0$ ist. Wir wandern nun von e ausgehend in die Richtung um v herum, in der e von einer negativen Fläche benachbart ist. Wir erhalten so eine alternierende Folge $e = e_1, f_1, e_2, f_2, \dots$ von Kanten und von Flächen von Q . Es sei k der kleinste Index, für den f_k nichtnegativ ist. Es sei weiter $l \geq 2$ der kleinste Index, für den e_l eine ausgehende Kante von v

ist. Dann ist $l > k$, da ansonsten die Summe der Lösungswerte der zu f_1, \dots, f_{l-1} korrespondierenden Kanten von G negativ wäre, im Widerspruch dazu, dass $x_v \geq 0$ ist. Also können wir $\phi(e) := e_k$ definieren (siehe Abbildung 3.15 (a)). Wenn $x_v < 0$ ist, gehen wir analog vor, indem wir in die andere Richtung um den Knoten v wandern.

Nun möchten wir noch zeigen, dass ϕ injektiv ist. Dazu sei $\tilde{e} \in \phi(E_1)$ und $e \in \phi^{-1}(\tilde{e})$. Falls $x_v \geq 0$ ist, muss e dann die erste Wechselkante sein, die wir erreichen, wenn wir von \tilde{e} ausgehend in die Richtung um v herum wandern, in der \tilde{e} von einer negativen Fläche benachbart ist. Falls $x_v < 0$ ist, muss e dann die erste Wechselkante sein, die wir erreichen, wenn wir von \tilde{e} ausgehend in die Richtung um v herum wandern, in der \tilde{e} von einer nichtnegativen Fläche benachbart ist. e ist also eindeutig.

Es sei nun $e = (f, v) \in E_2$. f ist zu zwei eingehenden Kanten e_1 und e_2 sowie der ausgehenden Kante e inzident. Da e eine Wechselkante ist, ist e zu einer nichtnegativen und einer negativen Fläche inzident. Es ist also genau eine der beiden Kanten e_1 und e_2 eine Wechselkante und wir wählen diese als $\psi(e)$ (siehe Abbildung 3.15 (b)).

Die Injektivität von ψ folgt sofort, da zu einer Kante $\tilde{e} = (\tilde{v}, f) \in \psi(E_2)$ die einzige ausgehende Kante von f das eindeutige Urbild von \tilde{e} unter ψ ist. \square

Nun sind wir in der Lage, einen Algorithmus zum Berechnen einer Rechteckskontakt-darstellung mit vorgegebenem Seitenverhältnisvektor zu formulieren:

Algorithmus 3.1 Berechnung einer Rechteckskontakt-darstellung mit vorgegebenem Seitenverhältnisvektor

Input: eine irreduzible innere Triangulierung G des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W) und eine Seitenverhältnisvorgabe $s \in \mathbb{R}_{>0}^n$ für G

Output: eine Rechteckskontakt-darstellung \mathcal{R} von G , so dass s ein Seitenverhältnisvektor von \mathcal{R} ist

$T \leftarrow$ beliebige transversale Struktur auf G

$Q \leftarrow \alpha_4$ -Orientierung des Winkelgraphen von G , die zu T gehört

$x \leftarrow$ Lösung des LGS $A_T(s)x = b$

while $x \not\geq 0$ **do**

 ändere in Q die Orientierung aller Wechselkanten bezüglich s

$T \leftarrow$ transversale Struktur, die zu Q gehört

$x \leftarrow$ Lösung des LGS $A_T(s)x = b$

end while

berechne aus x eine Rechteckszerlegung \mathcal{R}

return \mathcal{R}

Dieser Algorithmus wird in [Pic11] in dem Spezialfall untersucht, in dem die Seitenverhältnisvorgabe $s = [1, \dots, 1]$ ist, also ein Squaring gesucht wird. Die Korrektheit dieses Algorithmus konnte allerdings bislang weder bewiesen, noch widerlegt werden. Denn auf der einen Seite terminiert dieser Algorithmus in allen praktischen Test, die in [Pic11] beschrieben werden, nach nur wenigen Iterationen und auf der anderen Seite

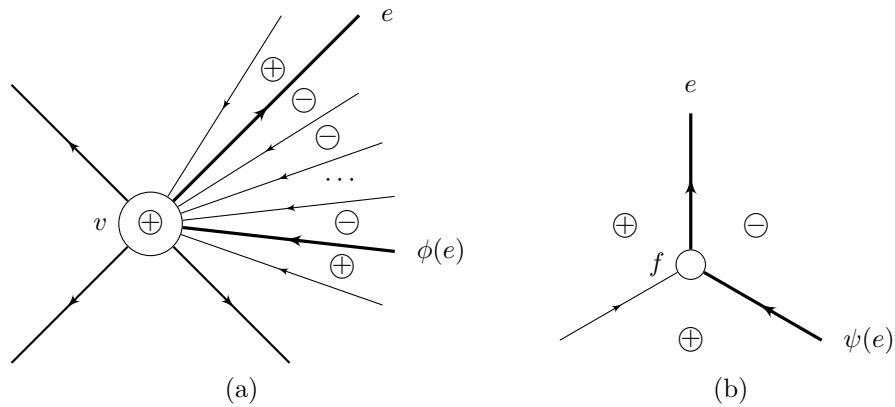


Abbildung 3.15: Die Abbildungen ϕ und ψ aus dem Beweis von Lemma 3.10

ist unklar, ob der Algorithmus im Allgemeinen überhaupt terminiert und nicht in eine Endlosschleife geraten kann.

Zur Laufzeit von Algorithmus 3.1 lässt sich Folgendes feststellen: Das initiale Berechnen einer beliebigen transversalen Struktur ist nach Theorem 3.2 in Linearzeit möglich. Das Lösen des Gleichungssystems ist selbst unter Verwendung exakter Arithmetik zum Beispiel mit dem Bareiss-Algorithmus in polynomialer Laufzeit realisierbar. Auch das abschließende Berechnen der Rechteckszerlegung kann nach Proposition 3.9 in Linearzeit umgesetzt werden. Somit ist die Laufzeit des Algorithmus genau dann polynomial, wenn die Anzahl der Iterationen polynomial ist.

3.3 Existenzbeweis

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, Theorem 3.5 zu beweisen. Dabei werden wir eine Technik verwenden, die von Algorithmus 3.1 abgeleitet ist. Da der Beweis jedoch nicht rein konstruktiv ist, ergibt sich aus dem Beweis kein alternativer Algorithmus zur Berechnung der gesuchten Rechteckskontaktdarstellung.

3.3.1 Dekomposition

Wir werden zunächst zeigen, wie wir eine Instanz des Problems in mehrere Teilinstanzen zerlegen können, so dass wir das Problem am Ende nur noch für eine kleinere Graphenklasse lösen müssen.

Definition 3.13. Der Graph G sei eine irreduzible innere Triangulierung des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W) . Ein trennender 4-Kreis in G heißt *elementar*, wenn dieser genau einen Knoten umschließt. Wenn alle trennenden 4-Kreise in G elementar sind, nennen wir G selbst *elementar*. Einen Knoten in G , der in einem elementaren trennenden 4-Kreis liegt, nennen wir *umschlossen*.

Ein umschlossener Knoten v in einer irreduziblen inneren Triangulierung G des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W) ist in G zu genau vier Kanten inzident. In einer transversalen

Struktur auf G ist genau eine dieser Kanten rot und ausgehend, genau eine blau und ausgehend, genau eine rot und eingehend sowie genau eine blau und eingehend. Es sei \mathcal{R} eine nichtdegenerierte Rechteckskontaktdarstellung von G . Das Seitenverhältnis des Teilrechtecks von \mathcal{R} , das zu v gehört, haben wir als den Quotienten aus der Länge der Kanten von \mathcal{R} , die zu den beiden blauen Kanten gehören, und der Länge der Kanten von \mathcal{R} definiert, die zu den beiden roten Kanten gehören.

Wir führen nun *markierte* umschlossene Knoten ein, bei denen das Seitenverhältnis des zugehörigen Teilrechtecks anders definiert ist. Bei einem markierten umschlossenen Knoten v legen wir fest, welche Kante $e_N(v)$ der vier inzidenten Kanten von v für die Berechnung des Seitenverhältnisses als rote ausgehende Kante betrachtet wird. $e_O(v)$, $e_S(v)$ und $e_W(v)$ seien dann im Uhrzeigersinn auf $e_N(v)$ folgend die anderen zu v inzidenten Kanten. Das heißt aber nicht, dass $e_N(v)$ in der transversalen Struktur, die zu \mathcal{R} gehört, tatsächlich rot und ausgehend sein muss. Das Seitenverhältnis des Teilrechtecks von \mathcal{R} , das zu v gehört, ist also als der Quotient aus der Länge der Kanten von \mathcal{R} , die zu $e_O(v)$ und $e_W(v)$ gehören, und der Länge der Kanten von \mathcal{R} definiert, die zu $e_N(v)$ und $e_S(v)$ gehören.

Von jetzt an werden wir immer davon ausgehen, dass eine irreduzible innere Triangulierung des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W) markierte umschlossene Knoten besitzen kann.

Wir werden nun eine schwächere Version von Theorem 3.5 formulieren, indem wir die Aussage von beliebigen auf elementare irreduzible innere Triangulierungen des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W) einschränken. Dann werden wir zeigen, dass sich Theorem 3.5 auf diese schwächere Version zurückführen lässt, und unser Ziel für den restlichen Abschnitt wird es anschließend sein, die schwächere Version zu beweisen.

Proposition 3.11. *Es sei G eine elementare irreduzible innere Triangulierung des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W) und v_1, \dots, v_n seien die inneren Knoten von G . Weiter sei $s \in \mathbb{R}_{>0}^n$ eine Seitenverhältnisvorgabe. Dann gibt es eine (möglicherweise degenerierte) Rechteckskontaktdarstellung \mathcal{R} von G , so dass s ein Seitenverhältnisvektor von \mathcal{R} ist.*

Beweis von Theorem 3.5 mit Proposition 3.11. Wir beweisen die Behauptung per vollständiger Induktion über die Anzahl der nichtelementaren trennenden 4-Kreise von G .

Falls G keinen nichtelementaren trennenden 4-Kreis besitzt, ist G elementar und die Aussage entspricht der von Proposition 3.11.

Nun besitze G einen nichtelementaren trennenden 4-Kreis C . Die Knoten auf dem Kreis C seien im Uhrzeigersinn v_{c_1}, \dots, v_{c_4} , die Knoten, die im Inneren von C liegen, seien v_{i_1}, \dots, v_{i_k} und die inneren Knoten von G , die nicht im Inneren von C liegen, seien $v_{o_1}, \dots, v_{o_{n-k}}$. Wir definieren G_{out} als den Graphen, der aus G durch die Kontraktion der Knoten v_{i_1}, \dots, v_{i_k} zu einem einzigen Knoten v^* entsteht, und G_{in} als den Teilgraphen von G , der den Kreis C und dessen Inneres enthält. In G_{in} labeln wir den Knoten v_{c_1} als v'_N , den Knoten v_{c_2} als v'_O , den Knoten v_{c_3} als v'_S und den Knoten v_{c_4} als v'_W . Außerdem markieren wir in G_{out} den umschlossenen Knoten v^* und setzen $e_N(v^*) := \{v^*, v_{c_1}\}$. G_{out} und G_{in} sind dann wieder irreduzible innere Triangulierungen des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W) beziehungsweise des Vierecks (v'_N, v'_O, v'_S, v'_W) , die jeweils weniger nichtelementare trennende 4-Kreise als G besitzen.

Wir definieren die Seitenverhältnisvorgabe $s_{\text{in}} := [s_{i_1}, \dots, s_{i_k}] \in \mathbb{R}_{>0}^k$. Nach der Induktionsvoraussetzung gibt es dann eine Rechteckskontaktdarstellung \mathcal{R}_{in} von G_{in} , so dass s_{in} ein Seitenverhältnisvektor von \mathcal{R}_{in} ist. s^* sei das Seitenverhältnis von \mathcal{R}_{in} , also der Quotient aus der Höhe und der Breite von \mathcal{R}_{in} . Wir definieren dann die Seitenverhältnisvorgabe $s_{\text{out}} := [s_{o_1}, \dots, s_{o_{n-k}}, s^*] \in \mathbb{R}_{>0}^{n-k+1}$. Nach der Induktionsvoraussetzung gibt es dann auch eine Rechteckskontaktdarstellung \mathcal{R}_{out} von G_{out} , so dass s_{out} ein Seitenverhältnisvektor von \mathcal{R}_{out} ist.

Falls das Teilrechteck R^* von \mathcal{R}_{out} , das zu v^* gehört, degeneriert ist, ist \mathcal{R}_{out} auch eine Rechteckskontaktdarstellung von G und s ein Seitenverhältnisvektor von \mathcal{R}_{out} . In diesem Fall sind wir also fertig.

Andernfalls drehen wir \mathcal{R}_{in} so, dass die Seite, die eigentlich oben liegt, anschließend auf der Seite liegt, auf der in R^* die Kante liegt, die zu $e_N(v^*)$ gehört. Da wir v^* in G_{out} markiert haben, haben \mathcal{R}_{in} und R^* dann das gleiche natürliche Seitenverhältnis, das heißt, der Quotient aus der Höhe und der Breite ist für beide gleich. Dann skalieren wir \mathcal{R}_{in} so, dass es die gleiche Größe wie R^* hat. Schließlich ersetzen wir in \mathcal{R}_{out} das Teilrechteck R^* durch \mathcal{R}_{in} . Die auf diese Weise konstruierte Rechteckszerlegung \mathcal{R} ist nach Konstruktion eine Rechteckskontaktdarstellung von G und s ist ein Seitenverhältnisvektor von \mathcal{R} . Damit sind wir auch in diesem Fall fertig.

Abbildung 3.16 zeigt ein Beispiel für einen solchen Dekompositionsschritt. □

3.3.2 Zulässige Seitenverhältnisvektoren für eine feste transversale Struktur

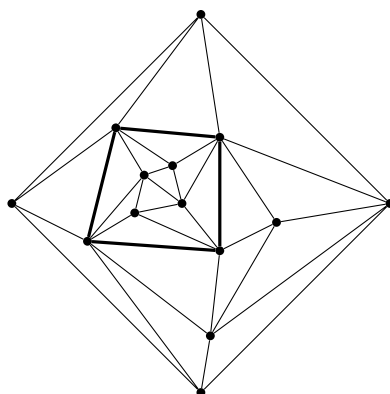
Definition 3.14. Der Graph G sei eine irreduzible innere Triangulierung des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W) mit den inneren Knoten v_1, \dots, v_n und T eine transversale Struktur auf G . Dann ist die Menge $\mathcal{S}_T \subseteq \mathbb{R}_{>0}^n$ definiert als die Menge der Seitenverhältnisvektoren von nichtdegenerierten Rechteckskontaktdarstellungen von G , deren zugehörige transversalen Struktur T ist. Es ist also genau dann $s \in \mathcal{S}_T$, wenn es eine nichtdegenerierte Rechteckskontaktdarstellung \mathcal{R} von G mit der transversalen Struktur T und dem Seitenverhältnisvektor s gibt. Weiter ist die Menge $\bar{\mathcal{S}}_T \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}^n$ definiert als die Menge der Seitenverhältnisvektoren von (möglicherweise degenerierten) Rechteckskontaktdarstellungen \mathcal{R} von G , so dass T eine transversalen Struktur von \mathcal{R} ist.

Lemma 3.12. *Der Graph G sei eine irreduzible innere Triangulierung des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W) mit den inneren Knoten v_1, \dots, v_n und T eine transversale Struktur auf G . Weiter sei $m := 4n + 5$. Dann gibt es Polynome p_1, \dots, p_m in den Variablen s_1, \dots, s_n mit $\deg_{s_i} p_j \leq 1$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und alle $j \in \{1, \dots, m\}$, so dass*

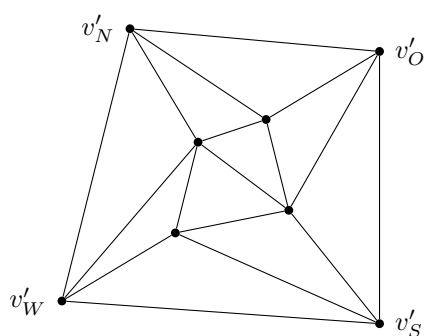
$$\mathcal{S}_T = \{s \in \mathbb{R}_{>0}^n : p_j(s) > 0 \text{ für } j = 1, \dots, m\}$$

und

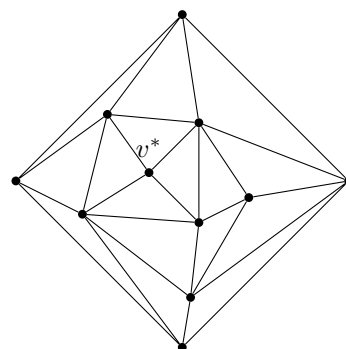
$$\bar{\mathcal{S}}_T = \{s \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n : p_j(s) \geq 0 \text{ für } j = 1, \dots, m\}.$$



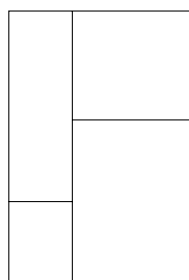
(a) Der Graph G



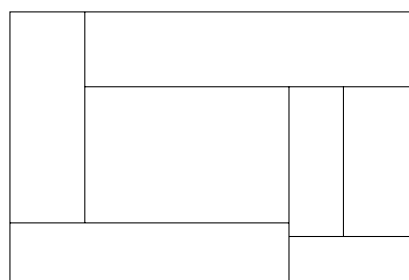
(b) Der Graph G_{in}



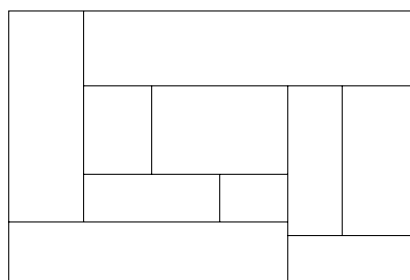
(c) Der Graph G_{out}



(d) Die Rechteckszerlegung \mathcal{R}_{in}



(e) Die Rechteckszerlegung \mathcal{R}_{out}



(f) Die Rechteckszerlegung \mathcal{R}

Abbildung 3.16: Die Dekomposition, die Theorem 3.5 auf Proposition 3.11 zurückführt

Beweis. Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $A_T(s)x = b$ in Abhängigkeit der Seitenverhältnisvorgabe $s \in \mathbb{R}_{>0}^n$. Den nach Proposition 3.7 existierenden eindeutigen Lösungsvektor nennen wir $x(s)$. Es gilt also für alle $s \in \mathbb{R}_{>0}^n$ die Gleichung $A_T(s)x(s) = b$.

Es ist $m = 4n + 5$ gerade die Anzahl der Spalten und damit auch der Zeilen von $A_T(s)$. Für $i = 1, \dots, m$ sei $A_T^{(i)}(s)$ die Matrix, die aus $A_T(s)$ entsteht, indem die i -te Spalte durch b ersetzt wird. Nach der Cramerschen Regel gilt dann für $i = 1, \dots, m$

$$x_i(s) = \frac{\det A_T^{(i)}(s)}{\det A_T(s)}.$$

Da das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist, gilt dabei $\det A_T(s) \neq 0$. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $\det A_T(s) > 0$ ist.

Es sei nun $j \in \{1, \dots, m\}$. Falls sich die j -te Spalte von $A_T(s)$ auf das Teilrechteck R_k , $k \in \{1, \dots, n\}$, bezieht, sind die Einträge in dieser Spalte entweder 0, 1 oder s_k , also in jedem Fall Polynome p in s_1, \dots, s_n mit $\deg_{s_k}(p) \leq 1$ und $\deg_{s_l}(p) = 0$ für alle $l \in \{1, \dots, k-1, k+1, \dots, n\}$. Falls sich die j -te Spalte von $A_T(s)$ hingegen auf eine Kante bezieht, sind die Einträge in dieser Spalte entweder 0 oder 1, also konstant in allen s_l , $l = 1, \dots, n$. Dies gilt dann auch für die Matrix $A_T^{(i)}(s)$, $i \in \{1, \dots, m\}$. Daher ist $\det A_T^{(i)}(s)$ ein Polynom in den Variablen s_1, \dots, s_n mit $\deg_{s_l}(\det A_T^{(i)}(s)) \leq 1$ für $l = 1, \dots, n$.

Wir setzen nun $p_i := \det A_T^{(i)}(s)$, $i = 1, \dots, m$. Der Rest folgt dann mit Proposition 3.9. \square

Korollar 3.13. *Es sei T eine transversale Struktur. Dann ist \mathcal{S}_T eine offene und $\bar{\mathcal{S}}_T$ eine abgeschlossene Menge.*

Da wir uns später entlang einer Geraden von einem Startseitenverhältnisvektor zum Zielseitenverhältnisvektor bewegen möchten, untersuchen wir nun die Einschränkung der Mengen \mathcal{S}_T und $\bar{\mathcal{S}}_T$ auf eine solche Gerade. Dazu werden wir allerdings zunächst ein technisches Lemma beweisen.

Lemma 3.14. *Für $i = 1, \dots, n$ sei $\mathcal{I}_i = \{I_1^{(i)}, \dots, I_{k_i}^{(i)}\}$ eine Menge von $k_i \geq 1$ paarweise disjunkten offenen Intervallen. Dann ist die Menge*

$$\bigcap_{i=1, \dots, n} \left(I_1^{(i)} \cup \dots \cup I_{k_i}^{(i)} \right)$$

eine disjunkte Vereinigung von höchstens $k_1 + \dots + k_n - n + 1$ offenen Intervallen.

Beweis. Zunächst ist klar, dass

$$\bigcap_{i=1, \dots, n} \left(I_1^{(i)} \cup \dots \cup I_{k_i}^{(i)} \right)$$

eine disjunkte Vereinigung von offenen Intervallen $J_1, \dots, J_{k'}$ ist. Man sieht auch leicht, dass für $j = 1, \dots, k'$ die hintere Intervallgrenze von J_j , die auch ∞ sein kann, die

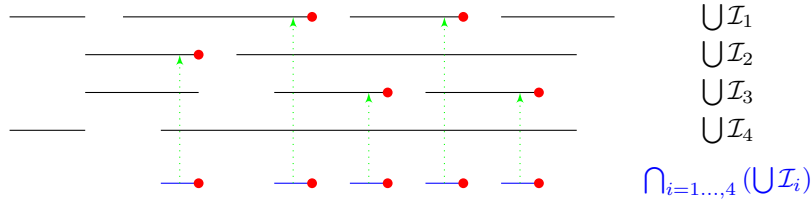


Abbildung 3.17: Die Abbildung ϕ aus dem Beweis von Lemma 3.14

hintere Intervallgrenze eines Intervalls $I_l^{(i)}$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$ und ein $l \in \{1, \dots, k_i\}$ sein muss. Die Abbildung $\phi : \{J_1, \dots, J_{k'}\} \rightarrow J_1 \cup \dots \cup J_n$ ordne jedem Intervall J_j ein solches Intervall $I_l^{(i)}$ zu (siehe Abbildung 3.17). ϕ ist also im Allgemeinen nicht eindeutig. Da es keine zwei verschiedenen Intervalle J_j und $J_{j'}$, $j, j' \in \{1, \dots, k'\}$, mit der gleichen hinteren Intervallgrenze geben kann, ist ϕ aber in jedem Fall injektiv. Für $i = 1, \dots, n$ sei jetzt $I_{m_i}^{(i)}$ das Intervall mit der größten rechten Intervallgrenze unter allen Intervallen aus \mathcal{I}_i . Dann ist auf Grund der Konstruktion von ϕ aber

$$|\phi(\{J_1, \dots, J_{k'}\}) \cap \{I_{m_1}^{(1)}, \dots, I_{m_n}^{(n)}\}| \leq 1.$$

Zusammen mit der Injektivität von ϕ erhalten wir also

$$k' \leq (k_1 + \dots + k_n) - (n - 1).$$

□

Lemma 3.15. *Der Graph G sei eine irreduzible innere Triangulierung des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W) mit den inneren Knoten v_1, \dots, v_n und T eine transversale Struktur auf G . Weiter seien $r_0, r_1 \in \mathbb{R}_{>0}^n$ zwei verschiedene Seitenverhältnisvorgaben und $r_t := (1 - t)r_0 + tr_1$ für alle $0 < t < 1$. Dann gibt es offene Intervalle I_1, \dots, I_k mit $k \leq (4n + 5)\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, so dass*

$$I_1 \cup \dots \cup I_k = \{t \in \mathbb{R} : 0 < t < 1, r_t \in \mathcal{S}_T\}$$

und

$$\bar{I}_1 \cup \dots \cup \bar{I}_k \subseteq \{t \in \mathbb{R} : 0 \leq t \leq 1, r_t \in \bar{\mathcal{S}}_T\}.$$

Beweis. Es sei $0 < t < 1$ und wir setzen $m := 4n + 5$. Nach Lemma 3.12 gibt es dann Polynome p_1, \dots, p_m in den Variablen s_1, \dots, s_n mit $\deg_{s_i} p_j \leq 1$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und alle $j \in \{1, \dots, m\}$, so dass genau dann $s_t \in \mathcal{S}_T$ ist, wenn für alle $j \in \{1, \dots, m\}$ die Ungleichung $p_j(r_t) > 0$ erfüllt ist.

Es sei nun $j \in \{1, \dots, m\}$. $p_j(r_t)$ ist dann ein Polynom in t mit $\deg_t(p_j(r_t)) \leq n$, da die einzelnen Komponenten von r_t jeweils Polynome vom Grad ≤ 1 in t sind. $p_j(r_t)$ hat also höchstens n reelle Nullstellen. Da Polynome zudem stetig sind, gibt es offene Intervalle $J_1^{(j)}, \dots, J_{k_j}^{(j)}$, so dass für alle $0 < t < 1$ genau dann $p_j(r_t) > 0$ ist, wenn $t \in J_1^{(j)} \cup \dots \cup J_{k_j}^{(j)}$ ist. Diese Intervalle seien aufsteigend angeordnet, das heißt,

aus $a \in J_\alpha^{(j)}$, $b \in J_\beta^{(j)}$ sowie $a < b$ folge $\alpha \leq \beta$. Es sei jetzt $k \in \{1, \dots, k_j - 1\}$. Zwischen $J_k^{(j)}$ und $J_{k+1}^{(j)}$ liegen dann zwei Nullstellen von $p_j(r_t)$ mit ungerader Vielfachheit oder eine Nullstelle von $p_j(r_t)$ mit gerader Vielfachheit. Damit folgt also $k_j \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.

Die Aussage folgt nun daraus, dass nach Lemma 3.14 die Menge

$$\bigcap_{j=1, \dots, m} (J_1^{(j)} \cup \dots \cup J_{k_j}^{(j)})$$

in höchstens $k_1 + \dots + k_m - m + 1 \leq m \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ offene Intervalle zerfällt. \square

Eine Menge $\{(1-t)s_0 + ts_1 : 0 \leq t \leq 1\}$, mit $s_0, s_1 \in \mathbb{R}^n$, $s_0 \neq s_1$, werden wir später als eine *Gerade von Seitenverhältnisvektoren* bezeichnen.

3.3.3 Benachbarte transversale Strukturen

Wir werden für den Beweis eine Variante von Lemma 3.10 benötigen, die sich auf den Spezialfall einer nichtnegativen Lösung des Gleichungssystems $A_T(s)x = b$ bezieht.

Definition 3.15. Der Graph G sei eine irreduzible innere Triangulierung des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W) , T eine transversale Struktur auf G und $s \in \mathbb{R}_{>0}^n$ eine Seitenverhältnisvorgabe für G . Außerdem sei $A_T(s)x = b$ mit $x \geq 0$. Wir nennen eine Kante e von G *positiv*, wenn $x_e > 0$ ist, und *degeneriert*, falls $x_e = 0$ ist. Es sei weiter Q die zu T gehörige α_4 -Orientierung des Winkelgraphen von G . Da die inneren Flächen von Q zu den Kanten von G korrespondieren, können wir die Bezeichnungen *positiv* und *degeneriert* auch für diese übernehmen. Eine Kante von Q heißt dann eine *schwache Wechselkante* (bezüglich s), wenn sie zwischen einer positiven und einer degenerierten Fläche liegt.

Lemma 3.16. *Der Graph G sei eine irreduzible innere Triangulierung des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W) , T eine transversale Struktur auf G und $s \in \mathbb{R}_{>0}^n$ eine Seitenverhältnisvorgabe für G . Q sei die zu T gehörige α_4 -Orientierung des Winkelgraphen von G . Weiter sei $A_T(s)x = b$ mit $x \geq 0$. Die Menge der schwachen Wechselkanten bezüglich s von Q ist dann eine kantendisjunkte Vereinigung von essentiellen Kreisen im Winkelgraphen. Dabei haben die essentiellen Kreise C jeweils eine der beiden folgenden Gestalten:*

- C ist der Rand einer inneren Fläche von Q und hat damit die Länge 4.
- C hat die Länge 8. Es gibt keine Kante, die von einem schwarzen Knoten auf C in das Innere von C führt. Die inzidente Kante der weißen Knoten auf C , die nicht auf C liegt, liegt jeweils im Inneren von C .

In [Fus10] wird gezeigt, dass alle essentiellen Kreise in einer α_4 -Orientierung eine der beiden genannten Formen haben. Der im Folgenden dargestellte Beweis orientiert sich an dem Beweis dieser Aussage in [Fus10].

Beweis. Dass die Knoten von Q jeweils genauso viele eingehende wie ausgehende schwache Wechselkanten besitzen und daher die schwachen Wechselkanten in kantendisjunkte Zykel partitioniert werden können, folgt analog zum Beweis von Lemma 3.10. Diesmal legen wir allerdings fest, wie wir die schwachen Wechselkanten in gerichtete Zykel partitionieren, indem wir sagen, dass eine Kante e , die von einem schwarzen zu einem weißen Knoten führt, zu demselben Zykel gehört wie $\phi(e)$ und auf diesem Zykel auch direkt auf $\phi(e)$ folgt sowie eine Kante e' , die von einem weißen zu einem schwarzen Knoten führt, zu demselben Zykel gehört wie $\psi(e')$ und auf diesem auch direkt auf $\psi(e')$ folgt. Wir nehmen zunächst an, dass ein auf diese Weise konstruierter Zykel C ein Kreis ist, und werden später zeigen, dass dies auch tatsächlich immer der Fall ist. Auf Grund der Konstruktion von C grenzen dann entweder im Inneren nur degenerierte und im Äußeren nur positive Flächen an C oder umgekehrt. Wir können daher von einer positiven und einer degenerierten Seite von C sprechen.

Wir möchten nun zeigen, dass C essentiell ist, indem wir zeigen, dass es keine Kante gibt, die von einem Knoten auf C in das Innere von C führt. Da weiße Knoten genau eine ausgehende Kante besitzen und diese bei weißen Knoten, die auf C liegen, zu C gehört, kann es keine Kante geben, die von einem weißen Knoten, der auf C liegt, in das Innere von C führt. Schwarze Knoten besitzen genau vier ausgehende Kanten. Bei schwarzen Knoten, die auf C liegen, gehört eine dieser Kanten zu C und die anderen drei führen in die positive Seite von C . Wir müssen also zeigen, dass die positive Seite im Äußeren von C liegt.

Wir nehmen nun an, dass die positive Seite im Inneren von C liegt, und führen diese Annahme zu einem Widerspruch. Es sei $2k$ die Länge von C . Es liegen also k schwarze und k weiße Knoten auf C . l sei die Anzahl der zu weißen Knoten auf C inzidenten Kanten, die im Inneren von C liegen. Da jeder weiße Knoten auf C höchstens eine solche inzidente Kante besitzen kann, ist dann $l \leq k$. Weiter seien n_\bullet , n_\circ sowie n_e die Anzahlen der schwarzen Knoten, der weißen Knoten und der Kanten, die innerhalb von C liegen. Durch Hinzufügen von $k - 2$ Kanten in der äußeren Fläche können wir C zu einer Quadrangulierung G' erweitern. n'_v , n'_e und n'_f seien die Anzahlen der Knoten, der Kanten und der Flächen von G' . Dann ist $n'_v = n_\bullet + n_\circ + 2k$ sowie $n'_e = n_e + 2k + (k - 2)$. Nach der Eulerschen Formel ist außerdem $n'_v - n'_e + n'_f = 2$ und durch doppeltes Abzählen der Paare von inzidenten Kanten und Flächen von G' erhalten wir $2n'_e = 4n'_f$. Damit erhalten wir insgesamt

$$n_e = 2(n_\bullet + n_\circ) + k - 2. \quad (3.1)$$

Indem wir die Kanten, die innerhalb von C liegen, über deren inzidente weiße Knoten abzählen, erhalten wir außerdem

$$n_e = 3n_\circ + l. \quad (3.2)$$

Und indem wir dieselben Kanten über deren Startknoten abzählen, erhalten wir

$$n_e = 4n_\bullet + n_\circ + 3k. \quad (3.3)$$

Wir berechnen nun die Differenz $2 \cdot (3.1) - (3.2) - (3.3)$ und erhalten $-k - l - 4 = 0$, im Widerspruch zu $k, l \geq 0$. Die Annahme, dass die positive Seite im Inneren von C liegt, ist also falsch und damit muss die positive Seite im Äußeren von C liegen.

Es bleibt zu zeigen, dass C ein Kreis ist. Dazu nehmen wir an, dass C kein Kreis ist, und führen diese Annahme zu einem Widerspruch. Es sei dann C' ein Teilzykel von C , der ein Kreis ist, und v^* der Knoten auf C' , an dem der restliche Teil von C abgeschnitten wurde. Da v^* mindestens vier inzidente Kanten auf C hat, der Grad von weißen Knoten allerdings nur drei ist, muss v^* ein schwarzer Knoten sein. Es sei e die Kante auf C' , die in v^* beginnt. Dann sind alle zu v^* inzidenten Flächen, die zwischen $\phi(e)$ und e liegen, degeneriert und damit folgt, dass die degenerierte Seite von C' außerhalb von C' liegt und somit die positive Seite innerhalb von C' liegt. Wenn wir die Bezeichnungen k, l, n_\bullet, n_\circ sowie n_e von oben für C' übernehmen, gelten die Gleichungen (3.1) und (3.2) auch in diesem Fall wieder. Da es Kanten geben kann, die von v^* in das Äußere von C' führen, gilt anstelle von (3.3) die Ungleichung

$$n_e \geq 4n_\bullet + n_\circ + 3(k - 1). \quad (3.4)$$

Indem wir die Differenz $2 \cdot (3.1) - (3.2) - (3.4)$ berechnen, erhalten wir dieses Mal $-k - l - 1 \geq 0$, wieder im Widerspruch zu $k, l \geq 0$. C ist also ein Kreis.

Jetzt müssen wir noch die Charakterisierung dieser essentiellen Kreise beweisen. Dazu sei C einer der auf obige Weise konstruierten essentiellen Kreise und die Bezeichnungen k, l, n_\bullet, n_\circ sowie n_e für C wie oben. Dann gelten die Gleichungen (3.1) und (3.2) auch in diesem Fall wieder. Da wir nun wissen, dass keine Kante von einem schwarzen Knoten auf C in das Innere von C führt, gilt anstelle von (3.3) oder (3.4) die Gleichung

$$n_e = 4n_\bullet + n_\circ. \quad (3.5)$$

Indem wir die Differenz $2 \cdot (3.1) - (3.2) - (3.5)$ berechnen, erhalten wir dann $l = 2k - 4$. Wegen $l \geq 0$ ist dann $k \geq 2$ und wegen $l \leq k$ zusätzlich $k \leq 4$. Falls $k = 3$ ist, ist $l = 2 > 0$ und damit ist in diesem Fall auch $n_\bullet > 0$, da die in einem weißen Knoten auf C endenden Kanten, die innerhalb von C liegen, einen schwarzen Startknoten innerhalb von C benötigen. Dann würde C in G aber zu einem trennenden Dreieck korrespondieren, im Widerspruch dazu, dass G irreduzibel ist. Die beiden anderen Lösungen der Gleichung $l = 2k - 4$ sind $\{k = 2, l = 0\}$ sowie $\{k = 4, l = 4\}$. $\{k = 2, l = 0\}$ korrespondiert zu dem Fall, dass C der Rand einer inneren Fläche von Q ist, und $\{k = 4, l = 4\}$ zu dem Fall, dass C ein Kreis der Länge 8 von der oben beschriebenen Art ist. Damit ist der Beweis abgeschlossen. \square

Abbildung 3.18 illustriert die verschiedenen Arten von essentiellen Kreisen in α_4 -Orientierungen.

Da nach Proposition 3.9 zu jeder Rechteckskontaktdarstellung \mathcal{R} einer irreduziblen inneren Triangulierung des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W) , so dass s ein Seitenverhältnisvektor und T eine transversale Struktur von \mathcal{R} ist, eine eindeutige zugehörige nichtnegative Lösung x des Gleichungssystems $A_T(s)x = b$ korrespondiert und diese nicht von s oder T abhängt, können wir auch von den schwachen Wechselkanten von \mathcal{R} sprechen.

Definition 3.16. Es sei \mathcal{R} eine degenerierte Rechteckskontaktdarstellung einer irreduziblen inneren Triangulierung des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W) und k sei die Anzahl der essentiellen Kreise, welche die schwachen Wechselkanten von \mathcal{R} bilden. Dann

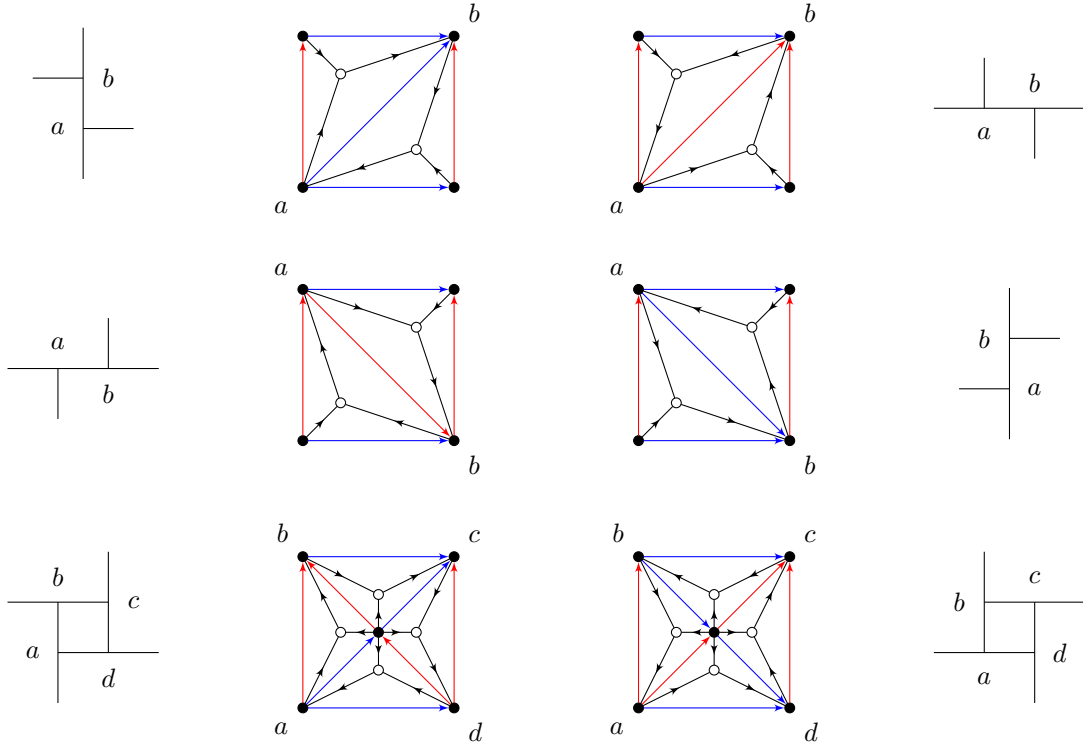


Abbildung 3.18: Die verschiedenen Arten von essentiellen Kreisen in α_4 -Orientierungen und die zugehörigen Ausschnitte nichtdegenerierter Rechteckszerlegungen. Die Kreise auf der linken Seite sind im Uhrzeigersinn orientiert und die auf der rechten Seite gegen den Uhrzeigersinn.

heißt \mathcal{R} *k-fach degeneriert*. Wir nennen \mathcal{R} auch *einfach degeneriert*, falls $k = 1$ ist, und *mehrfach degeneriert*, falls $k > 1$ ist.

Definition 3.17. Der Graph G sei eine irreduzible innere Triangulierung des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W) . Zwei transversale Strukturen T und T' auf G heißen *benachbart*, wenn die α_4 -Orientierung des Winkelgraphen von G , die zu T' gehört, aus der α_4 -Orientierung, die zu T gehört, durch das Umdrehen genau eines essentiellen Kreises C entsteht. C heißt dann der *Differenzkreis* von T und T' .

Lemma 3.17. *Es sei G eine elementare irreduzible innere Triangulierung des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W) mit den inneren Knoten v_1, \dots, v_n . T und T' seien zwei benachbarte transversale Strukturen auf G . Weiter seien $s, s' \in \mathbb{R}_{>0}^n$ zwei Seitenverhältnisvorgaben. Dann gilt $\det(A_T(s)) \det(A_{T'}(s')) < 0$.*

Der folgende Beweis knüpft an die Ideen des Beweises von Proposition 3.7 an und verwendet auch dort eingeführte Bezeichnungen.

Beweis. Auf Grund von Lemma 3.8 können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $s = s'$ ist. $H := G_{A_T(s)}$ sowie $H' := G_{A_{T'}(s)}$ seien die beiden

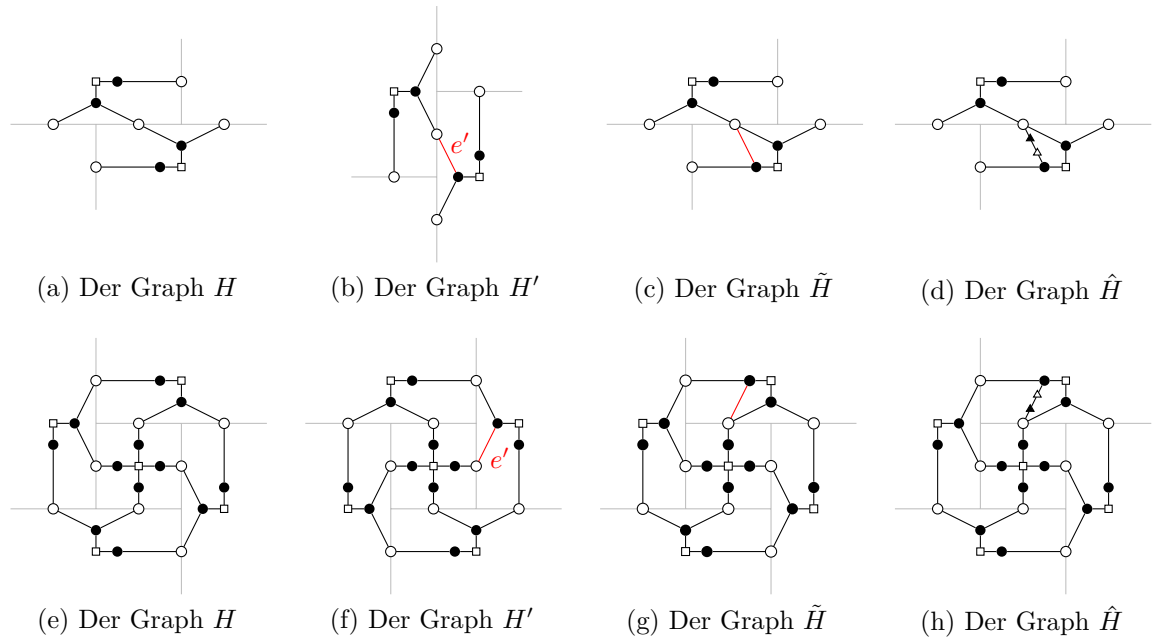


Abbildung 3.19: Ausschnitte aus den Hilfsgraphen aus dem Beweis von Lemma 3.17. (a) - (d) beziehen sich dabei auf den Fall, dass C ein Kreis der Länge 4 ist, und (e) - (h) auf den Fall, dass C ein Kreis der Länge 8 ist.

Graphen, die zu den Matrizen $A_T(s)$ sowie $A_{T'}(s)$ gehören. Weiter sei σ ein perfektes Matching von H und σ' ein perfektes Matching von H' . Wir werden nun zeigen, dass $\text{signat}(\sigma) \neq \text{signat}(\sigma')$ ist.

Wir möchten durch Hinzufügen einer Kante e' zu H einen Graphen \tilde{H} erzeugen, so dass σ und σ' perfekte Matchings von \tilde{H} sind. In dem Fall, in dem der Differenzkreis C von T und T' ein Kreis der Länge 4 ist, umschließt C genau eine Kante e von G . e' sei dann die Kante von H' , die in σ' inzident zu dem Knoten e von H' ist. In dem anderen Fall, in dem C ein Kreis der Länge 8 ist, umschließt C genau einen Knoten v von G , da G einfach ist. w sei dann der Knoten von H' , der in σ' adjazent zu v ist. Dann gilt $\deg_{H'}(w) = 2$ und e'' sei der zweite adjazente Knoten von w in H' . e' sei schließlich die zu e'' inzidente Kante in σ' . Alle anderen Kanten von σ' sind in beiden Fällen bereits in H enthalten und somit auch in \tilde{H} .

Wir erzeugen nun aus \tilde{H} einen neuen Graphen \hat{H} , indem wir in \tilde{H} die Kante e' mit zwei Zwischenknoten in drei Kanten zerteilen. Dann sind \tilde{H} und \hat{H} wieder ebene bipartite Graphen. Abbildung 3.19 illustriert die Graphen H , H' , \tilde{H} sowie \hat{H} .

Die Fläche von H , in welche die Kante e' eingefügt wurde, wird von einem Kreis der Länge 10 begrenzt. Die Kante e' zerlegt diesen Kreis in zwei Kreise der Längen 4 und 8. Durch die beiden Zwischenknoten haben diese Kreise in \hat{H} allerdings die Längen 6 und 10. In \hat{H} sind also alle inneren Flächen f von Kreisen einer Länge $\ell_f \equiv_4 2$ begrenzt.

Wir betrachten jetzt die symmetrische Differenz D von σ und σ' . D ist eine disjunkte Vereinigung von Kreisen $\tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_m$ in \tilde{H} . Dabei sei \tilde{C}_1 der Kreis, der die Kante e'

enthält. $\hat{C}_1, \dots, \hat{C}_m$ seien die entsprechenden Kreise in \hat{H} . Für $i = 1, \dots, m$ sei $\tilde{\ell}_i$ die Länge des Kreises \tilde{C}_i und $\hat{\ell}_i$ die Länge von \hat{C}_i . Für $i = 2, \dots, m$ sind \tilde{C}_i und \hat{C}_i gleich, also ist dann insbesondere $\tilde{\ell}_i = \hat{\ell}_i$. Auf Grund des Hinzukommens der zwei Zwischenknoten in \hat{C}_1 gilt aber $\hat{\ell}_1 = \tilde{\ell}_1 + 2$. Analog zum Beweis von Lemma 2.2 folgt $\hat{\ell}_i \equiv_4 2$ für $i = 1, \dots, m$. Wir erhalten also $\tilde{\ell}_1 \equiv_4 0$ und $\tilde{\ell}_i \equiv_4 2$ für $i = 2, \dots, m$. τ_i sei für $i = 1, \dots, m$ wie im Beweis von Lemma 2.2 die zyklische Permutation der Länge $\frac{\tilde{\ell}_i}{2}$, um die sich σ und σ' auf der Knotenmenge von \tilde{C}_i unterscheiden. Für $i = 1, \dots, m$ gilt also $\text{sgn}(\tau_i) = (-1)^{\frac{1}{2}\tilde{\ell}_i - 1}$ und damit $\text{sgn}(\tau_1) = -1$ sowie $\text{sgn}(\tau_i) = 1$ für $i = 2, \dots, m$. Mit $\sigma' = \sigma \circ \tau_1 \circ \dots \circ \tau_m$ folgt also

$$\text{sgn}(\sigma') = \text{sgn}(\sigma) \cdot \text{sgn}(\tau_1) \cdot \dots \cdot \text{sgn}(\tau_m) = -\text{sgn}(\sigma).$$

Damit ist wie im Beweis von Proposition 3.7 auch $\text{signat}(\sigma') = -\text{signat}(\sigma)$ und daher $\det(A_T(s)) \det(A_{T'}(s)) < 0$. \square

Lemma 3.18. *Es sei G eine elementare irreduzible innere Triangulierung des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W) mit den inneren Knoten v_1, \dots, v_n und $s \in \mathbb{R}_{>0}^n$ ein Seitenverhältnisvektor. Weiter seien T und T' zwei benachbarte transversale Strukturen auf G und es existiere eine nichtdegenerierte Rechteckskontaktdarstellung von G mit dem Seitenverhältnisvektor s und der transversalen Struktur T . Dann existiert keine Rechteckskontaktdarstellung von G mit dem Seitenverhältnisvektor s und der transversalen Struktur T' .*

Beweis. Wir betrachten die beiden Gleichungssysteme $A_T(s)x = b$ und $A_{T'}(s)x' = b$ mit den eindeutigen Lösungsvektoren x und x' . Auf Grund von Proposition 3.9 wissen wir, dass $x > 0$ ist, und es reicht, zu zeigen, dass nicht $x' \geq 0$ ist. Für $i = 1, \dots, m$ seien $A_T^{(i)}(s), A_{T'}^{(i)}(s) \in \mathbb{R}^{m,m}$ die Matrizen, die aus $A_T(s)$ und $A_{T'}(s)$ entstehen, indem die i -te Spalte durch b ersetzt wird. Nach der Cramerschen Regel gelten dann für $i = 1, \dots, m$ die Gleichungen $x(i) = \frac{\det(A_T^{(i)}(s))}{\det(A_T(s))}$ sowie $x'(i) = \frac{\det(A_{T'}^{(i)}(s))}{\det(A_{T'}(s))}$. Da nach Lemma 3.17 zudem $\det(A_T(s)) \det(A_{T'}(s)) < 0$ ist, bleibt zu zeigen, dass es ein $j \in \{1, \dots, m\}$ gibt, so dass $\det(A_T^{(j)}(s)) \det(A_{T'}^{(j)}(s)) > 0$ ist.

Es sei C der Differenzkreis von T und T' . Falls C ein Kreis der Länge 4 ist, sei e die Kante von G , die C umschließt. Die einzige Spalte, in der sich $A_T(s)$ und $A_{T'}(s)$ dann unterscheiden, ist die Spalte, die sich auf e bezieht. Der Index dieser Spalte sei j . Es gilt also insbesondere $A_T^{(j)}(s) = A_{T'}^{(j)}(s)$ und damit $\det(A_T^{(j)}(s)) \det(A_{T'}^{(j)}(s)) > 0$. Somit sind wir in diesem Fall fertig.

Falls C hingegen ein Kreis der Länge 8 ist, sei v der Knoten von G , der von C umschlossen wird, und j der Index der Spalte von $A_T(s)$ sowie $A_{T'}(s)$, die sich auf v bezieht. Wir werden jetzt zeigen, dass $\det(A_T^{(j)}(s)) = \det(A_{T'}^{(j)}(s))$ ist. H und H' seien dazu die beiden bipartiten Graphen, deren gewichtete Adjazenzmatrizen $A_T^{(j)}(s)$ und $A_{T'}^{(j)}(s)$ sind (siehe Abbildung 3.20). Wir färben nun einige Kanten von H und H' wie in Abbildung 3.20 in den Farben Rot und Grün. H und H' unterscheiden sich dann nur in den grünen Kanten. Da jedoch die roten Kanten in jedem perfekten Matching von H beziehungsweise H' enthalten sind, sind die grünen Kanten in keinem solchen

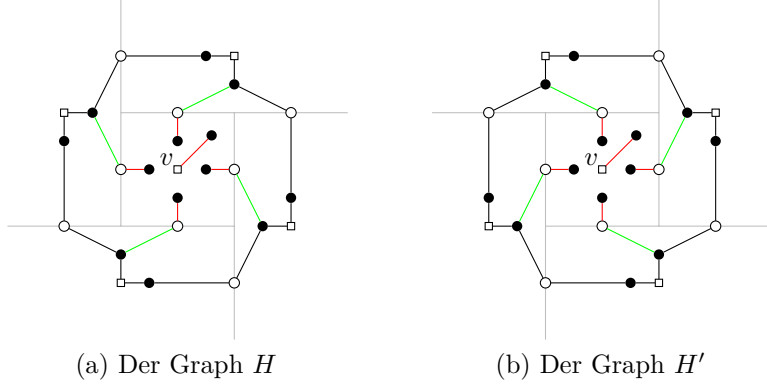


Abbildung 3.20: Ausschnitte aus den Hilfsgraphen aus dem Beweis von Lemma 3.18

Matching enthalten. Die Menge der perfekten Matchings ist also für H und H' genau gleich. Also gilt $\det(A_T^{(j)}(s)) = \det(A_{T'}^{(j)}(s))$ und wir sind auch in diesem Fall fertig. \square

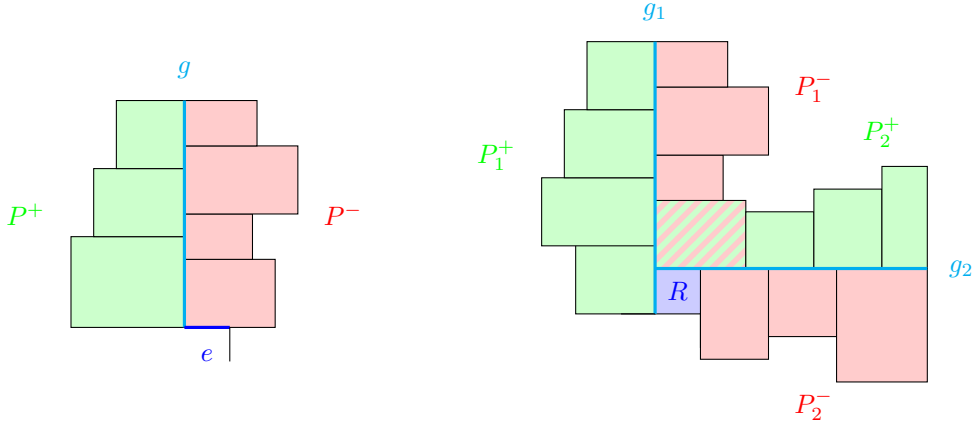
Lemma 3.19. *Es sei G eine elementare irreduzible innere Triangulierung des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W) mit den inneren Knoten v_1, \dots, v_n und $\{s_t : 0 \leq t \leq 1\}$ eine Gerade von Seitenverhältnisvektoren. Es existiere ein $0 < t_0 < 1$, so dass es eine degenerierte Rechteckskontaktdarstellung \mathcal{R}_{t_0} von G mit dem Seitenverhältnisvektor s_{t_0} gibt, sowie ein $\varepsilon > 0$, so dass es für alle $t_0 - \varepsilon \leq t < t_0$ eine nichtdegenerierte Rechteckskontaktdarstellung \mathcal{R}_t von G mit dem Seitenverhältnisvektor s_t und der transversalen Struktur T gibt. Dann existiert für alle $\varepsilon' > 0$ ein Seitenverhältnisvektor $s \in B(s_{t_0}, \varepsilon')$, so dass es eine einfach degenerierte Rechteckskontaktdarstellung von G mit dem Seitenverhältnisvektor s und der transversalen Struktur T gibt.*

Beweis. Falls \mathcal{R}_{t_0} bereits eine einfach degenerierte Rechteckskontaktdarstellung ist, ist nichts zu zeigen.

Jede degenerierte Kante und jedes degenerierte Teilrechteck wird in \mathcal{R}_{t_0} jeweils durch einen einzigen Punkt dargestellt. Wir wählen jetzt diejenige Degeneration aus, die am weitesten oben liegt und, falls es mehrere solche gibt, die von diesen am weitesten rechts liegt, und unterscheiden nun, von welcher Art diese Degeneration ist. Dabei betrachten wir \mathcal{R}_{t_0} als Grenzwert $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathcal{R}_t$.

Als erstes beschreiben wir, wie wir vorgehen, wenn wir eine degenerierte horizontale Kante e ausgewählt haben. g sei das Segment, das von einem der beiden Endknoten von e aus nach oben verläuft. Wir definieren dann die Menge P^- der zu g inzidenten Teilrechtecke, die auf der Seite von g liegen, auf der auch e liegt, sowie die Menge P^+ der zu g inzidenten Teilrechtecke, die auf der anderen Seite von g liegen. Das heißt, wenn e rechts von g liegt, enthält P^- die Teilrechtecke, die rechts von g liegen, und P^+ die Teilrechtecke, die links von g liegen, und, wenn e links von g liegt, genau umgekehrt (siehe Abbildung 3.21 (a)).

Die Längen der einzelnen Kanten von \mathcal{R}_t hängen stetig von t ab. Deshalb existieren das Maximum h_{\max} der Höhen, das Minimum h_{\min} der Höhen sowie das Minimum b_{\min}



(a) Der Fall, in dem eine degenerierte horizontale Kante gewählt wird

(b) Der Fall, in dem ein degeneriertes Teilrechteck gewählt wird

Abbildung 3.21: Die Segmente, die im Beweis von Lemma 3.19 verschoben werden

der Breiten aller Teilrechtecke aus $P^- \cup P^+$ in allen \mathcal{R}_t , $t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0$. Dabei gilt $h_{\max}, h_{\min}, b_{\min} > 0$. Denn die Teilrechtecke aus $P^- \cup P^+$ sind in \mathcal{R}_{t_0} auf Grund der Wahl von e nicht degeneriert und für alle $t_0 - \varepsilon \leq t < t_0$ in \mathcal{R}_t ebenfalls nicht, da \mathcal{R}_t dann insgesamt nichtdegeneriert ist. Weiter sei \tilde{b}_{\min} die minimale Länge derjenigen oberen Kante des obersten Teilrechtecks aus P^- , die g berührt, in allen \mathcal{R}_t , $t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0$. Dann ist auf Grund der Wahl von e auch $\tilde{b}_{\min} > 0$. Wir definieren nun

$$\delta := \min \left\{ \frac{\frac{\varepsilon'}{2} b_{\min}^2}{h_{\max} + \frac{\varepsilon'}{2} b_{\min}}, \frac{\varepsilon'}{2} h_{\min}, \tilde{b}_{\min} \right\} > 0.$$

Da e in \mathcal{R}_{t_0} die Länge 0 hat, gibt es dann ein $t_0 - \varepsilon < t' < t_0$, so dass in $\mathcal{R}_{t'}$ die Länge von e kleiner als δ ist und $\|s_{t_0} - s_{t'}\|_{\infty} \leq \frac{\varepsilon'}{2}$ ist.

Wir konstruieren nun aus $\mathcal{R}_{t'}$ eine neue Rechteckszerlegung \mathcal{R}' , indem wir g um δ' in die Richtung der Teilrechtecke aus P^- verschieben, wobei $\delta' < \delta$ die Länge von e in $\mathcal{R}_{t'}$ ist. e ist in \mathcal{R}' also degeneriert. Die Verschiebung resultiert wieder in einer Rechteckszerlegung, da g um weniger als δ verschoben wird und $\delta < b_{\min}$ ist. Da zudem $\delta \leq \tilde{b}_{\min}$ ist, ist \mathcal{R}' wieder eine Rechteckskontaktendarstellung von G mit der transversalen Struktur T und e die einzige degenerierte Kante in \mathcal{R}' . \mathcal{R}' ist also eine einfach degenerierte Rechteckskontaktendarstellung von G mit der transversalen Struktur T .

Jetzt schätzen wir noch den Abstand des Seitenverhältnisvektors s von \mathcal{R}' zu dem Seitenverhältnisvektor $s_{t'}$ ab. Die einzigen Teilrechtecke, die sich in $\mathcal{R}_{t'}$ und in \mathcal{R}' unterscheiden, sind die aus $P^- \cup P^+$. Es sei zunächst $R \in P^-$. Die Höhe von R in $\mathcal{R}_{t'}$ sei h und die Breite von R in $\mathcal{R}_{t'}$ sei b . Dann ist h auch die Höhe von R in \mathcal{R}' und die Breite von R in \mathcal{R}' beträgt $b - \delta'$. Die Differenz der Seitenverhältnisse beträgt also

$$\frac{h}{b - \delta'} - \frac{h}{b} \leq \frac{h}{b - \delta} - \frac{h}{b} = \frac{\delta h}{b(b - \delta)} \leq \frac{\delta h_{\max}}{b_{\min}(b_{\min} - \delta)} \leq \frac{\varepsilon'}{2}$$

oder möglicherweise

$$\frac{b}{h} - \frac{b - \delta'}{h} = \frac{\delta'}{h} \leq \frac{\delta}{h_{\min}} \leq \frac{\varepsilon'}{2},$$

wenn der zu R gehörige Knoten von G markiert ist. Nun sei $R \in P^+$. h und b seien wieder die Höhe und die Breite von R in $\mathcal{R}_{t'}$. Dann ist h auch wieder die Höhe von R in \mathcal{R}' und die Breite von R in \mathcal{R}' beträgt diesmal $b + \delta'$. Die Differenz der Seitenverhältnisse beträgt also

$$\frac{h}{b} - \frac{h}{b + \delta'} \leq \frac{h}{b} - \frac{h}{b + \delta} = \frac{\delta h}{b(b + \delta)} \leq \frac{\delta h}{b(b - \delta)} \leq \frac{\delta h_{\max}}{b_{\min}(b_{\min} - \delta)} \leq \frac{\varepsilon'}{2}$$

oder möglicherweise

$$\frac{b + \delta'}{h} - \frac{b}{h} = \frac{\delta'}{h} \leq \frac{\delta}{h_{\min}} \leq \frac{\varepsilon'}{2},$$

wenn der zu R gehörige Knoten von G markiert ist. Es gilt also $\|s_{t'} - s\|_{\infty} \leq \frac{\varepsilon'}{2}$ und damit

$$\|s_{t_0} - s\|_{\infty} \leq \|s_{t_0} - s_{t'}\|_{\infty} + \|s_{t'} - s\|_{\infty} \leq \frac{\varepsilon'}{2} + \frac{\varepsilon'}{2} = \varepsilon'$$

beziehungsweise $s \in B(s_{t_0}, \varepsilon')$. Damit sind wir in diesem Fall fertig.

Als nächstes betrachten wir den Fall, in dem wir eine degenerierte vertikale Kante e ausgewählt haben. Analog zum ersten Fall sei g das Segment, das von einem der beiden Endknoten von e aus nach rechts verläuft. P^- sei wieder die Menge der zu g inzidenten Teilrechtecke, die auf der Seite von g liegen, auf der auch e liegt, und P^+ sei wieder die Menge der zu g inzidenten Teilrechtecke, die auf der anderen Seite von g liegen.

Es seien $h_{\min}, b_{\max}, b_{\min} > 0$ die minimale Höhe, maximale Breite und minimale Breite der Teilrechtecke aus $P^- \cup P^+$ in allen \mathcal{R}_t , $t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0$. Und $\tilde{h}_{\min} > 0$ sei die minimale Länge derjenigen rechten Kante des am weitesten rechts liegenden Teilrechtecks aus P^- , die g berührt, in allen \mathcal{R}_t , $t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0$. Wir definieren

$$\delta := \min \left\{ \frac{\varepsilon'}{2} b_{\min}, \frac{\frac{\varepsilon'}{2} h_{\min}^2}{b_{\max} + \frac{\varepsilon'}{2} h_{\min}}, \tilde{h}_{\min} \right\} > 0.$$

Dann gibt es wieder ein $t_0 - \varepsilon < t' < t_0$, so dass in $\mathcal{R}_{t'}$ die Länge von e kleiner als δ ist und $\|s_{t_0} - s_{t'}\|_{\infty} \leq \frac{\varepsilon'}{2}$ ist.

Die Rechteckszerlegung \mathcal{R}' konstruieren wir wieder, indem wir g um δ' in die Richtung der Teilrechtecke aus P^- verschieben, wobei $\delta' < \delta$ die Länge von e in $\mathcal{R}_{t'}$ ist. \mathcal{R}' ist dann erneut eine einfach degenerierte Rechteckskontaktendarstellung von G mit der transversalen Struktur T , da $\delta < h_{\min}$ sowie $\delta < \tilde{h}_{\min}$ ist.

Es sei nun $R \in P^-$. Die Höhe von R in $\mathcal{R}_{t'}$ sei h und die Breite von R in $\mathcal{R}_{t'}$ sei b . Dann ist $h - \delta'$ die Höhe von R in \mathcal{R}' und b die Breite von R in \mathcal{R}' . Die Differenz der Seitenverhältnisse beträgt also

$$\frac{h}{b} - \frac{h - \delta'}{b} = \frac{\delta'}{b} \leq \frac{\delta}{b_{\min}} \leq \frac{\varepsilon'}{2}$$

oder möglicherweise

$$\frac{b}{h - \delta'} - \frac{b}{h} \leq \frac{b}{h - \delta} - \frac{b}{h} = \frac{\delta b}{h(h - \delta)} \leq \frac{\delta b_{\max}}{h_{\min}(h_{\min} - \delta)} \leq \frac{\varepsilon'}{2},$$

falls der zu R gehörige Knoten von G markiert ist. Jetzt sei $R \in P^+$. h und b seien wieder die Höhe und die Breite von R in $\mathcal{R}_{t'}$. Dann ist $h + \delta'$ die Höhe von R in \mathcal{R}' und b die Breite von R in \mathcal{R}' . Die Differenz der Seitenverhältnisse beträgt dann also

$$\frac{h + \delta'}{b} - \frac{h}{b} = \frac{\delta'}{b} \leq \frac{\delta}{b_{\min}} \leq \frac{\varepsilon'}{2}$$

oder möglicherweise

$$\frac{b}{h} - \frac{b}{h + \delta'} \leq \frac{b}{h} - \frac{b}{h + \delta} = \frac{\delta b}{h(h + \delta)} \leq \frac{\delta b}{h(h - \delta)} \leq \frac{\delta b_{\max}}{h_{\min}(h_{\min} - \delta)} \leq \frac{\varepsilon'}{2},$$

falls der zu R gehörige Knoten von G markiert ist. Es gilt also auch in diesem Fall $\|s_{t'} - s\|_{\infty} \leq \frac{\varepsilon'}{2}$ und damit $s \in B(s_{t_0}, \varepsilon')$. Der zweite Fall ist daher ebenfalls abgeschlossen.

Als letztes betrachten wir jetzt den Fall, in dem wir ein degeneriertes Teilrechteck R ausgewählt haben. g_1 sei das Segment, das von einer der vier Ecken von R aus nach oben verläuft, und g_2 sei das Segment, das von einer der vier Ecken von R aus nach rechts verläuft. Für $i = 1, 2$ sei P_i^- die Menge der zu g_i inzidenten Teilrechtecke, die auf der Seite von g_i liegen, auf der auch R liegt, und P_i^+ die Menge der zu g_i inzidenten Teilrechtecke, die auf der anderen Seite von g_i liegen. R selbst sei in P_1^- und P_2^- allerdings nicht enthalten (siehe Abbildung 3.21 (b)).

Es seien $h_{\min}, h_{\max}, b_{\min}, b_{\max} > 0$ die minimale Höhe, die maximale Höhe, die minimale Breite sowie die maximale Breite der Teilrechtecke aus $P_1^- \cup P_2^- \cup P_1^+ \cup P_2^+$ in allen \mathcal{R}_t , $t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0$. Weiter sei \tilde{b}_{\min} die minimale Länge derjenigen oberen Kante des obersten Teilrechtecks aus P_1^- , die g_1 berührt, in allen \mathcal{R}_t , $t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0$. Und $\tilde{h}_{\min} > 0$ sei die minimale Länge derjenigen rechten Kante des am weitesten rechts liegenden Teilrechtecks aus P_2^- , die g_2 berührt, in allen \mathcal{R}_t , $t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0$. Wir setzen

$$\delta := \min \left\{ \frac{\frac{\varepsilon'}{2} b_{\min}^2}{h_{\max} + b_{\max} + \frac{\varepsilon'}{2} b_{\min}}, \frac{\frac{\varepsilon'}{2} h_{\min}^2}{b_{\max} + \frac{\varepsilon'}{2} h_{\min}}, \frac{\varepsilon'}{2} b_{\min}, \frac{\varepsilon'}{2} h_{\min}, \tilde{b}_{\min}, \tilde{h}_{\min} \right\} > 0.$$

Dann gibt es wieder ein $t_0 - \varepsilon < t' < t_0$, so dass in $\mathcal{R}_{t'}$ beide Seitenlängen von R kleiner als δ sind und $\|s_{t_0} - s_{t'}\|_{\infty} \leq \frac{\varepsilon'}{2}$ ist.

Die Rechteckszerlegung \mathcal{R}' konstruieren wir diesmal, indem wir g_1 um δ'_1 in die Richtung der Teilrechtecke aus P_1^- und g_2 um δ'_2 in die Richtung der Teilrechtecke aus P_2^- verschieben, wobei $\delta'_1, \delta'_2 < \delta$ die Breite und die Höhe von R in $\mathcal{R}_{t'}$ sind. \mathcal{R}' ist dann wieder eine einfach degenerierte Rechteckskontaktendarstellung von G mit der transversalen Struktur T .

Wenn $R' \in (P_1^- \cup P_1^+) \setminus (P_2^- \cup P_2^+)$ ist, folgt analog zu dem Fall, in dem wir eine degenerierte horizontale Kante ausgewählt haben, dass die Differenz der Seitenverhältnisse von R' in $\mathcal{R}_{t'}$ und \mathcal{R}' höchstens $\frac{\varepsilon'}{2}$ beträgt. Und wenn $R' \in (P_2^- \cup P_2^+) \setminus (P_1^- \cup P_1^+)$

ist, folgt analog zu dem Fall, in dem wir eine degenerierte vertikale Kante ausgewählt haben, dass die Differenz der Seitenverhältnisse von R' in $\mathcal{R}_{t'}$ und \mathcal{R}' höchstens $\frac{\varepsilon'}{2}$ beträgt. Es sei nun $R' \in P_1^- \cap P_2^+$. h und b seien die Höhe und die Breite von R' in $\mathcal{R}_{t'}$. Dann ist $h + \delta_2'$ die Höhe von R' in \mathcal{R}' und $b - \delta_1'$ die Breite von R' in \mathcal{R}' . Da R' in $\mathcal{R}_{t'}$ nach unten mindestens zu zwei anderen Teilrechtecken benachbart ist, hat der zu R' gehörige Knoten von G mindestens den Grad 5 und kann daher nicht markiert sein. Die Differenz der Seitenverhältnisse von R' in $\mathcal{R}_{t'}$ und \mathcal{R}' beträgt also

$$\frac{h + \delta_2'}{b - \delta_1'} - \frac{h}{b} \leq \frac{h + \delta}{b - \delta} - \frac{h}{b} = \frac{\delta(h + b)}{b(b - \delta)} \leq \frac{\delta(h_{\max} + b_{\max})}{b_{\min}(b_{\min} - \delta)} \leq \frac{\varepsilon'}{2}.$$

Jetzt sei $R' \in P_1^+ \cap P_2^-$. h und b seien wieder die Höhe und die Breite von R' in $\mathcal{R}_{t'}$. Dann ist $h - \delta_2'$ die Höhe von R' in \mathcal{R}' und $b + \delta_1'$ die Breite von R' in \mathcal{R}' . Da der zu R' gehörige Knoten von G wieder nicht markiert sein kann, beträgt die Differenz der Seitenverhältnisse von R' in $\mathcal{R}_{t'}$ und \mathcal{R}' also

$$\frac{h}{b} - \frac{h - \delta_2'}{b + \delta_1'} \leq \frac{h}{b} - \frac{h - \delta}{b + \delta} = \frac{\delta(h + b)}{b(b + \delta)} \leq \frac{\delta(h + b)}{b(b - \delta)} \leq \frac{\delta(h_{\max} + b_{\max})}{b_{\min}(b_{\min} - \delta)} \leq \frac{\varepsilon'}{2}.$$

Es gilt also auch in diesem Fall $\|s_{t'} - s\|_{\infty} \leq \frac{\varepsilon'}{2}$ und damit $s \in B(s_{t_0}, \varepsilon')$. Somit ist auch der dritte Fall und daher der ganze Beweis abgeschlossen. \square

Lemma 3.20. *Es sei G eine einfache irreduzible innere Triangulierung des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W) mit den inneren Knoten v_1, \dots, v_n und $\{s_t : 0 \leq t \leq 1\}$ eine Gerade von Seitenverhältnisvektoren. Es existiere ein $0 < t_0 < 1$, so dass es eine degenerierte Rechteckskontaktdarstellung \mathcal{R}_{t_0} von G mit dem Seitenverhältnisvektor s_{t_0} gibt, sowie ein $\varepsilon > 0$, so dass es für alle $t_0 - \varepsilon \leq t < t_0$ eine nichtdegenerierte Rechteckskontaktdarstellung \mathcal{R}_t von G mit dem Seitenverhältnisvektor s_t und der transversalen Struktur T gibt. Dann existiert für alle $\varepsilon' > 0$ ein Seitenverhältnisvektor $s \in B(s_{t_0}, \varepsilon')$, so dass es eine nichtdegenerierte Rechteckskontaktdarstellung von G mit dem Seitenverhältnisvektor s und einer benachbarten transversalen Struktur T' von T gibt.*

Beweis. Nach Lemma 3.19 gibt es eine einfach degenerierte Rechteckskontaktdarstellung \mathcal{R}' von G , so dass T eine transversale Struktur von \mathcal{R}' ist und ein Seitenverhältnisvektor s' von \mathcal{R}' existiert, der $s' \in B(s_{t_0}, \frac{\varepsilon'}{2})$ erfüllt. C sei der Kreis der schwachen Wechselkanten von \mathcal{R}' und T' diejenige zu T benachbarte transversale Struktur, so dass C der Differenzkreis von T und T' ist. Dann können wir ähnlich wie im Beweis von Lemma 3.19 aus \mathcal{R}' eine nichtdegenerierte Rechteckskontaktdarstellung \mathcal{R} von G konstruieren, so dass T' die transversale Struktur von \mathcal{R} ist und der Seitenverhältnisvektor s von \mathcal{R} die Eigenschaft $s \in B(s', \frac{\varepsilon'}{2})$ erfüllt. Dabei ist zu beachten, dass wir in dem Fall, in dem in \mathcal{R}' ein Teilrechteck degeneriert ist, uns das Verhältnis der Distanzen aussuchen können, um die das horizontale und vertikale Segment verschoben werden, und somit jedes beliebige Seitenverhältnis für dieses Teilrechteck erreichen können.

Insgesamt erhalten wir dann

$$\|s - s_{t_0}\| \leq \|s - s'\| + \|s' - s_{t_0}\| \leq \frac{\varepsilon'}{2} + \frac{\varepsilon'}{2} = \varepsilon'$$

und damit $s \in B(s_{t_0}, \varepsilon')$. □

3.3.4 Abschluss des Beweises

Da wir Theorem 3.5 bereits auf Proposition 3.11 zurückgeführt haben, müssen wir zum Abschluss des Beweises nur noch Letzteres beweisen.

Beweis von Proposition 3.11. Nach Theorem 3.2 existiert eine transversale Struktur T_0 auf G . Und nach Proposition 3.1 besitzt G dann eine nichtdegenerierte Rechteckskontakttdarstellung \mathcal{R}_0 mit der transversalen Struktur T_0 . s_0 sei der Seitenverhältnisvektor von \mathcal{R}_0 . Da \mathcal{R}_0 nichtdegeneriert ist, gibt es nach Korollar 3.13 ein $0 < \varepsilon_0 < 1$, so dass für alle $s \in B(s_0, \varepsilon_0)$ eine nichtdegenerierte Rechteckskontakttdarstellung von G mit dem Seitenverhältnisvektor s und der transversalen Struktur T_0 existiert.

Wir werden nun eine Folge T_0, T_1, \dots, T_K von transversalen Strukturen, zwei Folgen s_0, s_1, \dots, s_K sowie s'_0, s'_1, \dots, s'_K von Seitenverhältnisvektoren und zwei Folgen $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_K$ sowie $\varepsilon'_0, \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_K$ von positiven reellen Zahlen konstruieren, die folgende Invarianten erfüllen:

- (I1) Für $i = 0, 1, \dots, K$ gibt es für alle $s \in B(s_i, \varepsilon_i)$ eine nichtdegenerierte Rechteckskontakttdarstellung von G mit dem Seitenverhältnisvektor s und der transversalen Struktur T_i .
- (I2) Die Gerade $\{(1-t)s' + t\tilde{s} : 0 \leq t \leq 1\}$ schneidet die Bälle $B(s_0, \varepsilon_0), \dots, B(s_i, \varepsilon_i)$ für $i = 0, 1, \dots, K$ und alle $s' \in B(s'_i, \varepsilon'_i)$ in dieser Reihenfolge.
- (I3) Für $i = 0, 1, \dots, K$ liegen die Punkte s'_i, s_i und \tilde{s} auf einer Geraden.
- (I4) Für $i = 1, 2, \dots, K$ sind T_i und T_{i-1} benachbarte transversale Strukturen.

Am Ende wird zusätzlich folgende Bedingung erfüllt sein:

- (I5) Es gibt eine Rechteckskontakttdarstellung $\tilde{\mathcal{R}}$ von G , so dass \tilde{s} ein Seitenverhältnisvektor von $\tilde{\mathcal{R}}$ ist und T_K eine transversale Struktur von $\tilde{\mathcal{R}}$ ist.

Wir initialisieren die Folgen mit den Werten T_0, s_0 sowie ε_0 wie oben und setzen $s'_0 := s_0$ sowie $\varepsilon'_0 := \varepsilon_0$. Dann sind die Invarianten (I1) bis (I4) offensichtlich erfüllt.

Nun zeigen wir, wie für ein $j \in \mathbb{N}$ aus den j -ten Folgengliedern die $(j+1)$ -ten Folgenglieder konstruiert werden können. Falls eine Rechteckskontakttdarstellung $\tilde{\mathcal{R}}$ von G existiert, so dass \tilde{s} ein Seitenverhältnisvektor von $\tilde{\mathcal{R}}$ und T_j eine transversale Struktur von $\tilde{\mathcal{R}}$ ist, können wir abbrechen und $K := j$ setzen. Denn dann ist (I5) bereits erfüllt. Andernfalls sei $r_t := (1-t)s'_j + t\tilde{s}$ für alle $0 \leq t \leq 1$. Auf Grund von (I3) existiert dann ein $0 \leq \hat{t} < 1$ mit $s_j = r_{\hat{t}}$. Dann gibt es nach Lemma 3.15 ein $\delta > 0$, so dass für alle $\hat{t} \leq t < \hat{t} + \delta$ eine nichtdegenerierte Rechteckskontakttdarstellung von G mit dem Seitenverhältnisvektor r_t und der transversalen Struktur T_j existiert sowie eine degenerierte Rechteckskontakttdarstellung \mathcal{R} von G existiert, so dass $r_{\hat{t}+\delta}$ ein Seitenverhältnisvektor von \mathcal{R} und T_j eine transversale Struktur von \mathcal{R}

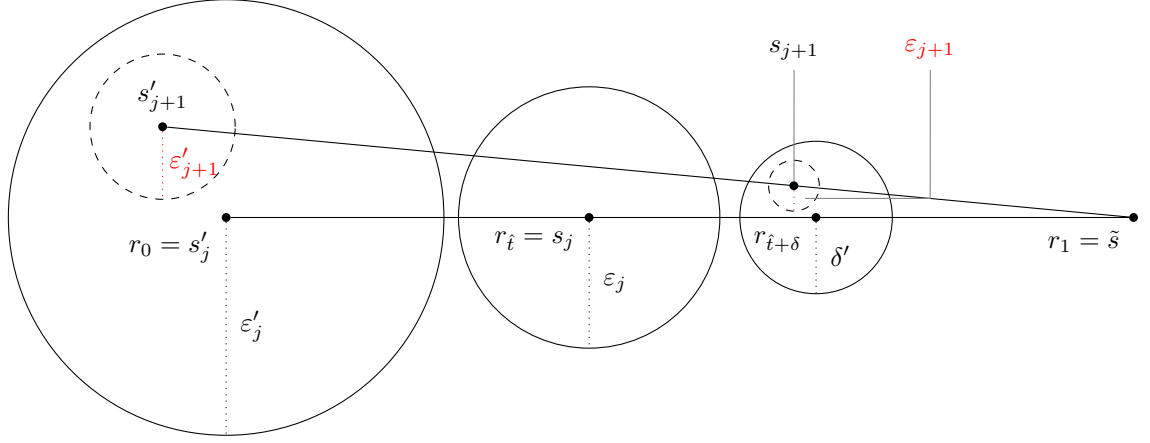


Abbildung 3.22: Die Konstruktion der neuen Folgenglieder im Beweis von Proposition 3.11

ist. Da (I5) noch nicht erfüllt war, ist dabei $\hat{t} + \delta < 1$ und, da $r_{\hat{t}+\delta} \notin B(s_j, \varepsilon_j)$ ist, ist außerdem $\|s_j - r_{\hat{t}+\delta}\| > \varepsilon_j$. Wir setzen jetzt

$$\delta' := \min \left\{ \left(1 - (\hat{t} + \delta)\right) \varepsilon'_j, \|s_j - r_{\hat{t}+\delta}\| - \varepsilon_j \right\} > 0.$$

Nach Lemma 3.20 gibt es dann einen Seitenverhältnisvektor $s_{j+1} \in B^\circ(r_{\hat{t}+\delta}, \delta')$, so dass es eine nichtdegenerierte Rechteckskontaktdarstellung von G mit dem Seitenverhältnisvektor s_{j+1} und einer zu T_j benachbarten transversalen Struktur T_{j+1} gibt. Nun wählen wir $s'_{j+1} := s'_j + \frac{1}{1-(\hat{t}+\delta)}(s_{j+1} - r_{\hat{t}+\delta})$. Dann ist

$$\|s'_{j+1} - s'_j\| = \frac{1}{1 - (\hat{t} + \delta)} \|s_{j+1} - r_{\hat{t}+\delta}\| < \frac{1}{1 - (\hat{t} + \delta)} \delta' \leq \varepsilon'_j$$

und damit $s'_{j+1} \in B^\circ(s'_j, \varepsilon'_j)$. Außerdem gibt es dann nach Korollar 3.13 ein $0 < \varepsilon_{j+1} < \delta' - \|s_{j+1} - r_{\hat{t}+\delta}\|$, so dass es für alle $s \in B(s_{j+1}, \varepsilon_{j+1})$ eine nichtdegenerierte Rechteckskontaktdarstellung von G mit dem Seitenverhältnisvektor s und der transversalen Struktur T_{j+1} gibt. Schließlich setzen wir noch $\varepsilon'_{j+1} := \frac{1}{1-(\hat{t}+\delta)}\varepsilon_{j+1}$. Abbildung 3.22 visualisiert die Konstruktion der neuen Folgenglieder.

Dass die Invarianten (I1), (I3) und (I4) wieder erfüllt sind, ist klar. Auf Grund von $B(s'_{j+1}, \varepsilon'_{j+1}) \subseteq B(s'_j, \varepsilon'_j)$ schneidet wieder für alle $s' \in B(s'_{j+1}, \varepsilon'_{j+1})$ die Gerade $\{(1-t)s' + t\tilde{s} : 0 \leq t \leq 1\}$ die Bälle $B(s_0, \varepsilon_0), \dots, B(s_j, \varepsilon_j)$ in dieser Reihenfolge. Dass eine solche Gerade auch den Ball $B(s_{j+1}, \varepsilon_{j+1})$ schneidet, folgt sofort aus der Konstruktion. Und auf Grund der Tatsache, dass $\delta' \leq \|s_j - r_{\hat{t}+\delta}\| - \varepsilon_j$ und $B(s_{j+1}, \varepsilon_{j+1}) \subseteq B^\circ(r_{\hat{t}+\delta}, \delta')$ ist, liegt ein Schnittpunkt einer solchen Geraden mit $B(s_{j+1}, \varepsilon_{j+1})$ auch näher an \tilde{s} als ein Schnittpunkt derselben Geraden mit $B(s_j, \varepsilon_j)$. (I2) ist also auch wieder erfüllt.

Wir nehmen nun an, die Folgen würden nicht abbrechen. Es sei L die Anzahl der transversalen Strukturen auf G und wir setzen $c := (4n + 5) \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$. Außerdem setzen wir $k := Lc + 1$. Dann gibt es nach dem Schubfachprinzip eine transversale Struktur T auf G , so dass es Indizes $0 \leq i_1 < \dots < i_{c+1} \leq k$ mit $T = T_{i_1} = \dots = T_{i_{c+1}}$ gibt.

Für $l = 1, \dots, c + 1$ sei \hat{s}_l ein Schnittpunkt der Geraden $\{(1 - t)s'_k + t\tilde{s} : 0 \leq t \leq 1\}$ mit dem Ball $B(s_i, \varepsilon_i)$. Es gibt also für $l = 1, \dots, c + 1$ eine nichtdegenerierte Rechteckskontakt­darstellung von G mit dem Seitenverhältnisvektor \hat{s}_l und der transversalen Struktur T . Nach Lemma 3.15 ist der Durchschnitt der Geraden $\{(1 - t)s'_k + t\tilde{s} : 0 < t < 1\}$ mit \mathcal{S}_T eine disjunkte Vereinigung von höchstens c offenen Intervallen. Es gibt also ein $l \in \{1, \dots, c\}$, so dass \hat{s}_l und \hat{s}_{l+1} in demselben Intervall liegen. Insbesondere gibt es für alle $0 \leq \tau \leq 1$ eine nichtdegenerierte Rechteckskontakt­darstellung von G mit dem Seitenverhältnisvektor $(1 - \tau)\hat{s}_l + \tau\hat{s}_{l+1}$ und der transversalen Struktur T . Nach (I4) ist $T' := T_{i_{l+1}}$ eine zu T benachbarte transversale Struktur. Und nach (I2) gibt es ein $0 \leq \tau' \leq 1$, so dass $(1 - \tau')\hat{s}_l + \tau'\hat{s}_{l+1} \in B(s_{i_{l+1}}, \varepsilon'_{i_{l+1}})$ ist. Insbesondere gibt es dann eine nichtdegenerierte Rechteckskontakt­darstellung von G mit dem Seitenverhältnisvektor $(1 - \tau')\hat{s}_l + \tau'\hat{s}_{l+1}$ und der transversalen Struktur T' . Dies widerspricht aber Lemma 3.18.

Die Folgen brechen also ab und, da in diesem Fall (I5) erfüllt ist, sind wir damit fertig. \square

Wir möchten das Kapitel mit Bemerkungen zur Degeneriertheit der Rechteckskontakt­darstellungen abschließen. Zunächst einmal wissen wir aus [Sch93] und [Lov09], dass Rechteckskontakt­darstellungen von irreduziblen inneren Triangulierungen G des Vierecks (v_N, v_O, v_S, v_W) bis auf Skalierung eindeutig sind. Das heißt, wenn unsere Konstruktion eine degenerierte Kontakt­darstellung liefert, ist das keine Schwäche in der Konstruktion, sondern für die entsprechende Instanz unvermeidbar. Wir haben gesehen, dass sowohl einzelne Kanten der Kontakt­darstellung zu einem Punkt degeneriert sein können, als auch ganze Teilrechtecke. Wenn der gegebene Graph G keine trennenden Vierecke besitzt, können wir zumindest ausschließen, dass eine Rechteckskontakt­darstellung von G ein degeneriertes Teilrechteck besitzt. Denn eine α_4 -Orientierung des Winkelgraphen von G kann in diesem Fall keine essentiellen 8-Kreise besitzen. Degenerierte Kanten können wir aber auch in diesem Fall nicht ausschließen.

4 Dreieckskontaktdarstellungen

Wir beginnen wieder mit den grundlegenden Definitionen.

Definition 4.1. Ein *Dreieckskontaktsystem* ist ein endliches System von Dreiecken in der Ebene, die sich paarweise in höchstens einem Punkt schneiden. Zudem muss in einem solchen Schnittpunkt eine Ecke von genau einem der beiden beteiligten Dreiecke liegen.

Definition 4.2. Der *Dreiecksdualgraph* $G^*(\mathcal{D})$ eines Dreieckskontaktsystems \mathcal{D} ist der ebene Graph, dessen Knotenmenge die Menge der Dreiecke von \mathcal{D} ist und der für jede Berührung zweier Dreiecke in \mathcal{D} genau eine Kante zwischen den zugehörigen Knoten besitzt.

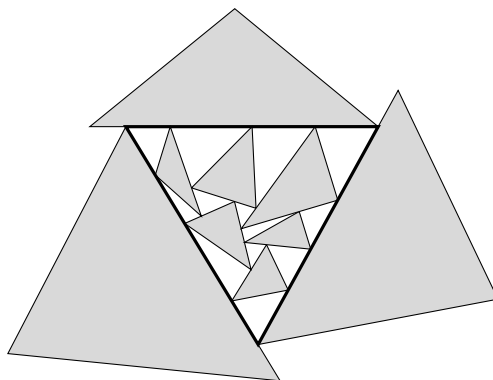
Da sich zwei Dreiecke in einem Dreieckskontaktsystem nicht in mehreren Punkten berühren können, besitzt $G^*(\mathcal{D})$ keine Mehrfachkanten.

Definition 4.3. Ein Dreieckskontaktsystem \mathcal{D} heißt *maximal*, wenn $G^*(\mathcal{D})$ eine Triangulierung ist. Die drei Knoten von $G^*(\mathcal{D})$, die inzident zur äußeren Fläche sind, bezeichnen wir dann im Uhrzeigersinn mit w_1 , w_2 und w_3 (siehe Abbildung 4.1 (b)). Und das Dreieck, das von den zu w_1 , w_2 und w_3 gehörigen Dreiecken begrenzt wird, nennen wir das *Grunddreieck* von \mathcal{D} .

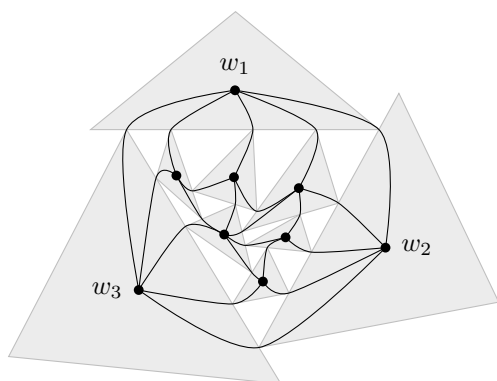
Wir betrachten von nun an nur noch maximale Dreieckskontaktsysteme \mathcal{D} , ohne dies explizit zu erwähnen. Da $G^*(\mathcal{D})$ keine Mehrfachkanten besitzt, ist $G^*(\mathcal{D})$ dann 3-zusammenhängend.

Definition 4.4. Der *Skelettgraph* $G_{\text{skel}}(\mathcal{D})$ eines Dreieckskontaktsystems \mathcal{D} ist der ebene Graph, dessen Knotenmenge die Schnittpunkte von Dreiecken von \mathcal{D} sind und der genau dann eine Kante zwischen zwei Knoten besitzt, wenn diese beiden Knoten auf demselben Randsegment eines Dreiecks von \mathcal{D} liegen und zwischen diesen beiden Knoten kein weiterer Knoten liegt (siehe Abbildung 4.1 (c)).

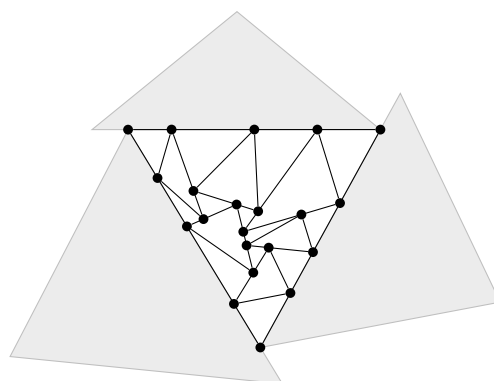
Wir können ein Dreieckskontaktsystem \mathcal{D} also wieder als eine (nicht nur im kombinatorischen Sinne) feste planare Einbettung von $G_{\text{skel}}(\mathcal{D})$ interpretieren. Außerdem ist leicht zu sehen, dass $G_{\text{skel}}(\mathcal{D})$ gerade der *Kantengraph* von $G^*(\mathcal{D})$ ist, das heißt der ebene Graph, dessen Knotenmenge die Menge der Kanten von $G^*(\mathcal{D})$ ist und der für jeden Winkel von $G^*(\mathcal{D})$ eine Kante zwischen den beiden zu dem Winkel inzidenten Kanten von $G^*(\mathcal{D})$ besitzt. Anstatt von den Kanten von $G_{\text{skel}}(\mathcal{D})$ zu sprechen, werden wir der Einfachheit halber auch von den Kanten von \mathcal{D} sprechen.



(a) Ein Dreieckskontaktsystem \mathcal{D}



(b) Der Dreieckdualgraph $G^*(\mathcal{D})$



(c) Der Skelettgraph $G_{\text{skel}}(\mathcal{D})$

Abbildung 4.1: Der Dreieckdualgraph und der Skelettgraph eines Dreieckskontaktsystems

Definition 4.5. Die Dreiecke, die in dem Grunddreieck eines Dreieckskontaktsystem \mathcal{D} zwischen den Dreiecken von \mathcal{D} liegen und in Bijektion zu den inneren Flächen von $G^*(\mathcal{D})$ stehen, bezeichnen wir als *duale Dreiecke*. Die Dreiecke von \mathcal{D} bezeichnen wir zur Abgrenzung hingegen als *primale Dreiecke*.

Wir werden auch wieder degenerierte Dreieckskontaktsysteme betrachten. Das bedeutet, dass sich genau drei Dreiecke in einem Punkt berühren, wobei in diesem Schnittpunkt ausschließlich Ecken der drei Dreiecke liegen. Abbildung 4.2 zeigt, wie eine solche Konstellation als Degeneration interpretiert werden kann.

Wir interessieren uns im Folgenden wieder für den Fall, in dem eine 3-zusammenhängende innere Triangulierung G des Dreiecks (w_1, w_2, w_3) vorgegeben ist und ein Dreieckskontaktsystem \mathcal{D} gesucht wird, dessen Dreieckdualgraph G ist.

Definition 4.6. Es sei G eine 3-zusammenhängende innere Triangulierung des Dreiecks (w_1, w_2, w_3) . Dann nennen wir ein Dreieckskontaktsystem \mathcal{D} eine *Dreieckskontaktdarstellung* von G , wenn $G^*(\mathcal{D}) = G$ ist.

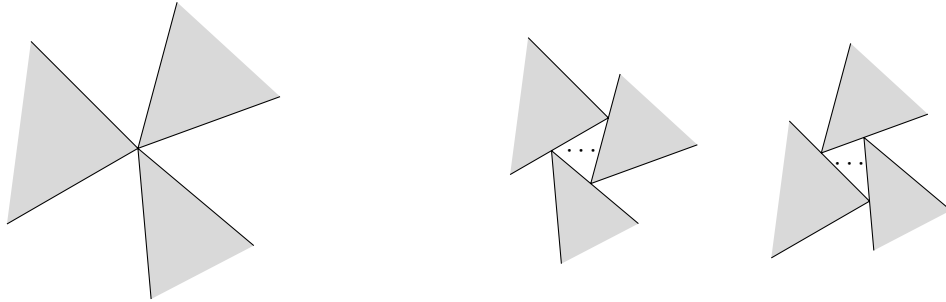


Abbildung 4.2: Ein degenerierter Dreieckskontakt und die zwei Interpretationsmöglichkeiten

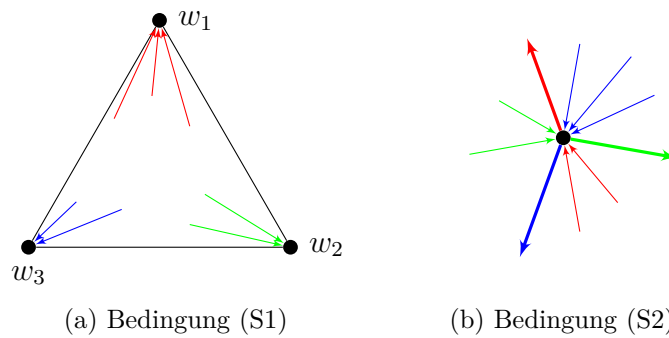


Abbildung 4.3: Die lokalen Bedingungen eines Schnyder Woods

4.1 Schnyder Woods

Wir werden nun eine Struktur einführen, die von einem Dreieckskontaktsystem auf ihrem Dreieckdualgraphen induziert wird.

Definition 4.7. Es sei G eine innere Triangulierung des Dreiecks (w_1, w_2, w_3) . Ein *Schnyder Wood* auf G ist dann eine Orientierung und Färbung der inneren Kanten von G , das heißt aller Kanten von G , die nicht inzident zur äußeren Fläche sind, und eine Färbung derselben in den Farben Rot, Grün und Blau, so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

- (S1) Alle zu w_1 inzidenten Kanten sind rot und eingehend, alle zu w_2 inzidenten Kanten grün und eingehend und alle zu w_3 inzidenten Kanten blau und eingehend (siehe Abbildung 4.3 (a)).
- (S2) Jeder innere Knoten besitzt jeweils genau eine rote, grüne und blaue ausgehende Kante und diese sind im Uhrzeigersinn in dieser Reihenfolge angeordnet. In dem Intervall zwischen zwei ausgehenden Kanten liegen nur eingehende Kanten in der dritten Farbe (siehe Abbildung 4.3 (b)).

Definition 4.8. Eine 3-Orientierung einer inneren Triangulierung G des Dreiecks (w_1, w_2, w_3) ist eine α -Orientierung der inneren Kanten von G mit

$$\alpha(v) := \begin{cases} 0, & \text{falls } v \in \{w_1, w_2, w_3\}, \\ 3 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wenn wir nur die Orientierung der Kanten in einem Schnyder Wood betrachten, ist dies offensichtlich eine 3-Orientierung. Das folgende Lemma aus [FM01] zeigt, dass man umgekehrt auch jede 3-Orientierung eindeutig zu einem Schnyder Wood färben kann.

Lemma 4.1. *Es sei G eine innere Triangulierung des Dreiecks (w_1, w_2, w_3) und X eine 3-Orientierung von G . Dann gibt es einen eindeutigen Schnyder Wood auf G , der die Orientierung der Kanten aus X übernimmt, und dieser lässt sich in linearer Laufzeit berechnen.*

Die Idee des Beweises ist es, bei einer Kante e von G beginnend einen gerichteten Pfad zu konstruieren, so dass an jedem inneren Knoten dieses Pfades eine ausgehende Kante links des Pfades und eine ausgehende Kante rechts des Pfades liegt. Der Pfad muss dann in einem der drei äußeren Knoten enden. Wenn dies w_1 ist, färben wir e rot, wenn dies w_2 ist, färben wir e grün und, wenn dies w_3 ist, färben wir e blau.

Einen Algorithmus mit linearer Laufzeit erhalten wir, indem wir G einmal von w_1 aus traversieren, um alle roten Kanten zu finden, einmal von w_2 aus, um alle grünen Kanten zu finden, und einmal von w_3 aus, um alle blauen Kanten zu finden.

Definition 4.9. Es sei G eine innere Triangulierung des Dreiecks (w_1, w_2, w_3) . Eine Ordnung (v_1, \dots, v_n) der Knoten von G heißt dann eine *kanonische Ordnung* von G , wenn $v_1 = w_3$, $v_2 = w_2$ und $v_n = w_1$ ist und für $i = 4, \dots, n$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- Der von den Knoten v_1, \dots, v_{i-1} induzierte Teilgraph G_{i-1} von G ist 2-zusammenhängend und der Rand der äußeren Fläche von G_{i-1} ist ein Kreis C_{i-1} , der die Kante $\{v_1, v_2\}$ enthält.
- Der Knoten v_i liegt in der äußeren Fläche von G_{i-1} und die Nachbarn von v_i in G_{i-1} bilden einen mindestens zweielementigen Teilpfad des Pfades $C_{i-1} \setminus \{v_1, v_2\}$.

Das folgende Lemma aus [ddR94] zeigt, wie aus einem Schnyder Wood eine kanonische Ordnung konstruiert werden kann:

Lemma 4.2. *Es sei S ein Schnyder Wood auf einer 3-zusammenhängenden inneren Triangulierung des Dreiecks (w_1, w_2, w_3) . Weiter seien T_r , T_g und T_b die Mengen der roten, grünen und blauen Kanten von S . Dann ist $T_r \cup T_g^{-1} \cup T_b^{-1}$ kreisfrei und jede topologische Sortierung des aufspannenden Teilgraphen von G mit dieser Kantenmenge eine kanonische Ordnung.*

Wir nennen eine wie in Lemma 4.2 konstruierte kanonische Ordnung auch eine *zu S gehörige kanonische Ordnung*.

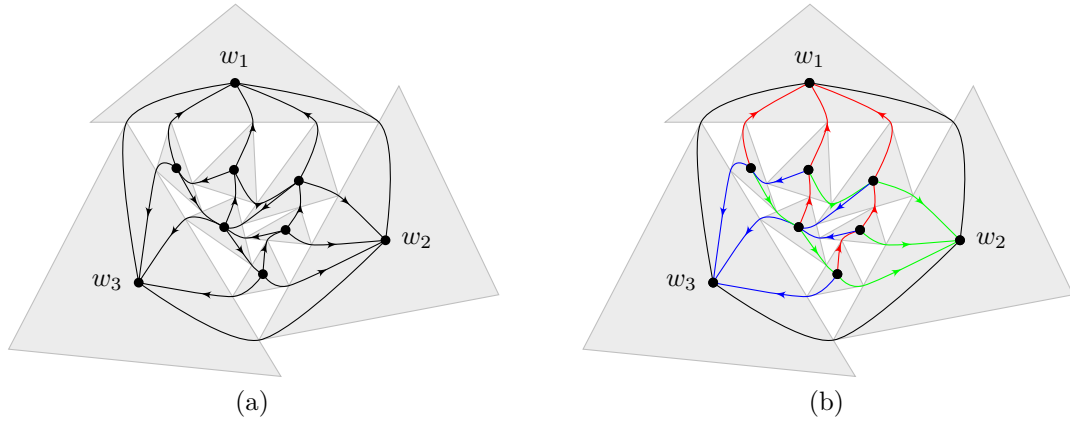


Abbildung 4.4: Die auf einem Dreieckdualgraphen induzierte 3-Orientierung und der zugehörige Schnyder Wood

4.1.1 Schnyder Woods und Dreieckskontaktsysteme

Ein nichtdegeneriertes Dreieckskontaktsystem \mathcal{D} induziert auf folgende Weise einen Schnyder Wood auf seinem Dreieckdualgraphen $G := G^*(\mathcal{D})$: Es sei $e = \{v, w\}$ eine innere Kante von G . Dann korrespondieren v und w zu zwei Dreiecken von \mathcal{D} , die sich berühren. In dem Schnittpunkt liegt eine Spitze von genau einem der beiden Dreiecke. Wir orientieren die Kante e dann von dem Knoten weg, der zu diesem Dreieck gehört. Da jedes Dreieck genau drei Spitzen hat, erzeugen wir auf diese Weise eine 3-Orientierung von G (siehe Abbildung 4.4 (a)). Nach Lemma 4.1 gibt es dann einen eindeutigen Schnyder Wood mit dieser Orientierung (siehe Abbildung 4.4 (b)). Wir nennen den auf diese Weise konstruierten Schnyder Wood auch den Schnyder Wood von \mathcal{D} . Falls \mathcal{D} hingegen ein degeneriertes Dreieckskontaktsystem ist, nennen wir den Schnyder Wood jeder nichtdegenerierten Interpretation von \mathcal{D} einen Schnyder Wood von \mathcal{D} .

Proposition 4.3. *Es sei S ein Schnyder Wood auf einer inneren Triangulierung G des Dreiecks (w_1, w_2, w_3) . Dann gibt es ein nichtdegeneriertes Dreieckskontaktsystem \mathcal{D} , so dass S der Schnyder Wood von \mathcal{D} ist, und ein solches lässt sich in linearer Laufzeit berechnen.*

Die im folgenden Beweis verwendete Konstruktion ist von der Konstruktion in [ddR94] inspiriert.

Beweis. Es sei (v_1, \dots, v_n) die zu S gehörige kanonische Ordnung von G .

Wir werden nun nacheinander die Dreiecke D_1, \dots, D_n konstruieren, die zu den Knoten v_1, \dots, v_n gehören. Jedes dieser Dreiecke wird ein Segment besitzen, das parallel zur x -Achse verläuft und das wir als *Grundsegment* bezeichnen. Die anderen beiden Segmente bezeichnen wir dann entsprechend als *linkes* und *rechtes Segment*.

Wir wählen jetzt zunächst für $i = 1, \dots, n$ ein $\alpha_i \in \mathbb{R}$ mit $0 < \alpha_i \leq 1$. Für $i = 1, \dots, n$ wird das Grundsegment des Dreiecks D_i die y -Koordinate $y = i$ besitzen und in der

Breite von den x -Koordinaten $x = x_l^{(i)}$ sowie $x = x_r^{(i)}$ begrenzt sein. Die dritte Ecke von D_i wird immer die x -Koordinate $(1 - \alpha_i)x_l^{(i)} + \alpha_i x_r^{(i)}$ besitzen und über dem Grundsegment liegen.

Für $i = 4, \dots, n$ werden vor dem Einfügen des Dreiecks D_i jeweils folgende Invarianten erfüllt sein:

- (I1) Das Dreieckskontaktsystems $\{D_1, \dots, D_{i-1}\}$ ist nichtdegeneriert und G_{i-1} ist der Dreieckdualgraph dieses Systems. Die Art der Kontakte entspricht dabei der Orientierung der zugehörigen Kanten in S .
- (I2) Es sei $C_{i-1} \setminus (v_1, v_2) =: (v_1 = v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k} = v_2)$. Dann schneiden die Dreiecke D_{i_1}, \dots, D_{i_k} die Gerade $y = i$ von links nach rechts in dieser Reihenfolge jeweils in einem abgeschlossenen Intervall und diese Schnittintervalle sind paarweise disjunkt. Die Dreiecke D_j mit $j < i$ und $j \notin \{i_1, \dots, i_k\}$ schneiden die Gerade $y = i$ nicht.
- (I3) Das Schnittintervall von D_{i_j} mit der Geraden $y = i$ ist für ein $j \in \{1, \dots, k\}$ genau dann zu einem Punkt degeneriert, wenn es in S die rote Kante (v_{i_j}, v_i) gibt.

Wir beschreiben nun, wie die Dreiecke D_1, D_2 sowie D_3 konstruiert werden. Als erstes konstruieren wir D_1 , indem wir $x_l^{(1)} < x_r^{(1)}$ beliebig wählen und die dritte Ecke auf der Höhe $y = n$ platzieren. Anschließend konstruieren wir D_2 , indem wir $x_l^{(2)}$ als die x -Koordinate des Schnittpunkts des rechten Segments von D_1 mit der Geraden $y = 2$ definieren, $x_r^{(2)} > x_l^{(2)}$ beliebig wählen und die dritte Ecke von D_2 auf der Höhe $y = n + 1$ platzieren. Wir schließen die Initialisierung ab, indem wir noch D_3 konstruieren, wobei wir $x_l^{(3)}$ als die x -Koordinate des Schnittpunkts des rechten Segments von D_1 mit der Geraden $y = 3$ definieren, $x_r^{(3)}$ als die x -Koordinate des Schnittpunkts des linken Segments von D_2 mit der Geraden $y = 3$ definieren und die dritte Ecke von D_3 auf der Höhe $y = j$ platzieren, wenn v_j der Endknoten der roten ausgehenden Kante von v_3 ist (siehe Abbildung 4.5 (a)). Die Invarianten (I1) bis (I3) sind dann offensichtlich alle erfüllt.

Als nächstes beschreiben wir, wie für ein $i \in \{4, \dots, n - 1\}$ das Dreieck D_i konstruiert wird. Da (v_1, \dots, v_n) eine kanonische Ordnung ist, bilden die Nachbarn von v_i in G_{i-1} einen Teilpfad $(v_{i_j}, v_{i_{j+1}}, \dots, v_{i_{j+k'}})$ des Pfades $C_{i-1} \setminus (v_1, v_2)$. Auf Grund der Konstruktion dieser kanonischen Ordnung gibt es dann in S die blaue Kante (v_i, v_{i_j}) , die grüne Kante $(v_i, v_{i_{j+k'}})$ und die roten Kanten $(v_{i_{j+1}}, v_i), \dots, (v_{i_{j+k'-1}}, v_i)$. Wir definieren $x_l^{(i)}$ als die x -Koordinate des Schnittpunktes des rechten Segments von D_{i_j} mit der Geraden $y = i$ und $x_r^{(i)}$ als die x -Koordinate des Schnittpunktes des linken Segments von $D_{i_{j+k'}}$ mit der Geraden $y = i$. Diese Schnittpunkte existieren auf Grund von (I2). Anschließend platzieren wir die dritte Ecke von D_i auf der Höhe $y = l$, wenn v_l der Endpunkt der roten ausgehenden Kante von v_i ist. Dies ist möglich, da wegen $\alpha_m > 0$ für $m = 1, \dots, i - 1$ in dem Bereich $(x_l^{(i)}, x_r^{(i)}] \times (i, \infty)$ noch keine Dreiecke liegen (siehe Abbildung 4.5 (b)).

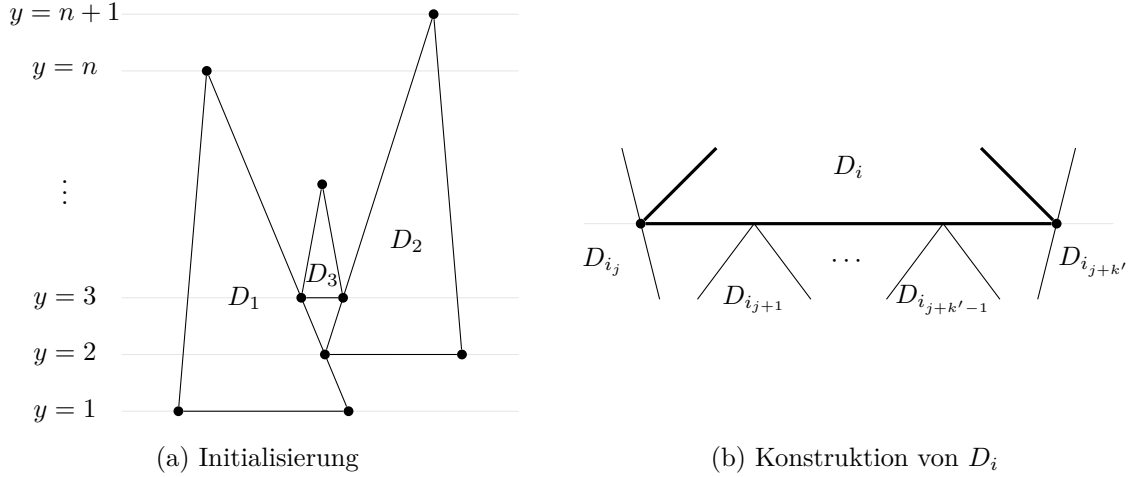


Abbildung 4.5: Konstruktion einer Dreieckskontaktdarstellung mit Hilfe einer kanonischen Ordnung

Nun zeigen wir, dass nach dem Platzieren von D_i die Invarianten wieder erfüllt sind. Das Grundsegment von D_i schneidet die Dreiecke $D_{i_j}, \dots, D_{i_{j+k'}}$. Wegen (I3) handelt es sich dabei um Berührungen, an denen jeweils genau eine Ecke beteiligt ist, und die der Orientierung der zugehörigen Kanten in S entsprechen. (I1) ist also wieder erfüllt. Es ist $C_i \setminus \{(v_1, v_2)\} = (v_{i_1}, \dots, v_{i_j}, v_i, v_{i_{j+k'}}, \dots, v_{i_k})$. Die Dreiecke D_{i_1}, \dots, D_{i_j} schneiden die Gerade $y = i$ im Bereich $x \leq x_l^{(i)}$ von links nach rechts in paarweise disjunkten nichtdegenerierten Intervallen. Daher schneiden diese Dreiecke auch die Gerade $y = i + 1$ im Bereich $x \leq x_l^{(i)}$ von links nach rechts in paarweise disjunkten Intervallen. Das Dreieck D_i schneidet auf Grund der Konstruktion die Gerade $y = i + 1$ im Bereich $x_l^{(i)} < x \leq x_r^{(i)}$ in einem Intervall. Und die Dreiecke $D_{i_{j+k'}}, \dots, D_{i_k}$ schneiden die Gerade $y = i$ im Bereich $x \geq x_r^{(i)}$ von links nach rechts in paarweise disjunkten nichtdegenerierten Intervallen und daher auch die Gerade $y = i + 1$ im Bereich $x > x_r^{(i)}$ von links nach rechts in paarweise disjunkten Intervallen. (I2) ist also ebenfalls wieder erfüllt. Dass (I3) wieder erfüllt ist, folgt sofort aus der Wahl der y -Koordinate der dritten Ecke der Dreiecke in unserer Konstruktion.

Zum Abschluss konstruieren wir nun noch das Dreieck D_n . Wir wählen ein beliebiges $x_l^{(n)} < (1 - \alpha_1)x_l^{(1)} + \alpha_1 x_r^{(1)}$ und $x_r^{(n)}$ als die x -Koordinate des Schnittpunkts des linken Segments von D_2 mit der Geraden $y = n$. Die y -Koordinate der dritten Ecke von D_n setzen wir auf $y = n + 1$. Damit ist die Invariante (I1) auch nach dem Einfügen von D_n wieder erfüllt und damit $\{D_1, \dots, D_n\}$ ein nichtdegeneriertes Dreieckskontaktsystem mit dem Schnyder Wood S . \square

4.1.2 Die Menge der Schnyder Woods

Wir wollen nun noch zeigen, dass auf jeder 3-zusammenhängenden inneren Triangulierung des Dreiecks (w_1, w_2, w_3) ein Schnyder Wood existiert.

Proposition 4.4. *Der Graph G sei eine 3-zusammenhängende innere Triangulierung des Dreiecks (w_1, w_2, w_3) . Dann gibt es auf G einen Schnyder Wood und ein solcher kann in linearer Zeit berechnet werden.*

Wir skizzieren nun einen Beweis aus [Bre00] und werden dabei hauptsächlich die verwendete Konstruktion beschreiben.

Beweisskizze. Die Idee des Algorithmus ist es, einen Kreis C zu betrachten und schrittweise zu verkleinern, der folgende Invarianten erfüllt:

- (I1) Genau diejenigen inneren Kanten von G , die außerhalb von C liegen, sind orientiert und gefärbt.
- (I2) Für alle inneren Knoten von G , die außerhalb von C liegen, ist die Bedingung (S2) erfüllt.
- (I3) Für alle inneren Knoten v von G , die auf C liegen, ist folgende Teilbedingung von (S2) erfüllt: v besitzt eine rote, ausgehende Kante e . Die zu v inzidenten Kanten, die im Uhrzeigersinn betrachtet zwischen C und e liegen, sind grün und eingehend und die zu v inzidenten Kanten, die zwischen e und C liegen, sind blau und eingehend.
- (I4) Folgende Teilbedingung von (S1) ist erfüllt: Alle Kanten, die außerhalb von C liegen und inzident zu w_1, w_2 beziehungsweise w_3 sind, sind eingehende, rote Kanten, eingehende, grüne Kanten beziehungsweise eingehende, blaue Kanten.
- (I5) Der Kreis C enthält die Kante $\{w_2, w_3\}$.

Initialisiert wird C mit allen Nachbarn von w_1 , einschließlich w_2 und w_3 . Alle inneren Kanten von G , die inzident zu w_1 sind, werden rot gefärbt und zu w_1 hin orientiert. Dann sind offensichtlich alle Invarianten erfüllt.

Wir sortieren die Knoten auf C von links nach rechts, wobei w_3 das linke und w_2 das rechte Ende bildet. Außerdem nennen wir einen Knoten auf $C \setminus \{w_2, w_3\}$ *zulässig*, wenn dieser zu keiner Sehne von C inzident ist.

Die Aktualisierung des Kreises C läuft dann folgendermaßen ab: Zunächst finden wir einen zulässigen Knoten v . Die beiden Kanten auf C , die zu v inzident sind, orientieren wir von v weg und färben die Kante, die nach links zeigt, blau und die andere grün. Alle zu v inzidenten Kanten, die innerhalb von C liegen, färben wir rot und orientieren wir zu v hin. Anschließend wird C so geändert, dass genau die Flächen nicht mehr im Inneren von C liegen, die inzident zu v sind. Es ist leicht zu prüfen, dass nach dem Aktualisierungsschritt wieder alle Invarianten erfüllt sind.

Nach dem letzten Aktualisierungsschritt enthält C nur noch die Knoten w_2 und w_3 . Das heißt, es sind dann alle inneren Kanten von G gefärbt und orientiert. Auf Grund von (I2) und (I4) handelt es sich dann bei der berechneten Färbung und Orientierung um einen Schnyder Wood. Ein Beispiel für einen vollständigen Durchlauf des Algorithmus ist in Abbildung 4.6 zu sehen. □

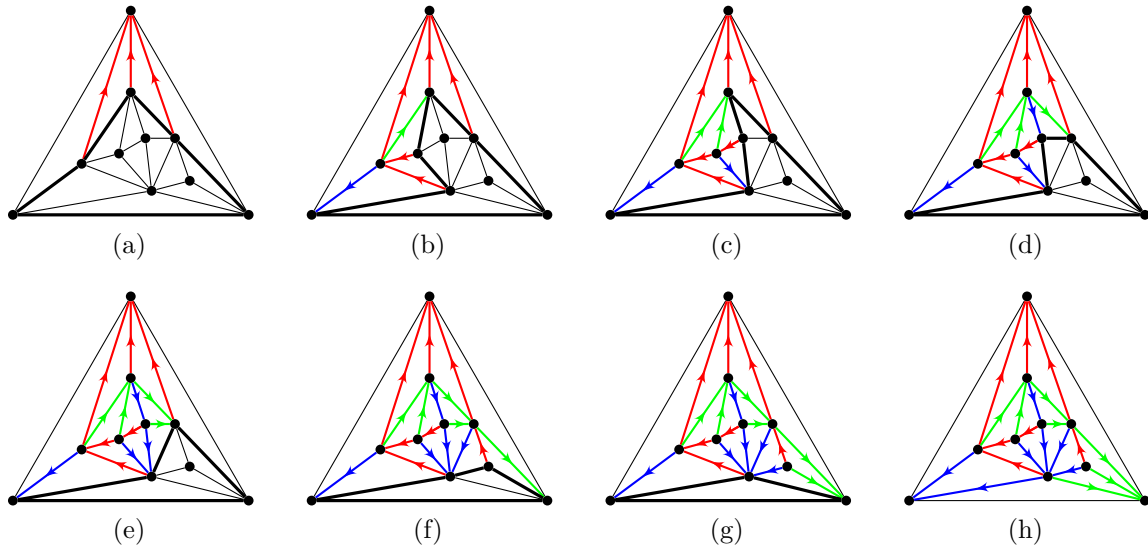


Abbildung 4.6: Ein Beispiel für einen vollständigen Durchlauf des Algorithmus zum Berechnen eines Schnyder Woods

4.2 Berechnung von Dreieckskontaktdarstellungen

Wir möchten uns nun mit dem Problem beschäftigen, zu einer gegebenen inneren Triangulierung G des Dreiecks (w_1, w_2, w_3) eine Dreieckskontaktdarstellung von G zu berechnen, bei der alle Dreiecke gleichseitig sind.

Definition 4.10. Eine *gleichseitige Dreieckskontaktdarstellung* ist eine Dreieckskontaktdarstellung mit homothetischen gleichseitigen Dreiecken.

Damit lässt sich das Haupttheorem dieses Kapitels formulieren.

Theorem 4.5. *Es sei G eine 3-zusammenhängende innere Triangulierung des Dreiecks (w_1, w_2, w_3) . Dann gibt es eine gleichseitige Dreieckskontaktdarstellung von G .*

Da wir wieder genauso vorgehen möchten wie in Kapitel 3, werden wir jetzt zunächst das Problem so umformulieren, dass wir erneut den Begriff des Seitenverhältnisses einführen können. Unser Ansatz verwendet dabei rechtwinklige Dreiecke.

Definition 4.11. Wir nennen ein Dreieckskontaktsystem \mathcal{D} *rechtwinklig*, wenn jedes primale Dreieck von \mathcal{D} rechtwinklig ist sowie ein horizontales und ein vertikales Segment besitzt und der rechte Winkel jedes dieser Dreiecke jeweils in der rechten unteren Ecke liegt.

Beobachtung. Die dualen Dreiecke eines rechtwinkligen Dreieckskontaktsystems sind ebenfalls rechtwinklig und besitzen ein horizontales sowie ein vertikales Segment. Der rechte Winkel liegt bei den dualen Dreiecken aber nicht in der rechten unteren, sondern in der linken oberen Ecke.

Proposition 4.6. *Es sei G eine 3-zusammenhängende innere Triangulierung des Dreiecks (w_1, w_2, w_3) . Dann gibt es eine nichtdegenerierte rechtwinklige Dreieckskontaktendarstellung von G und eine solche lässt sich in linearer Zeit berechnen.*

Beweis. Zunächst berechnen wir einen Schnyder Wood S auf G , was nach Proposition 4.4 in linearer Zeit möglich ist. Anschließend wenden wir den Algorithmus aus dem Beweis von Proposition 4.3 an, der ebenfalls in linearer Zeit läuft. Wenn wir dabei $\alpha_i = 1$ für $i = 1, \dots, n$ wählen, ist die berechnete nichtdegenerierte Dreieckskontaktendarstellung von G rechtwinklig. \square

Nun definieren wir den Begriff des Seitenverhältnisses für rechtwinklige Dreieckskontaktssysteme.

Definition 4.12. Es sei D ein nichtdegeneriertes primales oder duales Dreieck in einem rechtwinkligen Dreieckskontaktssystem. h sei die Länge des vertikalen und b die Länge des horizontalen Segments von D . Dann nennen wir h die *Höhe*, b die *Breite* und den Quotienten $\frac{h}{b}$ das *Seitenverhältnis* von D .

Definition 4.13. Es sei G eine 3-zusammenhängende innere Triangulierung des Dreiecks (w_1, w_2, w_3) mit den Knoten v_1, \dots, v_n und \mathcal{D} eine Dreieckskontaktendarstellung von G . Dann nennen wir den Vektor $s \in \mathbb{R}_{>0}^n$ einen *Seitenverhältnisvektor* von \mathcal{D} , falls für $i = 1, \dots, n$ das primale Dreieck von \mathcal{D} , das zu v_i gehört, das Seitenverhältnis s_i hat, sofern es nicht degeneriert ist.

Das Hauptziel für den Rest des Kapitels ist es, folgenden Satz zu beweisen:

Theorem 4.7. *Der Graph G sei eine 3-zusammenhängende innere Triangulierung des Dreiecks (w_1, w_2, w_3) mit den inneren Knoten v_1, \dots, v_n und $s \in \mathbb{R}_{>0}^{n+3}$ eine Seitenverhältnisvorgabe. Dann gibt es eine (möglicherweise degenerierte) rechtwinklige Dreieckskontaktendarstellung \mathcal{D} von G , so dass s ein Seitenverhältnisvektor von \mathcal{D} ist.*

Mit Hilfe von Theorem 4.7 ist es kein Problem mehr, das Haupttheorem dieses Kapitels zu beweisen.

Beweis von Theorem 4.5 mit Theorem 4.7. Nach Theorem 4.7 gibt es eine rechtwinklige Dreieckskontaktendarstellung \mathcal{D} von G , so dass $s = [1, \dots, 1]$ ein Seitenverhältnisvektor von \mathcal{D} ist. In \mathcal{D} sind also alle Dreiecke rechtwinklig und gleichschenkelig.

Wir drehen nun \mathcal{D} so, dass die Hypotenuse aller primalen Dreiecke von \mathcal{D} parallel zur x -Achse ist und die dritte Ecke jeweils über der Hypotenuse liegt. Ferner definieren wir den Automorphismus

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 : [x, y] \mapsto \left[\frac{1}{\sqrt{3}}x, y \right].$$

Es sei \mathcal{D}' das Bild von \mathcal{D} unter f . Da f ein Automorphismus ist, ist zunächst klar, dass \mathcal{D}' wieder eine Dreieckskontaktendarstellung von G ist. Wir möchten nun zeigen, dass in \mathcal{D}' alle Dreiecke gleichseitig sind. Dazu sei D ein Dreieck in \mathcal{D}

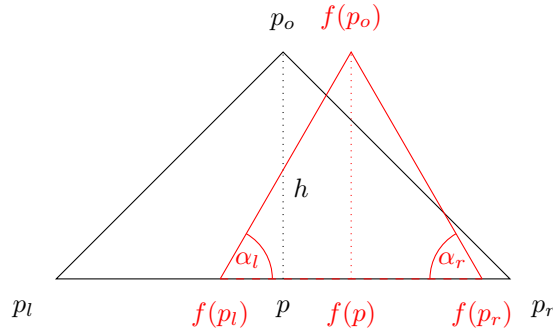


Abbildung 4.7: Transformation rechtwinkliger, gleichschenkliger Dreiecke in gleichseitige Dreiecke

und p_o , p_r sowie p_l seien im Uhrzeigersinn die Koordinaten der Eckpunkte von D , wobei p_l und p_r die Endpunkte der Hypotenuse von D seien. Weiter sei $p := \frac{1}{2}p_l + \frac{1}{2}p_r$ der Mittelpunkt von p_l und p_r und $h := \|p - p_o\|_2$ der Abstand von p und p_o . Es sei $p = [x_p, y_p]$. Dann ist $p_l = [x_p - h, y_p]$, $p_r = [x_p + h, y_p]$ sowie $p_o = [x_p, y_p + h]$ (siehe Abbildung 4.7). Daraus folgt dann $f(p_l) = [\frac{1}{\sqrt{3}}(x_p - h), y_p]$, $f(p_r) = [\frac{1}{\sqrt{3}}(x_p + h), y_p]$ sowie $f(p) = [\frac{1}{\sqrt{3}}x_p, y_p]$. Wir bezeichnen das Bild von D unter f mit D' und die Innenwinkel von D' bei den Eckpunkten $f(p_l)$ und $f(p_r)$ mit α_l und α_r . Dann folgt

$$\tan \alpha_l = \frac{\|f(p_o) - f(p)\|_2}{\|f(p_l) - f(p)\|_2} = \frac{h}{\frac{1}{\sqrt{3}}h} = \sqrt{3}$$

und analog $\tan \alpha_r = \sqrt{3}$. Damit ist $\alpha_l = \alpha_r = \frac{\pi}{3}$. D' ist also ein gleichseitiges Dreieck und damit D' eine gleichseitige Dreieckskontaktdarstellung von G . Abbildung 4.7 zeigt, wie die Abbildung f auf ein rechtwinkliges, gleichschenkliges Dreieck wirkt. \square

4.2.1 Das Gleichungssystem

Es sei G eine 3-zusammenhängende innere Triangulierung des Dreiecks (w_1, w_2, w_3) mit den inneren Knoten v_1, \dots, v_n , S ein Schnyder Wood auf G und $s \in \mathbb{R}_{>0}^{n+3}$ eine Seitenverhältnisvorgabe. Wir werden nun ein lineares Gleichungssystem beschreiben, das die Kantenlängen einer rechtwinkligen Dreieckskontaktdarstellung von G mit dem Seitenverhältnisvektor s und dem Schnyder Wood S berechnet, sofern eine solche existiert.

Durch die Festlegung eines Schnyder Woods auf G , können wir aus den Seitenverhältnissen der primalen Dreiecke auch die Seitenverhältnisse der dualen Dreiecke berechnen. Denn ein duales Dreieck erbt das Seitenverhältnis von dem benachbarten primalen Dreieck, das es mit der Kante berührt, die weder horizontal, noch vertikal ist. Eine solche Kante nennen wir *diagonal*. Es sei nun f eine innere Fläche von G und $v_{\phi(f)}$ der Knoten von G , so dass das zu f gehörige duale Dreieck das zu $v_{\phi(f)}$ gehörige primale Dreieck über eine diagonale Kante berührt. Wir betrachten jetzt die zu f inzidenten

Kanten $\delta(f)$ in S . Falls eine der Kanten aus $\delta(f)$ grün ist, ist $v_{\phi(f)}$ der Endknoten dieser Kante. Falls hingegen keine der Kanten aus $\delta(f)$ grün ist, ist $v_{\phi(f)}$ der Knoten, bei dem keine Kante aus $\delta(f)$ endet. Denn falls $v_{\phi(f)}$ der Endknoten einer Kante aus $\delta(f)$ ist, muss diese Kante grün sein.

Wir erzeugen für jeden inneren Knoten v von G eine Variable x_v , die für die Breite des zugehörigen primalen Dreiecks steht, sowie für jede innere Fläche f von G eine Variable x_f , die für die Breite des zugehörigen dualen Dreiecks steht. Für einen Knoten v von G bezeichnen wir mit $\delta_r^-(v)$ die Menge der zu v inzidenten Flächen von G , die zwischen der in S grünen, ausgehenden Kante von v und der in S blauen, ausgehenden Kante von v liegen. Analog definieren wir die Mengen $\delta_g^-(v)$ und $\delta_b^-(v)$. Für jeden inneren Knoten v_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, erzeugen wir folgende drei Gleichungen:

$$x_{v_i} = \sum_{f \in \delta_r^-(v_i)} x_f, \quad x_{v_i} = \sum_{f \in \delta_g^-(v_i)} x_f, \quad s_i x_{v_i} = \sum_{f \in \delta_b^-(v_i)} s_{\phi(f)} x_f.$$

Dieses System ist ein homogenes lineares Gleichungssystem und besitzt daher die triviale Nulllösung. Um dies zu vermeiden, fügen wir eine letzte Gleichung hinzu:

$$\sum_{f \in \delta_r^-(w_1)} x_f = 1.$$

Insgesamt erhalten wir also das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \sum_{f \in \delta_r^-(w_1)} x_f &= 1, \\ \sum_{f \in \delta_r^-(v_i)} x_f - x_{v_i} &= 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ \sum_{f \in \delta_g^-(v_i)} x_f - x_{v_i} &= 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ \sum_{f \in \delta_b^-(v_i)} s_{\phi(f)} x_f - s_i x_{v_i} &= 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Wir schreiben für dieses Gleichungssystem auch kurz $A_S(s)x = b$, indem wir die Gleichungen in einer Matrix $A_S(s)$ und der rechten Seite $b := [1, 0, 0, \dots, 0]^T$ sammeln.

Proposition 4.8. *Es sei S ein Schnyder Wood auf einer 3-zusammenhängenden inneren Triangulierung G des Dreiecks (w_1, w_2, w_3) mit den inneren Knoten v_1, \dots, v_n und $s \in \mathbb{R}_{>0}^{n+3}$ eine Seitenverhältnisvorgabe. Dann ist das Gleichungssystem $A_S(s)x = b$ eindeutig lösbar.*

Der folgende Beweis stammt aus [Ruc11].

Beweis. Das Gleichungssystem $A_S(s)x = b$ besteht aus genau $3n + 1$ Gleichungen.

Da G eine Triangulierung ist, gilt nach der Eulerschen Formel $|F(G)| = 2|V(G)| - 4$. Die Anzahl der Variablen des Gleichungssystems beträgt daher

$$(|V(G)| - 3) + (|F(G)| - 1) = 3|V(G)| - 8 = 3(n + 3) - 8 = 3n + 1.$$

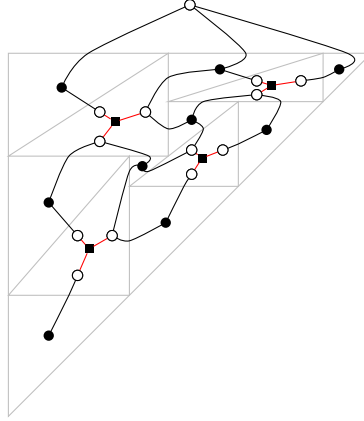


Abbildung 4.8: Beispiel für den Graphen $G_{A_S(s)}$, dessen bipartite Adjazenzmatrix die Matrix $A_S(s)$ ist

Das Gleichungssystem besitzt also genauso viele Gleichungen wie Variablen. Folglich reicht es, zu zeigen, dass die Determinante der Matrix $A_S(s)$ nicht verschwindet.

Wir interpretieren $A_S(s)$ nun als gewichtete Adjazenzmatrix eines bipartiten Graphen $G_{A_S(s)}$, dessen Kanten schwarz und rot gefärbt sind. Die schwarze Knotenklasse bilden dabei die Variablen des Gleichungssystems, also die inneren Knoten und die inneren Flächen von G , und die weiße Knotenklasse bilden die Gleichungen des Gleichungssystems. Wir bezeichnen die schwarzen Knoten mit a_1, \dots, a_m und die weißen Knoten mit b_1, \dots, b_m . Die Kante $\{a_i, b_j\}$ existiert genau dann, wenn $(A_S(s))_{ij} \neq 0$ ist, und ist in diesem Fall genau dann schwarz, wenn $(A_S(s))_{ij} > 0$ ist. Da der Graph $G_{A_S(s)}$ nicht von s abhängt, nennen wir diesen auch kurz G_S . Eine Realisierung des Schnyder Woods S als Dreieckskontaktsystem induziert eine planare Zeichnung von G_S (siehe Abbildung 4.8), weshalb wir G_S als ebenen Graphen betrachten werden.

Nach der Leibniz-Formel ist $\det(A_S(s)) = \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) \prod_i (A_S(s))_{i\sigma(i)}$. Die Permutationen σ stehen hierbei in Bijektion zu den perfekten Matchings des vollständigen bipartiten Graphen, von dem G_S ein aufspannender Teilgraph ist. Dabei wird jeweils der schwarze Knoten a_i mit dem weißen Knoten $b_{\sigma(i)}$ gematcht. Der Summand $\text{sgn}(\sigma) \prod_i (A_S(s))_{i\sigma(i)}$ ist nun genau dann ungleich Null, wenn σ zu einem perfekten Matching von G_S korrespondiert. Wir definieren die *Signatur* $\text{signat}(\sigma)$ einer Permutation σ als das Vorzeichen des zugehörigen Summanden der Determinante von $A_S(s)$, also

$$\text{signat}(\sigma) := \begin{cases} +1, & \text{falls } \text{sgn}(\sigma) \prod_i (A_S(s))_{i\sigma(i)} > 0, \\ -1, & \text{falls } \text{sgn}(\sigma) \prod_i (A_S(s))_{i\sigma(i)} < 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir werden nun zwei Fakten zeigen: Aus $\text{signat}(\sigma), \text{signat}(\tau) \neq 0$ für zwei Permutationen σ und τ folgt $\text{signat}(\sigma) = \text{signat}(\tau)$ und es existiert eine Permutation σ mit $\text{signat}(\sigma) \neq 0$. Aus diesen beiden Aussagen folgt dann sofort $\det(A_S(s)) \neq 0$.

Es sei nun σ eine Permutation mit $\text{signat}(\sigma) \neq 0$. Dann korrespondiert σ zu einem perfekten Matching von G_S . Ein perfektes Matching von G_S beinhaltet genau n rote

Kanten. Denn genau die n schwarzen Knoten, die zu den inneren Knoten von G korrespondieren, sind in einem solchen Matching inzident zu roten Kanten und alle anderen schwarzen Knoten zu schwarzen Kanten. Daher gilt $\text{signat}(\sigma) = (-1)^n \text{sgn}(\sigma)$.

Es sei τ eine weitere Permutation mit $\text{signat}(\tau) \neq 0$. Dann erhalten wir analog $\text{signat}(\tau) = (-1)^n \text{sgn}(\tau)$ und somit müssen wir nur noch $\text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\tau)$ zeigen, um $\text{signat}(\sigma) = \text{signat}(\tau)$ zu beweisen. Da in G_S aber alle inneren Flächen durch Kreise der Länge $6 \equiv_4 2$ begrenzt sind, folgt $\text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\tau)$ sofort aus Lemma 2.2.

Jetzt zeigen wir noch, dass es eine Permutation σ mit $\text{signat}(\sigma) \neq 0$ gibt, indem wir zeigen, dass G_S ein perfektes Matching M besitzt. Dazu betrachten wir eine feste nichtdegenerierte rechtwinklige Dreieckskontaktendarstellung mit dem Schnyder Wood S . Es sei v ein innerer Knoten von G und D das zugehörige primale Dreieck. Den zu v gehörigen Knoten in G_S matchen wir dann mit dem Knoten, der zu der Gleichung gehört, die sich auf das diagonale Segment von D bezieht. Den Knoten, der zu der Gleichung gehört, die sich auf das rechte, vertikale Segment von D bezieht, matchen wir mit der Variablen, die sich auf das oberste duale Dreieck bezieht, das D in diesem Segment berührt. Und den Knoten, der zu der Gleichung gehört, die sich auf das untere, horizontale Segment von D bezieht, matchen wir mit der Variablen, die sich auf das am weitesten links liegende duale Dreieck bezieht, das D in diesem Segment berührt (siehe Abbildung 4.9 (a)). Auf Grund der Konstruktion ist klar, dass jeder Knoten, der zu einem primalen Dreieck gehört, und jeder Knoten, der zu einer Gleichung gehört, zu genau einer Matchingkante inzident ist. Wir betrachten nun ein duales Dreieck D' und unterscheiden zwei Fälle bezüglich der linken oberen Ecke von D' . Entweder diese Ecke ist die obere rechte Ecke des primalen Dreiecks, das an die linke Kante von D' grenzt. Dann existiert eine Matchingkante zwischen dem Knoten, der zu D' gehört, und dem Knoten, der zu der Gleichung gehört, die sich auf das rechte Segment dieses primalen Dreiecks bezieht (siehe Abbildung 4.9 (b)). Oder diese Ecke ist die linke untere Ecke des primalen Dreiecks, das an die obere Kante von D' grenzt. Dann existiert eine Matchingkante zwischen dem Knoten, der zu D' gehört, und dem Knoten, der zu der Gleichung gehört, die sich auf das untere Segment dieses primalen Dreiecks bezieht (siehe Abbildung 4.9 (c)). M ist also ein perfektes Matching von G_S .

Abbildung 4.10 zeigt ein Beispiel eines auf diese Weise konstruierten perfekten Matchings von G_S . □

Aus dem Beweis von Proposition 3.7 folgt zusätzlich diese Beobachtung:

Lemma 4.9. *Es sei S ein Schnyder Wood auf einer 3-zusammenhängenden inneren Triangulierung des Dreiecks (w_1, w_2, w_3) mit den inneren Knoten v_1, \dots, v_n und es seien $s, s' \in \mathbb{R}_{>0}^{n+3}$ zwei Seitenverhältnissvorgaben. Dann haben $\det(A_S(s))$ und $\det(A_S(s'))$ dasselbe Vorzeichen, das heißt, es gilt $\det(A_S(s)) \det(A_S(s')) > 0$.*

Als nächstes möchten wir wieder zeigen, dass aus einer nichtnegativen Lösung des Gleichungssystems eine rechtwinklige Dreieckskontaktendarstellung konstruiert werden kann.

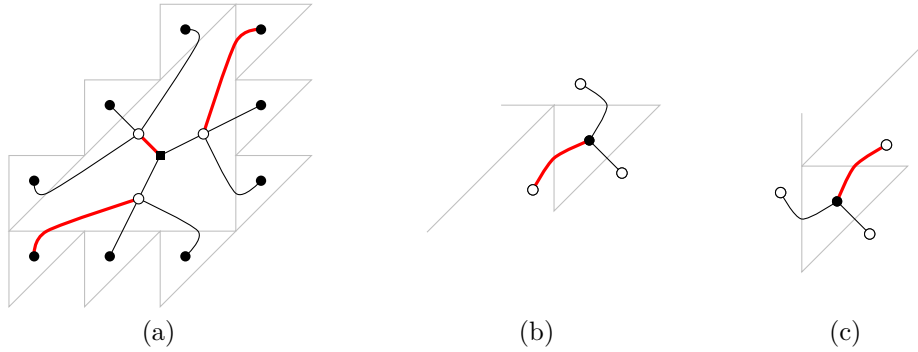


Abbildung 4.9: Konstruktion eines perfekten Matchings in G_S

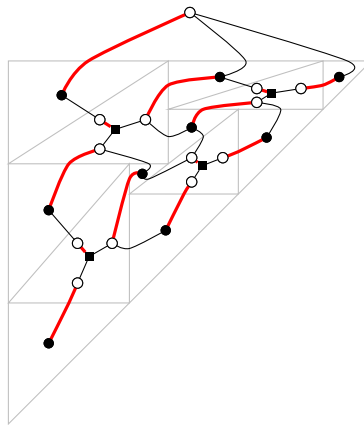


Abbildung 4.10: Ein Beispiel für ein perfektes Matching in G_S , das wie im Beweis von Proposition 4.8 konstruiert wurde

Proposition 4.10. *Es sei S ein Schnyder Wood auf einer 3-zusammenhängenden inneren Triangulierung G des Dreiecks (w_1, w_2, w_3) mit den inneren Knoten v_1, \dots, v_n und $s \in \mathbb{R}_{>0}^{n+3}$ eine Seitenverhältnisvorgabe. Weiter sei x die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems $A_S(s)x = b$. Falls $x \geq 0$ ist, gibt es eine im Inneren des Grunddreiecks bis auf Skalierung eindeutige Dreieckskontakt-darstellung \mathcal{D} von G , so dass s ein Seitenverhältnisvektor und S ein Schnyder Wood von \mathcal{D} ist. \mathcal{D} ist in diesem Fall genau dann nichtdegeneriert, wenn $x > 0$ ist, und kann aus x in Linearzeit berechnet werden. Falls x hingegen nicht nichtnegativ ist, existiert keine Dreieckskontakt-darstellung \mathcal{D} von G , so dass s ein Seitenverhältnisvektor und S ein Schnyder Wood von \mathcal{D} ist.*

Beweis. Analog zum Beweis von Proposition 3.9 ist klar, dass die Lösung des Gleichungssystems $A_S(s)x = b$ nichtnegativ ist, wenn eine rechtwinklige Dreieckskontakt-darstellung \mathcal{D} von G existiert, so dass s ein Seitenverhältnisvektor und S ein Schnyder Wood von \mathcal{D} ist. Es ist ebenfalls klar, dass \mathcal{D} im Inneren des Grunddreiecks bis auf Skalierung eindeutig ist und dass genau dann $x > 0$ ist, wenn \mathcal{D} nichtdegeneriert ist.

Es bleibt also zu zeigen, dass eine rechtwinklige Dreieckskontakt-darstellung \mathcal{D} von G

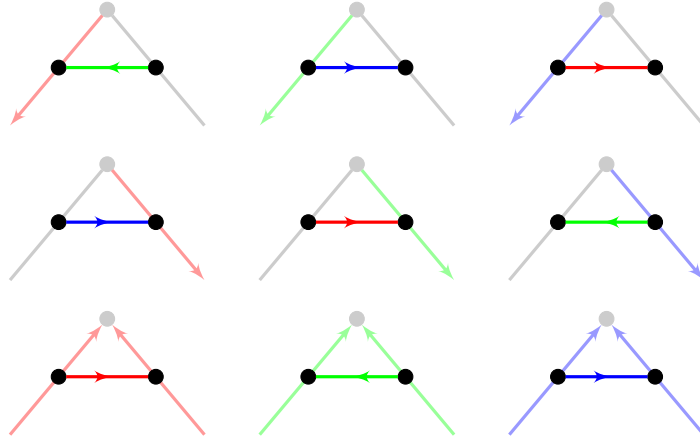


Abbildung 4.11: Orientierung und Färbung der Kanten im dualen Schnyder Wood. Die grauen Kanten können beliebig gefärbt und orientiert sein.

existiert, so dass s ein Seitenverhältnisvektor und S ein Schnyder Wood von \mathcal{D} ist, wenn die Lösung von $A_S(s)x = b$ nichtnegativ ist. Dazu definieren wir den Begriff des *dualen Schnyder Woods*. Der duale Schnyder Wood S^* zu einem Schnyder Wood S ist die Orientierung und Färbung der Kanten des Skelettgraphen G_{skel} der gesuchten Dreieckskontaktdarstellung, also des Kantengraphen von G , wie in Abbildung 4.11. Damit wir dieses Muster auch auf die äußeren Kanten von G anwenden können, orientieren wir diese zuvor im Uhrzeigersinn und färben die Kante (w_1, w_2) grün, die Kante (w_2, w_3) blau sowie die Kante (w_3, w_1) rot.

Die *Länge* einer Kante e von G_{skel} , die in der Fläche f von G liegt, definieren wir als den zweidimensionalen Vektor

$$\ell(e) := \begin{cases} (x_f, 0), & \text{falls } e \text{ in } S^* \text{ rot ist,} \\ (0, s_{\phi(f)}x_f), & \text{falls } e \text{ in } S^* \text{ blau ist,} \\ (x_f, s_{\phi(f)}x_f), & \text{falls } e \text{ in } S^* \text{ grün ist.} \end{cases}$$

Die Länge $\ell(P)$ eines gerichteten Kantenzuges P in G_{skel} definieren wir dann als die Summe der Längen der Kanten auf P , die in der Richtung durchlaufen werden, die der Orientierung in S^* entspricht, anzüglich der Summe der Längen der Kanten auf P , die in der entgegengesetzten Richtung durchlaufen werden.

Auf Grund dieser Definition der Länge eines Kantenzuges ist zunächst klar, dass alle gerichteten Randkreise einer inneren Fläche von G_{skel} die Länge 0 haben. Daher kann analog zu dem Beweis von Proposition 3.9 gezeigt werden, dass die Länge eines gerichteten Kantenzuges in G_{skel} nur von dem Anfangs- und Endknoten dieses Kantenzuges abhängt. v_0 sei der Knoten von G_{skel} , der zu der Kante $\{w_2, w_3\}$ gehört. Dann definieren wir die gesuchte rechtwinklige Dreieckskontaktdarstellung \mathcal{D} , indem wir die Koordinaten eines jeden Knotens v von G_{skel} als die Länge eines beliebigen Kantenzuges von v_0 nach v definieren und adjazente Knoten durch eine geradlinige Kante verbinden. Abbildung 4.12 zeigt ein Beispiel für diese Konstruktion.

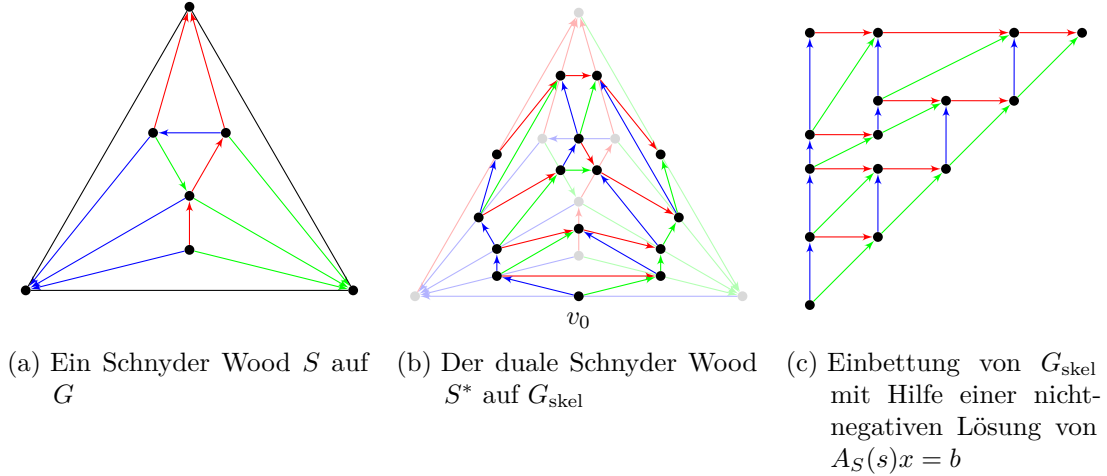


Abbildung 4.12: Konstruktion einer rechtwinkligen Dreieckskontakt Darstellung aus einer nichtnegativen Lösung von $A_S(s)x = b$

Dass \mathcal{D} tatsächlich eine rechtwinklige Dreieckskontakt Darstellung von G ist und dass s ein Seitenverhältnisvektor sowie S ein Schnyder Wood von \mathcal{D} ist, folgt analog zu dem Beweis von Proposition 3.9. \square

4.2.2 Der Algorithmus

Definition 4.14. Der Graph G sei eine 3-zusammenhängende innere Triangulierung des Dreiecks (w_1, w_2, w_3) , S ein Schnyder Wood auf G und $s \in \mathbb{R}_{>0}^n$ eine Seitenverhältnisvorgabe für G . Weiter sei $A_S(s)x = b$. Wir nennen dann eine innere Fläche f von G *nichtnegativ*, wenn $x_f \geq 0$ ist, und *negativ*, falls $x_f < 0$ ist. Eine Kante e von S heißt dann eine *Wechselkante* (bezüglich s), wenn e zu einer nichtnegativen und einer negativen inneren Fläche inzident ist.

Lemma 4.11. *Der Graph G sei eine 3-zusammenhängende innere Triangulierung des Dreiecks (w_1, w_2, w_3) , S ein Schnyder Wood auf G und $s \in \mathbb{R}_{>0}^n$ eine Seitenverhältnisvorgabe für G . Die Menge der Wechselkanten bezüglich s ist dann eine kantendisjunkte Vereinigung von gerichteten Zykeln in S .*

Der folgende Beweis stammt aus [Ruc11].

Beweis. Es sei E die Menge der Wechselkanten. Wir werden eine bijektive Abbildung $\phi : E \rightarrow E$ angeben, die zusätzlich die Eigenschaft erfüllt, dass für alle $e \in E$ der Endknoten von $\phi(e)$ mit dem Anfangsknoten von e übereinstimmt. Damit folgt dann, dass die Wechselkanten in kantendisjunkte gerichtete Zykeln partitioniert werden können.

Es sei $e = (v, w) \in E$. Wir nehmen zunächst an, dass $x_v \geq 0$ ist. Wir wandern nun von e ausgehend in die Richtung um v herum, in der e mit einer negativen

Fläche benachbart ist. Wir erhalten so eine alternierende Folge $e = e_1, f_1, e_2, f_2, \dots$ von Kanten und Flächen von S . Es sei k der kleinste Index, für den f_k nichtnegativ ist. Weiter sei $l \geq 2$ der kleinste Index, für den e_l eine ausgehende Kante von v ist. Dann ist $l > k$, da ansonsten $\sum_{i=1, \dots, l-1} x_{f_i} < 0$ wäre, im Widerspruch zu $x_v \geq 0$. Also können wir $\phi(e) := e_k$ definieren (siehe Abbildung 4.13). Wenn $x_v < 0$ ist, gehen wir analog vor, indem wir in die andere Richtung um den Knoten v wandern.

Nun möchten wir noch zeigen, dass ϕ bijektiv ist. Dazu geben wir die Umkehrabbildung ϕ^{-1} von ϕ an. Es sei wieder $e = (v, w) \in E$. Dann definieren wir $\phi^{-1}(e)$ als die erste Wechselkante, die wir erreichen, wenn wir von e aus in die Richtung um v herum wandern, in der e mit einer negativen Fläche benachbart ist, falls $x_v \geq 0$ ist, beziehungsweise in die Richtung um v herum wandern, in der e mit einer nichtnegativen Fläche benachbart ist, falls $x_v > 0$ ist. Dann ist offensichtlich $\phi \circ \phi^{-1} = \text{id}$ sowie $\phi^{-1} \circ \phi = \text{id}$ und damit ϕ bijektiv. \square

Nun sind wir in der Lage, einen Algorithmus zum Berechnen einer rechtwinkligen Dreieckskontaktdarstellung mit vorgegebenem Seitenverhältnisvektor zu beschreiben, der nach dem gleichen Schema abläuft wie Algorithmus 3.1:

Algorithmus 4.1 Berechnung einer rechtwinkligen Dreieckskontaktdarstellung mit vorgegebenem Seitenverhältnisvektor

Input: eine 3-zusammenhängende innere Triangulierung G des Dreiecks (w_1, w_2, w_3) und eine Seitenverhältnisvorgabe $s \in \mathbb{R}_{>0}^n$ für G

Output: eine rechtwinklige Dreieckskontaktdarstellung \mathcal{D} von G , so dass s ein Seitenverhältnisvektor von \mathcal{D} ist

```

 $S \leftarrow$  beliebiger Schnyder Wood auf  $G$ 
 $x \leftarrow$  Lösung des LGS  $A_S(s)x = b$ 
while  $x \not\geq 0$  do
    ändere in  $S$  die Orientierung aller Wechselkanten bezüglich  $s$ 
    färbe die Kanten von  $S$  so um, dass  $S$  wieder ein Schnyder Wood ist
     $x \leftarrow$  Lösung des LGS  $A_S(s)x = b$ 
end while
berechne aus  $x$  ein rechtwinkliges Dreieckskontaktsystem  $\mathcal{D}$ 
return  $\mathcal{D}$ 

```

Zur Laufzeit dieses Algorithmus lässt sich Folgendes feststellen: Das initiale Berechnen eines beliebigen Schnyder Woods ist nach Proposition 4.4 in Linearzeit möglich. Das Lösen des Gleichungssystems ist wieder in polynomialer Laufzeit realisierbar. Und das abschließende Berechnen des Dreieckskontaktsystems kann nach Proposition 4.10 in Linearzeit umgesetzt werden. Somit ist die Laufzeit des Algorithmus genau dann polynomial, wenn die Anzahl der Iterationen polynomial ist.

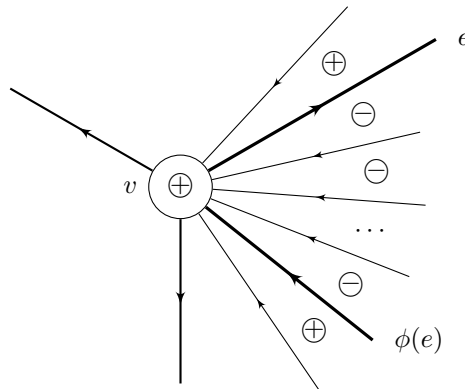


Abbildung 4.13: Die Abbildungen ϕ aus dem Beweis von Lemma 4.11

4.3 Existenzbeweis

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, Theorem 4.7 mit der Beweistechnik aus Abschnitt 3.3 zu beweisen. Dabei werden wir allerdings weniger ausführlich vorgehen und vor allem auf Unterschiede zu dem Beweis aus Abschnitt 3.3 eingehen.

4.3.1 Dekomposition

Wir beginnen wieder damit, eine Instanz des Problems in mehrere Teilinstanzen zu zerlegen. Dazu werden wir eine schwächere Version von Theorem 4.7 formulieren, indem wir die Aussage von 3-zusammenhängenden auf 4-zusammenhängende innere Triangulierungen des Dreiecks (w_1, w_2, w_3) einschränken, und anschließend zeigen, dass sich Theorem 3.5 auf diese schwächere Version zurückführen lässt. Dabei werden wir den gegebenen Graphen wieder in einen inneren und einen äußeren Graphen aufteilen. In Abschnitt 3.3.1 haben wir dabei zunächst die innere und dann die äußere Instanz gelöst, weshalb wir markierte Knoten einführen mussten, für die der Begriff des Seitenverhältnisses neu definiert wurde. Hier werden wir aber zunächst die äußere und anschließend die innere Instanz lösen, so dass wir mit den in Definition 4.12 definierten Seitenverhältnissen auskommen und keine markierten Knoten benötigen.

Proposition 4.12. *Der Graph G sei eine 4-zusammenhängende innere Triangulierung des Dreiecks (w_1, w_2, w_3) und $s \in \mathbb{R}_{>0}^{n+3}$ eine Seitenverhältnisvorgabe für G . Dann gibt es eine (möglicherweise degenerierte) rechtwinklige Dreieckskontaktendarstellung \mathcal{D} von G , so dass s ein Seitenverhältnisvektor von \mathcal{D} ist.*

Beweis von Theorem 4.7 mit Proposition 4.12. Wir beweisen die Behauptung per vollständiger Induktion über die Anzahl der trennenden 3-Kreise von G .

Falls G keinen trennenden 3-Kreis besitzt, ist G 4-zusammenhängend und die Aussage entspricht der von Proposition 4.12.

Es besitze G nun einen trennenden 3-Kreis C . Wir setzen $v_{n+1} := w_1$, $v_{n+2} := w_2$ sowie $v_{n+3} := w_3$ und nehmen insbesondere an, dass sich s_{n+1} , s_{n+2} sowie s_{n+3} auf w_1 , w_2 sowie w_3 beziehen. Die Knoten auf dem Kreis C seien im Uhrzeigersinn v_{c_1} , v_{c_2} sowie v_{c_3} ,

die Knoten, die im Inneren von C liegen, seien v_{i_1}, \dots, v_{i_k} und die inneren Knoten von G , die nicht im Inneren von C liegen, seien $v_{o_1}, \dots, v_{o_{n-k}}$. Wir definieren G_{out} und G_{in} als die induzierten Teilgraphen $G_{\text{out}} := G[v_{n+1}, v_{n+2}, v_{n+3}, v_{o_1}, \dots, v_{o_{n-k}}]$ und $G_{\text{in}} := G[v_{c_1}, v_{c_2}, v_{c_3}, v_{i_1}, \dots, v_{i_k}]$ von G . Außerdem sei f^* die Fläche von G_{out} , die von C begrenzt wird.

Wir setzen nun $s_{\text{out}} := [s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}, s_{o_1}, \dots, s_{o_{n-k}}]$. Nach der Induktionsvoraussetzung gibt es dann eine Dreieckskontaktendarstellung \mathcal{D}_{out} von G_{out} , so dass s_{out} ein Seitenverhältnisvektor von \mathcal{D}_{out} ist.

Falls das duale Dreieck D^* von \mathcal{D}_{out} , das zu f^* gehört, degeneriert ist, ist \mathcal{D}_{out} auch eine Dreieckskontaktendarstellung von G und s ist ein Seitenverhältnisvektor von \mathcal{D}_{out} . In diesem Fall sind wir also fertig.

Andernfalls sei D' das primale Dreieck von \mathcal{D}_{out} , zu dem D^* über eine diagonale Kante benachbart ist und von dem D^* daher das Seitenverhältnis erbt, und $v' \in \{v_{c_1}, v_{c_2}, v_{c_3}\}$ der zugehörige Knoten. Dann labeln wir v' in G_{in} als w'_2 und die anderen beiden Knoten aus $\{v_{c_1}, v_{c_2}, v_{c_3}\}$ entsprechend als w'_1 und w'_3 . Ferner setzen wir $s_{\text{in}} := [s_{c_1}, s_{c_2}, s_{c_3}, s_{i_1}, \dots, s_{i_k}]$. Nach der Induktionsvoraussetzung gibt es dann auch eine Dreieckskontaktendarstellung \mathcal{D}_{in} von G_{in} , so dass s_{in} ein Seitenverhältnisvektor von \mathcal{D}_{in} ist.

Jetzt skalieren wir das Grunddreieck von \mathcal{D}_{in} so, dass es die gleiche Größe wie D^* hat, und fügen es in \mathcal{D}_{out} an der Stelle von D^* ein. Das auf diese Weise konstruierte Dreieckskontaktsystem \mathcal{D} ist nach Konstruktion eine Dreieckskontaktendarstellung von G und s ist ein Seitenverhältnisvektor von \mathcal{D} . Damit sind wir auch in diesem Fall fertig.

Abbildung 4.14 zeigt ein Beispiel für einen solchen Dekompositionsschritt. \square

4.3.2 Zulässige Seitenverhältnisvektoren für einen festen Schnyder Wood

Analog zu Definition 3.14 definieren wir für eine gegebene 3-zusammenhängende innere Triangulierung G des Dreiecks (w_1, w_2, w_3) die Menge \mathcal{S}_S als die Menge der Seitenverhältnisvektoren von nichtdegenerierten Dreieckskontaktendarstellungen und $\bar{\mathcal{S}}_S$ als die Menge der Seitenverhältnisvektoren von allen (möglicherweise degenerierten) Dreieckskontaktendarstellungen von G mit dem zugehörigen Schnyder Wood S .

Lemma 4.13. *Der Graph G sei eine 3-zusammenhängende innere Triangulierung des Dreiecks (w_1, w_2, w_3) mit n Knoten und S ein Schnyder Wood auf G . Weiter sei $m := 3n - 8$. Dann gibt es Polynome p_1, \dots, p_m in den Variablen s_1, \dots, s_n mit $\deg p_j \leq 3n - 8$ für alle $j \in \{1, \dots, m\}$, so dass*

$$\mathcal{S}_S = \{s \in \mathbb{R}_{>0}^n : p_j(s) > 0 \text{ für } j = 1, \dots, m\}$$

und

$$\bar{\mathcal{S}}_S = \{s \in \mathbb{R}_{>0}^n : p_j(s) \geq 0 \text{ für } j = 1, \dots, m\}.$$

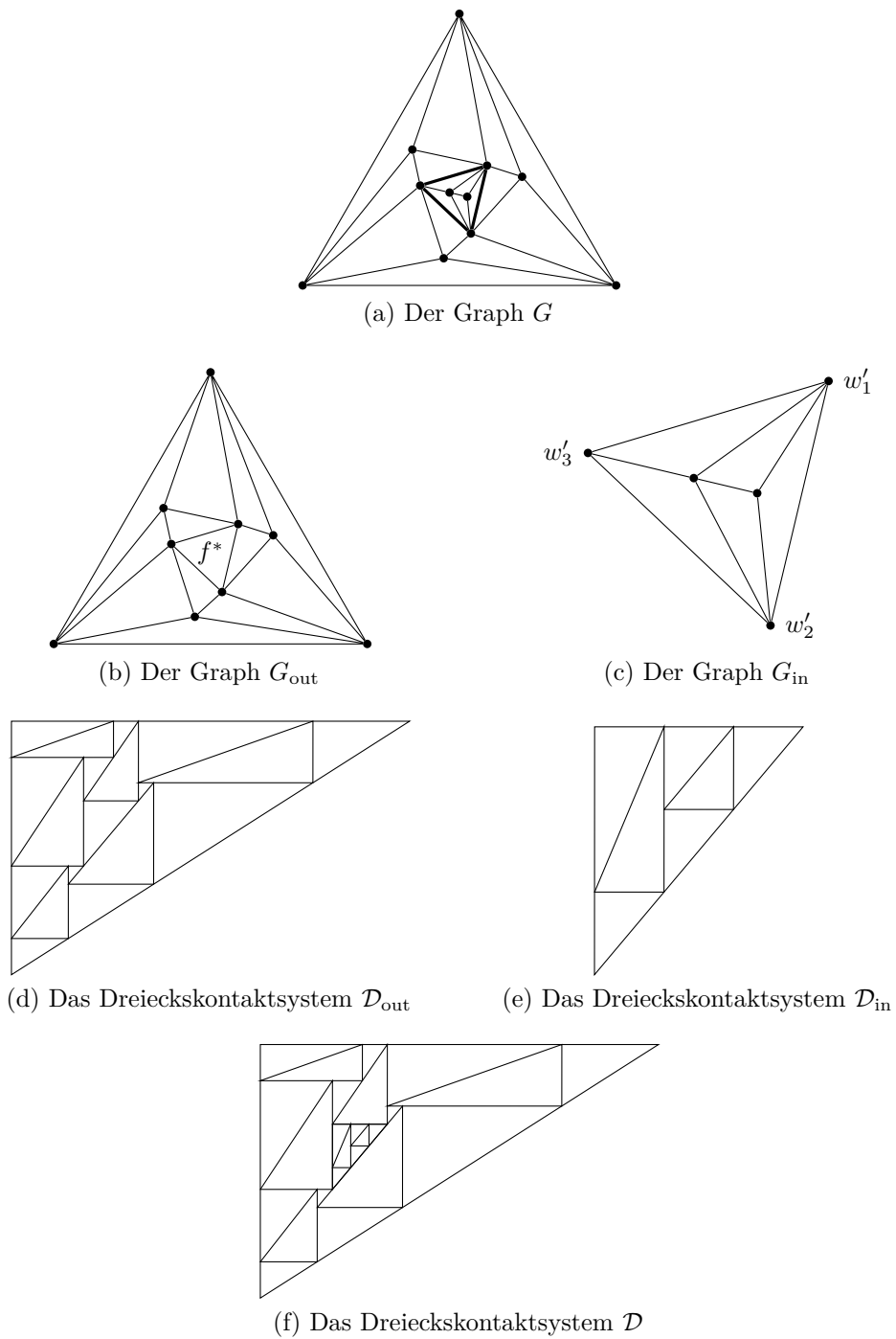


Abbildung 4.14: Die Dekomposition, die Theorem 4.7 auf Proposition 4.12 zurückführt

Lemma 4.13 kann analog zu Lemma 3.12 bewiesen werden. Denn $3(n-3)+1 = 3n-8$ ist gerade die Anzahl der Zeilen beziehungsweise Spalten der Matrix $A_S(s)$.

Auch die Aussage zur Einschränkung der Mengen \mathcal{S}_S und $\bar{\mathcal{S}}_S$ auf eine Gerade von Seitenverhältnisvektoren lässt sich genauso beweisen wie Lemma 3.15, das Pendant für Rechteckskontaktdarstellungen.

Lemma 4.14. *Der Graph G sei eine 3-zusammenhängende innere Triangulierung des Dreiecks (w_1, w_2, w_3) mit n Knoten und S ein Schnyder Wood auf G . Weiter seien $r_0, r_1 \in \mathbb{R}_{>0}^n$ zwei verschiedene Seitenverhältnisvorgaben und $r_t := (1-t)r_0 + tr_1$ für alle $0 < t < 1$. Dann gibt es offene Intervalle I_1, \dots, I_k mit $k \leq (3n-8)\lfloor \frac{3n-8}{2} \rfloor + 1$, so dass*

$$I_1 \cup \dots \cup I_k = \{t \in \mathbb{R} : 0 < t < 1, r_t \in \mathcal{S}_S\}$$

und

$$\bar{I}_1 \cup \dots \cup \bar{I}_k \subseteq \{t \in \mathbb{R} : 0 \leq t \leq 1, r_t \in \bar{\mathcal{S}}_S\}.$$

4.3.3 Benachbarte Schnyder Woods

Wir benötigen nun wieder eine Variante von Lemma 4.11, die sich auf den Fall bezieht, in dem die Lösung des Gleichungssystems nichtnegativ ist.

Definition 4.15. Der Graph G sei eine 3-zusammenhängende innere Triangulierung des Dreiecks (w_1, w_2, w_3) , S ein Schnyder Wood auf G und $s \in \mathbb{R}_{>0}^n$ eine Seitenverhältnisvorgabe für G . Weiter sei der Lösungsvektor x des linearen Gleichungssystems $A_S(s)x = b$ nichtnegativ. Wir nennen eine innere Fläche f von G *positiv*, wenn $x_f > 0$ ist, und *degeneriert*, wenn $x_f = 0$ ist. Eine Kante e von G heißt dann eine *schwache Wechselkante* (bezüglich s), wenn e zu einer positiven und einer degenerierten inneren Fläche inzident ist.

Lemma 4.15. *Der Graph G sei eine 3-zusammenhängende innere Triangulierung des Dreiecks (w_1, w_2, w_3) , S ein Schnyder Wood auf G und $s \in \mathbb{R}_{>0}^n$ eine Seitenverhältnisvorgabe für G . Weiter sei der Lösungsvektor x des linearen Gleichungssystems $A_S(s)x = b$ nichtnegativ. Die Menge der schwachen Wechselkanten bezüglich s von G ist dann eine kantendisjunkte Vereinigung von essentiellen Kreisen. Dabei haben die essentiellen Kreise alle die Länge drei und es gibt keine Kante, die von einem solchen Kreis in das Innere dieses Kreises führt.*

Der folgende Beweis verläuft analog zu dem Beweis von Lemma 3.16. Deshalb werden wir hier weniger ausführlich vorgehen.

Beweis. Mit Hilfe von Lemma 4.11 können wir die Zyklen, in die wir die Wechselkanten partitionieren, wieder explizit angeben. Dazu legen wir fest, dass eine Kante e auf demselben Zykel liegt wie $\phi(e)$ und auf diesem Zykel auch direkt auf $\phi(e)$ folgt. Wir gehen auch abermals davon aus, dass ein auf diese Weise konstruierter Zykel C ein Kreis ist, und werden dies später verifizieren. Die Tatsache, dass entweder im Inneren nur degenerierte und im Äußeren nur positive Flächen an C grenzen oder aber im

Inneren nur positive und im Äußeren nur degenerierte, gilt ebenfalls wieder und daher können wir hier auch die Begriffe der positiven und der degenerierten Seite von C übernehmen.

Als nächstes möchten wir wieder zeigen, dass C essentiell ist, indem wir zeigen, dass die positive Seite im Äußeren von C liegt und somit auch die ausgehenden Kanten der Knoten auf C im Äußeren von C liegen. Dazu nehmen wir an, dass die positive Seite im Inneren von C liegt, und führen diese Annahme durch doppeltes Abzählen der Kanten im Inneren von C zu einem Widerspruch. Es sei k die Länge von C , n_v die Anzahl der Knoten im Inneren von C und n_e die Anzahl der Kanten im Inneren von C . Mit der Eulerschen Formel erhalten wir dann

$$n_e = 3n_v + k - 3 \quad (4.1)$$

und durch Abzählen der Kanten im Inneren von C über deren Startknoten

$$n_e = 3n_v + 2k. \quad (4.2)$$

Wir berechnen nun die Differenz (4.2) – (4.1) und erhalten $k + 3 = 0$, im Widerspruch zu $k \geq 0$. Die Annahme, dass die positive Seite im Inneren von C liegt, ist also falsch und damit muss die positive Seite im Äußeren von C liegen.

Jetzt möchten wir zeigen, dass C tatsächlich ein Kreis ist. Dazu nehmen wir an, dass C kein Kreis ist, und führen diese Annahme zu einem Widerspruch. Es sei C' ein Teilzykel von C , der ein Kreis ist, und v^* der Knoten auf C' , an dem der restliche Teil von C abgeschnitten wurde. Dann folgt wieder, dass die positive Seite im Inneren von C' liegt. Wenn wir die Bezeichnungen k , n_v sowie n_e von oben für C' übernehmen, gilt die Gleichung (4.1) auch hier und, da es Kanten geben kann, die von v^* in das Äußere von C' führen, gilt anstelle von (4.2) die Ungleichung

$$n_e \geq 3n_v + 2(k - 1). \quad (4.3)$$

Indem wir die Differenz (4.3) – (4.1) berechnen, erhalten wir diesmal $k + 1 \leq 0$, wieder im Widerspruch zu $k \geq 0$. C ist also ein Kreis.

Als letztes beweisen wir wieder die Charakterisierung dieser essentiellen Kreise. Dazu sei C einer der auf obige Weise konstruierten essentiellen Kreise und die Bezeichnungen k , n_v sowie n_e für C wie oben. Dann gilt die Gleichung (4.1) auch in diesem Fall wieder und, da wir nun wissen, dass keine Kante von einem Knoten auf C in das Innere von C führt, anstelle von (4.2) oder (4.3) die Gleichung

$$n_e = 3n_v. \quad (4.4)$$

Indem wir die Differenz (4.4) – (4.1) berechnen, erhalten wir dann $k = 3$ und damit ist der Beweis abgeschlossen. \square

Definition 4.16. Es sei \mathcal{D} eine degenerierte Dreieckskontaktdarstellung einer 3-zusammenhängenden inneren Triangulierung des Dreiecks (w_1, w_2, w_3) und k sei die Anzahl der essentiellen Kreise, welche die schwachen Wechselkanten von \mathcal{D} bilden. Dann heißt \mathcal{D} *k-fach degeneriert*. Wir nennen \mathcal{D} auch *einfach degeneriert*, falls $k = 1$ ist, und *mehrfach degeneriert*, falls $k > 1$ ist.

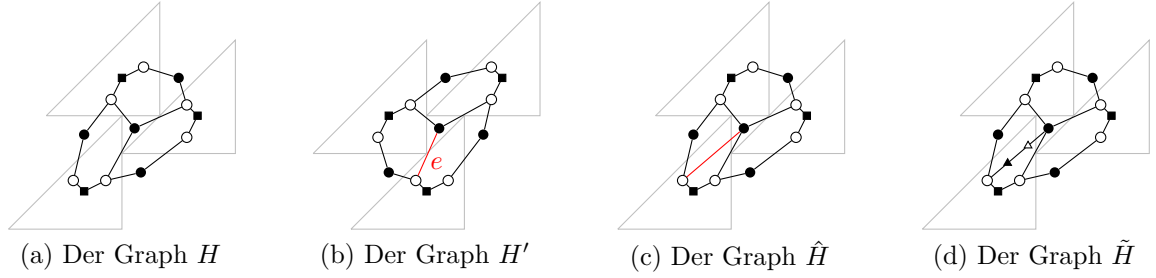


Abbildung 4.15: Ausschnitte aus den Hilfsgraphen aus dem Beweis von Lemma 4.16

Definition 4.17. Es sei G eine 3-zusammenhängende innere Triangulierung des Dreiecks (w_1, w_2, w_3) . Zwei Schnyder Woods S und S' auf G heißen *benachbart*, wenn die Orientierung der Kanten in S' aus der Orientierung der Kanten in S durch das Umdrehen genau eines essentiellen Kreises C entsteht. C heißt dann der *Differenzkreis* von S und S' .

Lemma 4.16. *Der Graph G sei eine 4-zusammenhängende innere Triangulierung des Dreiecks (w_1, w_2, w_3) und S sowie S' seien zwei benachbarte Schnyder Woods auf G . Weiter seien $s, s' \in \mathbb{R}_{>0}^n$ zwei Seitenverhältnisvorgaben für G . Dann gilt $\det(A_S(s)) \det(A_{S'}(s')) < 0$.*

Der folgende Beweis verläuft analog zu dem Beweis von Lemma 3.17, weshalb wir hier weniger ausführlich vorgehen werden.

Beweis. Wir können wieder ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $s = s'$ ist. Und unser Ziel ist, zu zeigen, dass ein beliebiges perfektes Matching σ des Graphen $H := G_{A_S(s)}$ und ein beliebiges perfektes Matching σ' des Graphen $H' := G_{A_{S'}(s)}$ die gleiche Signatur besitzen.

Es sei C der Differenzkreis von S und S' . Da G 4-zusammenhängend ist, bildet C dann den Rand einer inneren Fläche f von G . e sei die Kante, die in σ' inzident zu dem Knoten f ist, und \tilde{H} sei der Graph, der aus H durch Hinzufügen von e entsteht. Dann sind σ und σ' beide perfekte Matchings von \tilde{H} .

Aus \tilde{H} erzeugen wir noch einen weiteren Graphen \hat{H} , indem wir die Kante e mit zwei Zwischenknoten in drei Kanten zerteilen. \tilde{H} und \hat{H} sind dann wieder ebene bipartite Graphen. Abbildung 4.15 illustriert die Graphen H , H' , \hat{H} sowie \tilde{H} .

In H sind alle inneren Flächen von Kreisen der Länge 6 begrenzt. Die Kante e zerlegt einen dieser Kreise in zwei Kreise der Länge 4. Durch die beiden Zwischenknoten haben diese Kreise in \hat{H} allerdings wieder die Länge 6. Also sind in \hat{H} alle inneren Flächen f von Kreisen einer Länge $\ell_f \equiv_4 2$ begrenzt.

Unter diesen Voraussetzungen folgt dann analog zum Beweis von Lemma 3.17, dass $\text{signat}(\sigma') = -\text{signat}(\sigma)$ und damit $\det(A_S(s)) \det(A_{S'}(s)) < 0$ ist. □

Lemma 4.17. *Es sei G eine 4-zusammenhängende innere Triangulierung des Dreiecks (w_1, w_2, w_3) und $s \in \mathbb{R}_{>0}^n$ eine Seitenverhältnisvorgabe für G . Weiter seien S*

und S' zwei benachbarte Schnyder Woods auf G und es existiere eine nichtdegenerierte rechtwinklige Dreieckskontaktdarstellung von G mit dem Seitenverhältnisvektor s und dem Schnyder Wood S . Dann existiert keine rechtwinklige Dreieckskontaktdarstellung von G mit dem Seitenverhältnisvektor s und dem Schnyder Wood S' .

Beweis. Es sei C der Differenzkreis von S und S' . Da G 4-zusammenhängend ist, ist C dann der Rand einer inneren Fläche f von G . Daher unterscheiden sich die Matrizen $A_S(s)$ und $A_{S'}(s)$ nur in der Spalte, die sich auf f bezieht. Daraus folgt die Behauptung wie im Beweis von Lemma 3.18. \square

Lemma 4.18. *Es sei G eine 4-zusammenhängende innere Triangulierung des Dreiecks (w_1, w_2, w_3) mit den inneren Knoten v_1, \dots, v_n und $\{s_t : 0 \leq t \leq 1\}$ eine Gerade von Seitenverhältnisvektoren. Es existiere ein $0 < t_0 < 1$, so dass es eine degenerierte rechtwinklige Dreieckskontaktdarstellung \mathcal{D}_{t_0} von G mit dem Seitenverhältnisvektor s_{t_0} gibt, sowie ein $\varepsilon > 0$, so dass es für alle $t_0 - \varepsilon \leq t < t_0$ eine nichtdegenerierte rechtwinklige Dreieckskontaktdarstellung \mathcal{D}_t von G mit dem Seitenverhältnisvektor s_t und dem Schnyder Wood S gibt. Dann existiert für alle $\varepsilon' > 0$ ein Seitenverhältnisvektor $s \in B(s_{t_0}, \varepsilon')$, so dass es eine einfach degenerierte rechtwinklige Dreieckskontaktdarstellung von G mit dem Seitenverhältnisvektor s und dem Schnyder Wood S gibt.*

Beweis. Falls \mathcal{D}_{t_0} bereits eine einfach degenerierte Rechteckskontaktdarstellung ist, ist nichts zu zeigen.

Mit Hilfe des Algorithmus aus dem Beweis von Proposition 4.3 können wir die Dreieckskontaktdarstellungen \mathcal{D}_t für alle $t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0$ rekonstruieren, wenn uns nur die drei äußeren primalen Dreiecke und die y -Koordinaten der Grundseiten aller inneren primalen Dreiecke gegeben sind. Die Idee ist es nun, ein geeignetes $t_0 - \varepsilon < t' < t_0$ zu wählen und in $\mathcal{D}_{t'}$ die y -Koordinate der Grundseite genau eines inneren Dreiecks zu ändern, so dass die dabei entstehende Dreieckskontaktdarstellung einfach degeneriert ist.

Dazu wählen wir zunächst, welches duale Dreieck in $\mathcal{D}_{t'}$ degeneriert sein soll. Jedes in \mathcal{D}_{t_0} degenerierte duale Dreieck wird in \mathcal{D}_{t_0} jeweils durch einen einzigen Punkt dargestellt. Wir wählen nun dasjenige degenerierte duale Dreieck D aus, das am weitesten links liegt und, falls es mehrere solche gibt, von diesen am weitesten oben liegt.

Es sei $h_{\min} > 0$ die minimale Höhe, $h_{\max} > 0$ die maximale Höhe, $b_{\min} > 0$ die minimale Breite und $b_{\max} > 0$ die maximale Breite aller primalen Dreiecke in allen \mathcal{D}_t , $t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0$. Außerdem sei $\tilde{h}_{\min} > 0$ die minimale Höhe und $\tilde{b}_{\min} > 0$ die minimale Breite aller dualen Dreiecke, die in \mathcal{D}_{t_0} nicht degeneriert sind, in allen \mathcal{D}_t , $t_0 - \varepsilon \leq t \leq t_0$. Wir setzen nun

$$\delta := \min \left\{ \frac{\varepsilon' h_{\min}}{2 b_{\max}}, \frac{\varepsilon' b_{\min}^2}{4n h_{\max} + 2b_{\max} + 2n\varepsilon' b_{\min}}, \tilde{h}_{\min}, \tilde{b}_{\min} \right\} > 0.$$

Dann gibt es ein $t_0 - \varepsilon < t' < t_0$, so dass in $\mathcal{D}_{t'}$ die Höhe von D kleiner als $\min\{\delta, \frac{h_{\min}}{b_{\max}}\delta\}$, die Breite von D kleiner als δ und $\|s_{t_0} - s_{t'}\|_{\infty} \leq \frac{\varepsilon'}{2}$ ist.

Es sei D' das primale Dreieck von $\mathcal{D}_{\mathcal{D}'}$, welches das duale Dreieck D über eine vertikale Kante berührt, D'' das primale Dreieck von $\mathcal{D}_{\mathcal{D}'}$, das D über eine diagonale Kante berührt, und D''' das primale Dreieck von $\mathcal{D}_{\mathcal{D}'}$, das D über eine horizontale Kante berührt. Wir unterscheiden nun, ob der 3-Kreis C in G , der den Rand der Fläche bildet, die zu D gehört, in S im oder gegen den Uhrzeigersinn orientiert ist.

Wenn C in S im Uhrzeigersinn orientiert ist, definieren wir \mathcal{D}' , indem wir die y -Koordinate der Grundseite von D''' auf die y -Koordinate der Grundseite von D'' in $\mathcal{D}_{\mathcal{D}'}$ setzen und die y -Koordinaten der Grundseiten aller anderen primalen Dreiecke aus $\mathcal{D}_{\mathcal{D}'}$ übernehmen. Da dann die y -Koordinaten der Grundseiten von D'' und D''' in \mathcal{D}' gleich sind, ist D in \mathcal{D}' degeneriert. Um zu zeigen, dass der Algorithmus aus dem Beweis von Proposition 4.3 noch auf die neuen y -Koordinaten der Grundseiten der primalen Dreiecke angewendet werden kann und alle anderen dualen Dreiecke in \mathcal{D}' nichtdegeneriert sind, bleibt nur noch zu zeigen, dass die Differenz Δ_y der y -Koordinaten der Grundseite von D''' in $\mathcal{D}_{\mathcal{D}'}$ und in \mathcal{D}' kleiner als die Höhe $h(\tilde{D})$ des obersten dualen Dreiecks \tilde{D} in $\mathcal{D}_{\mathcal{D}'}$ ist, das D' über eine diagonale Kante berührt. Doch da Δ_y genau die Höhe von D in $\mathcal{D}_{\mathcal{D}'}$ ist, ist $\Delta_y < \delta$ und auf Grund der Wahl von D außerdem $\tilde{h}_{\min} \leq h(\tilde{D})$, zusammen also $\Delta_y < \delta \leq \tilde{h}_{\min} \leq h(\tilde{D})$ (siehe Abbildung 4.16 (a)).

Falls C in S hingegen gegen den Uhrzeigersinn orientiert ist, definieren wir die Dreieckskontaktdarstellung \mathcal{D}' von G , indem wir die y -Koordinate der Grundseite von D' auf die y -Koordinate der Grundseite von D''' in $\mathcal{D}_{\mathcal{D}'}$ setzen und die y -Koordinaten der Grundseiten aller anderen primalen Dreiecke aus $\mathcal{D}_{\mathcal{D}'}$ übernehmen. D ist dann in \mathcal{D}' erneut degeneriert, da die y -Koordinaten der Grundseiten von D' und D''' gleich sind. Wir möchten wieder zeigen, dass die Konstruktion von \mathcal{D}' mit den gegebenen y -Koordinaten wohldefiniert ist und in \mathcal{D}' außer D kein anderes duales Dreieck degeneriert ist. Dazu müssen wir zeigen, dass die Differenz Δ_y der y -Koordinaten der Grundseite von D' in $\mathcal{D}_{\mathcal{D}'}$ und \mathcal{D}' kleiner als die Höhe $h(\tilde{D})$ des untersten dualen Dreiecks \tilde{D} in $\mathcal{D}_{\mathcal{D}'}$ ist, das D' über eine diagonale Kante berührt. Doch da Δ_y wieder genau die Höhe von D in $\mathcal{D}_{\mathcal{D}'}$ ist, ist $\Delta_y < \delta$ und auf Grund der Wahl von D außerdem wieder $\tilde{h}_{\min} \leq h(\tilde{D})$, zusammen also $\Delta_y < \delta \leq \tilde{h}_{\min} \leq h(\tilde{D})$ (siehe Abbildung 4.16 (b)).

Es seien D_1, \dots, D_n die inneren primalen Dreiecke in der Reihenfolge, in der sie in \mathcal{D}' konstruiert werden. Wir möchten jetzt per vollständiger Induktion über k zeigen, dass die Differenz der x -Koordinaten des rechten Segments von D_k in $\mathcal{D}_{\mathcal{D}'}$ und \mathcal{D}' höchstens $k\delta$ beträgt. Wir erinnern daran, dass sich die zu w_1, w_2 und w_3 gehörigen Dreiecke gar nicht ändern, also insbesondere die beiden Dreiecke, die vor den inneren Dreiecken konstruiert werden. Es sei nun $k \in \{1, \dots, n\}$ und v der innere Knoten von G , der zu D_k gehört. Wir schreiben dann auch D_v für D_k . (v, u) sei die grüne ausgehende Kante von v in S und D_u das zu u gehörige primale Dreieck. Wenn C im Uhrzeigersinn orientiert und $D_v = D'''$ ist, ändert sich die x -Koordinate der rechten Seite von D_v um die Breite von D in $\mathcal{D}_{\mathcal{D}'}$ und damit um weniger als $\delta \leq k\delta$. Das Gleiche gilt für den Fall, in dem C gegen den Uhrzeigersinn orientiert und $D_v = D'$ ist. In allen anderen Fällen ändert sich die y -Koordinate der Grundseite von D_v nicht. In der Iteration, in der D_v in \mathcal{D}' konstruiert wird, ist D_u bereits konstruiert. Wir unterscheiden nun mehrere Fälle bezüglich D_u .

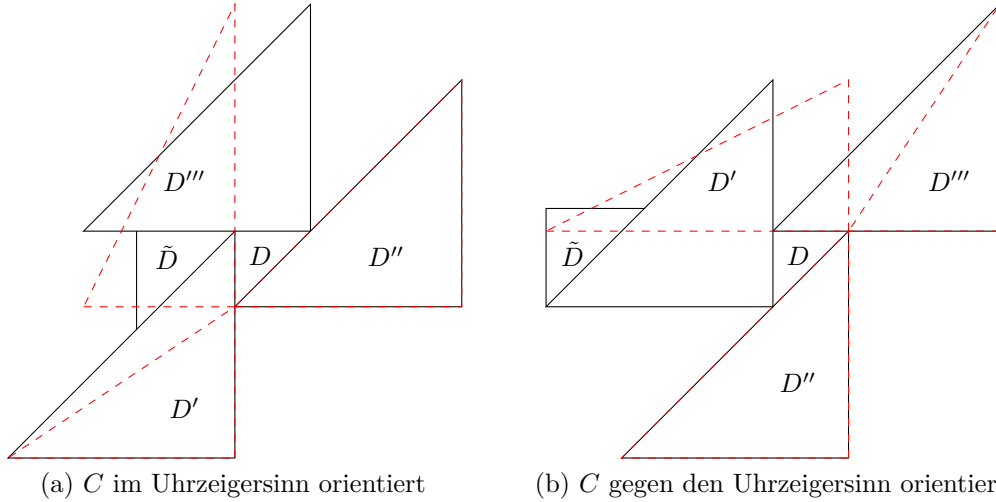


Abbildung 4.16: Die Konstruktion von \mathcal{D}' aus $\mathcal{D}_{t'}$. Die Lage der Dreiecke in $\mathcal{D}_{t'}$ ist schwarz dargestellt und die Lage von \mathcal{D}' , \mathcal{D}'' sowie \mathcal{D}''' in \mathcal{D}' rot.

- Im ersten Fall haben sich die y -Koordinaten der linken unteren Ecke und der oberen Ecke von D_u nicht geändert. Die x -Koordinaten dieser beiden Ecken haben sich nach der Induktionsvoraussetzung jeweils höchstens um $(k-1)\delta$ geändert. Damit ist aber sofort klar, dass sich auch die x -Koordinate der rechten Seite von D_v höchstens um $(k-1)\delta \leq k\delta$ ändert (siehe Abbildung 4.17 (a)).
- Als nächstes betrachten wir den Fall, in dem sich die y -Koordinate der oberen Ecke von D_u geändert hat. Dann hat sich diese um die Höhe von D in \mathcal{D}_{t_0} geändert, also höchstens um $\frac{h_{\min}}{b_{\max}}\delta$. Und die y -Koordinate der linken unteren Ecke von D_u hat sich dann gar nicht geändert. h und b seien die Höhe und Breite von D_u in $\mathcal{D}_{t'}$ und d sei wie in Abbildung 4.17 (b) oder Abbildung 4.17 (c) definiert. Dann ist

$$d \leq \frac{b}{h} \frac{h_{\min}}{b_{\max}} \delta \leq \delta$$

und damit folgt ähnlich wie im ersten Fall, dass sich die x -Koordinate der rechten Seite von D_v höchstens um $d + (k-1)\delta \leq k\delta$ ändert.

- Als letztes betrachten wir noch den Fall, in dem sich die y -Koordinate der linken unteren Ecke von D_u geändert hat. Dann hat sich diese wieder um die Höhe von D in $\mathcal{D}_{t'}$ geändert, also höchstens um $\frac{h_{\min}}{b_{\max}}\delta$. Und die y -Koordinate der oberen Ecke von D_u hat sich dann gar nicht geändert. h und b seien erneut die Höhe und Breite von D_u in $\mathcal{D}_{t'}$ und d sei wie in Abbildung 4.17 (d) oder Abbildung 4.17 (e) definiert. Dann ist wieder

$$d \leq \frac{b}{h} \frac{h_{\min}}{b_{\max}} \delta \leq \delta$$

und damit folgt ähnlich wie im ersten Fall, dass sich die x -Koordinate der rechten Seite von D_v höchstens um $d + (k-1)\delta \leq k\delta$ ändert.

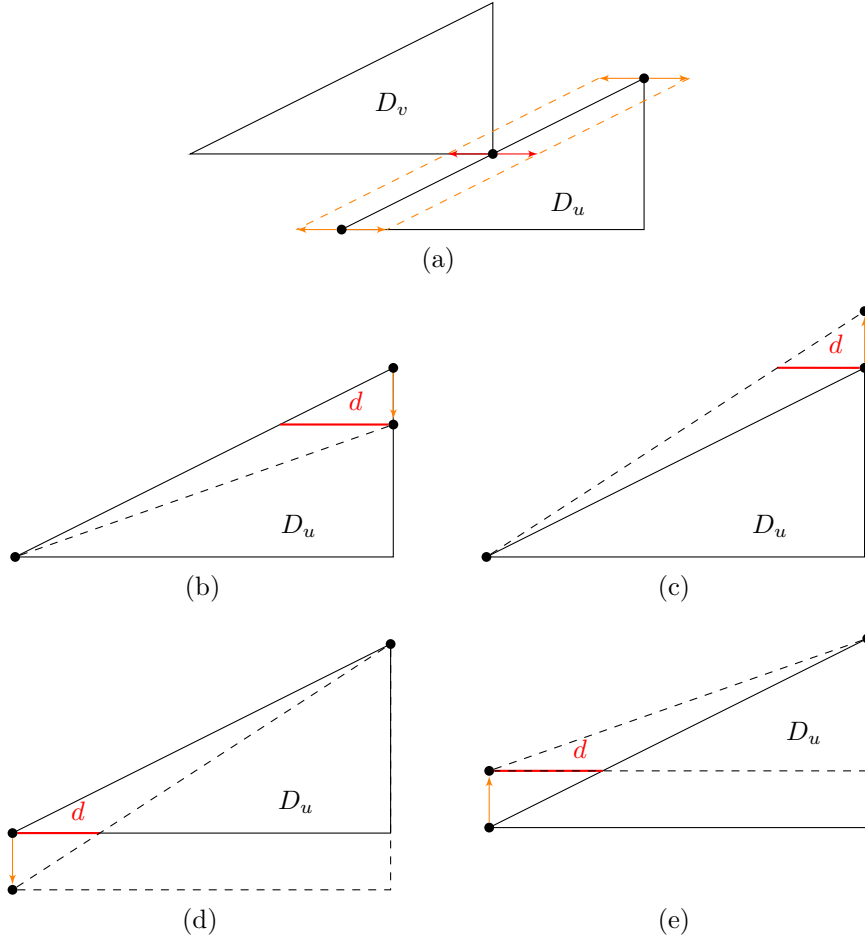


Abbildung 4.17: Änderung der x -Koordinate des rechten Segments des primalen Dreiecks D_v wie im Beweis von Lemma 4.18

Es sei nun \hat{D} ein beliebiges inneres primales Dreieck. h und b seien die Höhe und die Breite von \hat{D} in \mathcal{D}_v sowie h' und b' die Höhe und Breite von \hat{D} in \mathcal{D}' . Dann ist $|h - h'| \leq \delta$ und $|b - b'| \leq 2n\delta$. Damit erhalten wir

$$\frac{h}{b} - \frac{h'}{b'} \leq \frac{h}{b} - \frac{h - \delta}{b + 2n\delta} = \frac{2n\delta h + \delta b}{b(b + 2n\delta)} \leq \frac{2n\delta h_{\max} + \delta b_{\max}}{b_{\min}(b_{\min} - 2n\delta)} \leq \frac{\varepsilon'}{2}$$

sowie

$$\frac{h'}{b'} - \frac{h}{b} \leq \frac{h + \delta}{b - 2n\delta} - \frac{h}{b} = \frac{2n\delta h + \delta b}{b(b - 2n\delta)} \leq \frac{2n\delta h_{\max} + \delta b_{\max}}{b_{\min}(b_{\min} - 2n\delta)} \leq \frac{\varepsilon'}{2}.$$

Die Differenz der Seitenverhältnisse von \hat{D} in \mathcal{D}_v und in \mathcal{D}' beträgt also

$$\left| \frac{h}{b} - \frac{h'}{b'} \right| = \max \left\{ \frac{h}{b} - \frac{h'}{b'}, \frac{h'}{b'} - \frac{h}{b} \right\} \leq \frac{\varepsilon'}{2}.$$

Es gilt also $\|s_{t'} - s\|_{\infty} \leq \frac{\varepsilon'}{2}$ und damit

$$\|s_{t_0} - s\|_{\infty} \leq \|s_{t_0} - s_{t'}\|_{\infty} + \|s_{t'} - s\|_{\infty} \leq \frac{\varepsilon'}{2} + \frac{\varepsilon'}{2} = \varepsilon'$$

beziehungsweise $s \in B(s_{t_0}, \varepsilon')$. □

Lemma 4.19. *Es sei G eine 4-zusammenhängende innere Triangulierung des Dreiecks (w_1, w_2, w_3) und $\{s_t : 0 \leq t \leq 1\}$ eine Gerade von Seitenverhältnisvektoren. Es existiere ein $0 < t_0 < 1$, so dass es eine degenerierte rechtwinklige Dreieckskontakt-darstellung \mathcal{D}_{t_0} von G mit dem Seitenverhältnisvektor s_{t_0} gibt, sowie ein $\varepsilon > 0$, so dass es für alle $t_0 - \varepsilon \leq t < t_0$ eine nichtdegenerierte rechtwinklige Dreieckskontakt-darstellung \mathcal{D}_t von G mit dem Seitenverhältnisvektor s_t und dem Schnyder Wood S gibt. Dann existiert für alle $\varepsilon' > 0$ ein Seitenverhältnisvektor $s \in B(s_{t_0}, \varepsilon')$, so dass es eine nichtdegenerierte rechtwinklige Dreieckskontakt-darstellung von G mit dem Seitenverhältnisvektor s und einem benachbarten Schnyder Wood S' von S gibt.*

Dieses Lemma lässt sich analog zu Lemma 3.20 aus dem letzten Kapitel beweisen.

4.3.4 Abschluss des Beweises

Wir können jetzt Proposition 4.12 genauso beweisen, wie wir Proposition 3.11 in Abschnitt 3.3.4 bewiesen haben. Denn für alle Sätze über Rechteckskontakt-darstellungen, die wir in diesem Beweis verwendet haben, haben wir bereits Entsprechungen für rechtwinklige Dreieckskontakt-darstellungen bewiesen. Damit ist insbesondere auch der Beweis von Theorem 4.7 abgeschlossen.

Wir möchten auch dieses Kapitel wieder mit Bemerkungen zur Degeneriertheit der Dreieckskontakt-darstellungen abschließen. Wir haben gesehen, dass zum Einen duale Dreiecke zu einem Punkt degeneriert sein können, so dass sich dann drei primale Dreiecke in diesem Punkt berühren, und zum Anderen auch primale Dreiecke zu einem Punkt degeneriert sein können. Wenn der gegebene Graph G 4-zusammenhängend ist, können wir zumindest Letzteres ausschließen, wie der Beweis von Proposition 4.12 zeigt. Degenerierte duale Dreiecke können wir aber auch in diesem Fall nicht ausschließen. Im Unterschied zu Rechteckskontakt-darstellungen wurde für gleichseitige Dreieckskontakt-darstellungen bislang keine Eindeutigkeit bewiesen. Das heißt, es kann nicht ausgeschlossen werden, dass in dem Fall, in dem unser Verfahren eine degenerierte Dreieckskontakt-darstellung liefert, nicht ein nichtdegenerierte Dreieckskontakt-darstellung mit einem anderen Schnyder Wood existiert.

5 Fazit und Ausblick

Wir möchten nun noch einmal rekapitulieren, was die wesentlichen Resultate dieser Arbeit sind, und im Anschluss überlegen, in welche Richtungen man jetzt weiterarbeiten könnte.

5.1 Fazit

Wir haben in dieser Arbeit zunächst einen neuen Existenzbeweis für Squarings, also Rechteckskontaktdarstellungen mit Quadraten, präsentiert. Da es für diese Existenzaussage jedoch bereits einige Beweise gibt, stand das reine Beweisen dieser Aussage dabei nicht im Zentrum des Interesses. Vielmehr war das Ziel, einen Existenzbeweis zu finden, der auf den Ideen von Algorithmus 3.1 beruht, so dass der Beweis anschließend eventuell dabei weiterhelfen kann, die Korrektheit dieses Algorithmus zu beweisen.

Dann haben wir einen neuen Existenzbeweis für Dreieckskontaktdarstellungen mit gleichzeitigen Dreiecken vorgeführt. In diesem Fall ist der Beweis auch als Beweis der Existenzaussage selbst interessant. Denn der einzige bisher bekannte Beweis dieser Aussage beruht auf dem Monstertheorem von Schramm und ist damit weniger elementar als unser Beweis. Aber der Aspekt, möglicherweise bei dem Beweis der Korrektheit des Algorithmus weiterzuhelfen, auf dem er beruht, stand auch bei diesem Beweis im Vordergrund.

5.2 Ausblick

Die zentrale offene Frage ist, was die Komplexität der Berechnung von Squarings und von Dreieckskontaktdarstellungen mit homothetischen gleichseitigen Dreiecken ist. Insbesondere interessiert uns, ob und gegebenenfalls nach wie vielen Iterationen die Algorithmen 3.1 und 4.1 terminieren.

Eine andere Richtung, in die man weiterarbeiten könnte, ist es, neue Probleme zu finden, auf die man den Apparat aus dieser Arbeit anwenden kann. Da Felsner in [Fel01] Schnyder Woods für beliebige 3-zusammenhängende ebene Graphen einführt, ist die Vermutung aus [GLP11], die besagt, dass jeder 3-zusammenhängende ebene Graph primal-duale Kontaktdarstellung mit rechtwinkligen Dreiecken besitzt, ein möglicher Kandidat dafür.

Literatur

- [Bre00] E. Brehm. „3-orientations and Schnyder 3-tree-decompositions“. Diplomarbeit. Freie Universität Berlin, 2000.
- [FM01] H. de Fraysseix und P. O. de Mendez. „On topological aspects of orientations“. In: *Discrete Mathematics* 229.1 (2001), S. 57–72.
- [Fel01] S. Felsner. „Convex drawings of planar graphs and the order dimension of 3-polytopes“. In: *Order* 18.1 (2001), S. 19–37.
- [Fel04] S. Felsner. „Lattice structures from planar graphs“. In: *Electron. J. Combin* 11.1 (2004), R15.
- [Fel09] S. Felsner. „Triangle contact representations“. In: *Midsummer Combinatorial Workshop, Praha*. Citeseer. 2009.
- [Fel13] S. Felsner. „Rectangle and square representations of planar graphs“. In: *Thirty Essays on Geometric Graph Theory*. Springer, 2013, S. 213–248.
- [Fus10] É. Fusy. „Combinatoire des cartes planaires et applications algorithmiques“. Diss. École Polytechnique, 2010.
- [GLP11] D. Gonçalves, B. Lévêque und A. Pinlou. „Triangle contact representations and duality“. In: *Graph Drawing*. Springer. 2011, S. 262–273.
- [He93] X. He. „On finding the rectangular duals of planar triangular graphs“. In: *SIAM Journal on Computing* 22.6 (1993), S. 1218–1226.
- [KH97] G. Kant und X. He. „Regular edge labeling of 4-connected plane graphs and its applications in graph drawing problems“. In: *Theoretical Computer Science* 172.1 (1997), S. 175–193.
- [Koe36] P. Koebe. *Kontaktprobleme der konformen Abbildung*. Hirzel, 1936.
- [Lov09] L. Lovász. „Geometric Representations of Graphs“. 2009.
- [Pic11] T. Picchetti. „Finding a square dual of a graph“. 2011.
- [Ruc11] J. Rucker. „Kontaktdarstellungen von planaren Graphen“. Diplomarbeit. Technische Universität Berlin, 2011.
- [Sch90a] W. Schnyder. „Embedding planar graphs on the grid“. In: *Proceedings of the first annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*. Society for Industrial und Applied Mathematics. 1990, S. 138–148.
- [Sch90b] O. Schramm. „Packing two-dimensional bodies with prescribed combinatorics and applications to the construction of conformal and quasiconformal mappings“. Diss. Princeton University, 1990.

- [Sch93] O. Schramm. „Square tilings with prescribed combinatorics“. In: *Israel Journal of Mathematics* 84.1-2 (1993), S. 97–118.
- [Sch96] O. Schramm. „Conformal uniformization and packings“. In: *Israel Journal of Mathematics* 93.1 (1996), S. 399–428.
- [Sei15] F. Seibert. „Transversal structures and contact representations of planar graphs with homothetic squares“. Masterarbeit. Technische Universität Berlin, 2015.
- [ddR94] H. de Fraysseix, P. O. de Mendez und P. Rosenstiehl. „On triangle contact graphs“. In: *Combinatorics, Probability and Computing* 3.02 (1994), S. 233–246.