

Technische Universität Berlin
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik

Bachelorarbeit

Ein Luftdruckparadigma zur Optimierung von Zerlegungen

vorgelegt von
Hendrik Schrezenmaier*
aus Bonn

Berlin 2013

Erstgutachter: Prof. Dr. Stefan Felsner
Zweitgutachter: Prof. Dr. Martin Skutella

*berlinhendrik@netscape.net

Eidesstattliche Versicherung

Hiermit erkläre ich an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und eigenhändig sowie ausschließlich unter Verwendung der aufgeführten Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Berlin, den 14. April 2013

HENDRIK SCHREZENMAIER

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit Floorplans und deren Optimierung. Wir orientieren uns bei unseren Darstellungen überwiegend an den Darstellungen von Felsner in [5].

Ein Floorplan ist eine Zerlegung eines Rechtecks in endlich viele Teilrechtecke und unter der Optimierung von Floorplans verstehen wir, dass die kombinatorische Anordnung der Teilrechtecke erhalten bleibt, der Flächeninhalt der einzelnen Teilrechtecke jedoch jeweils einen vorgegebenen Wert annimmt, wobei wir an Stelle des Begriffs des Flächeninhalts einen allgemeineren Massebegriff verwenden werden. Wir werden zwei verschiedene Modelle vorstellen, was mit „gleicher kombinatorischer Anordnung der Teilrechtecke“ genau gemeint ist. Das erste Modell (starke Äquivalenz) wird sich als zu starke Bedingung herausstellen, so dass nicht immer ein Floorplan mit den gewünschten Eigenschaften existiert. Für das zweite Modell (schwache Äquivalenz) hingegen werden wir zeigen, dass immer ein passender Floorplan gefunden werden kann. Für den Spezialfall, dass die Masse eines Teilrechtecks dessen Flächeninhalt ist, gibt es dafür z. B. einen Beweis von Eppstein u. a., den wir auf unseren allgemeineren Massebegriff verallgemeinern werden. Als zweiten Beweis werden wir den Beweis von Felsner reproduzieren, der auf einem Luftdruckparadigma beruht. Dieser hat den Vorteil, dass er uns zu einem Algorithmus zur Optimierung von Floorplans führt, dessen Laufzeit für den Spezialfall von Flächeninhalten bekanntermaßen gut ist.

Im Anschluss werden wir eine zweite Art der Optimierung von Floorplans vorstellen. Dabei möchten wir die Segmente des Floorplans, d. h. die Ränder der Teilrechtecke, auf einer gegebenen Menge von Punkten unterbringen. Dieses Problem werden wir lösen, indem wir es auf ein Problem der ersten Art reduzieren. Aus dem Beweis der Lösbarkeit dieses Problems ergibt sich ein Algorithmus, dessen Implementation wir genauer studieren werden.

Abschließend werden wir untersuchen, inwieweit sich das Luftdruckparadigma aus dem Beweis von Felsner auf ähnliche Optimierungsprobleme übertragen lässt. Dabei betrachten wir im Speziellen das Problem, die Flächeninhalte der Teildreiecke einer Triangulierung zu optimieren.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	6
1.1	Das Thema und aktuelle Forschungsergebnisse	6
1.2	Aufbau	7
1.3	Bezeichnungen	8
2	Floorplans und Äquivalenzrelationen	8
2.1	Starke Äquivalenz	10
2.2	Schwache Äquivalenz	12
2.3	Zusammenhang zwischen starker und schwacher Äquivalenz	14
3	Optimierung der Massen der Teilrechtecke eines Floorplans	15
3.1	Eindeutigkeit	17
3.2	Existenz	19
3.2.1	Beweis nach Eppstein u. a.	20
3.2.2	Beweis nach Felsner	22
4	Unterbringen von Floorplans auf Punktmengen	29
5	Implementation	34
6	Anwendung des Luftdruckparadigmas auf Triangulierungen	36
7	Fazit	42

Abbildungsverzeichnis

1	Ein Floorplan mit acht Teilrechtecken	6
2	Unterbringen eines Floorplans auf einer Punktmenge	7
3	Generische und pseudogenerische Floorplans	9
4	Ein Floorplan in grau und der zugehörige Hilfsgraph H aus dem Beweis von Proposition 1 in blau	10
5	Ein Floorplan F und der zugehörige erweiterte Floorplan F_+	10
6	Ein Floorplan F und der zugehörige Rechteckdualgraph $G_+^*(F)$	11
7	Die lokalen Bedingungen der transversalen Struktur	11
8	Die von dem Floorplan F aus Abbildung 6 auf dem Rechteckdualgraphen $G_+^*(F)$ induzierte transversale Struktur	12
9	Ein Floorplan F und der zugehörige Segmentkontakt-Graph $G_{\text{seg}}(F)$	13
10	Die lokalen Bedingungen der separating decomposition	13
11	Ein Floorplan F und die von F induzierte separating decomposition auf $G_{\text{seg}}(F)$	14
12	Rekonstruktion der Segmentkontakte aus den Faces der transversalen Struktur	15
13	Zwei schwach, aber nicht stark äquivalente Floorplans	15
14	Beispiel eines Verschiebungsgraphen	17
15	Illustrationen zum Beweis von Lemma 1	18
16	Die Abbildung h aus dem Beweis von Proposition 4	25
17	Die Konstruktion des Floorplans F_S	30
18	Zwischenschritte der Lösung des Optimierungsproblems aus Abbildung 2	31
19	Visualisierung einer Stauchung	33
20	Zwei schwach äquivalente Floorplans, welche auf der gleichen Punktmenge untergebracht sind	33
21	Zwei schwach äquivalente Floorplans, die auf der gleichen Punktmenge untergebracht sind, wobei für jeden Punkt festgelegt ist, ob er von einem horizontalen oder einem vertikalen Segment überdeckt wird	34
22	Die Umgebungen U'_p der Punkte $p \in P$ für die Definition der Kantenmenge von G	35
23	Illustrationen für den Beweis von Lemma 10	37
24	Zwei äquivalente Dreieckfloorplans, deren Teildreiecke die gleichen Flächeninhalte besitzen	38
25	Der Dreieckfloorplan für den Beweis von Lemma 12. In blau sind die Teildreiecke beschriftet, in rot die drei verschiedenen vorkommenden Seitenlängen und in orange ein Winkel α	40
26	Das die innere Ecke v umgebende Polygon $P(v)$, innerhalb dessen v verschoben werden kann	41
27	Illustration für den Beweis von Lemma 13	42

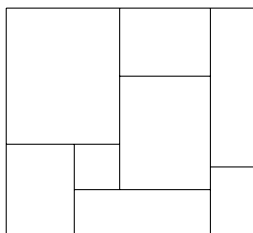


Abbildung 1: Ein Floorplan mit acht Teilrechtecken

1 Einleitung

Wir werden in dieser Einleitung zunächst einen Überblick über das in der vorliegenden Arbeit behandelte Thema geben und dieses in die aktuelle Forschung einordnen. Daraufhin werden wir eine Übersicht über den Aufbau der Arbeit geben und zuletzt noch auf spezielle Bezeichnungen eingehen, die wir verwenden werden.

1.1 Das Thema und aktuelle Forschungsergebnisse

Das Thema dieser Arbeit sind Floorplans und deren Optimierung. Ein Floorplan ist eine Zerlegung eines Rechtecks in endlich viele Teilrechtecke (siehe Abbildung 1). Wie der Name bereits andeutet, können wir uns einen Floorplan als Raumplan einer rechteckigen Wohnung vorstellen. Die Teilrechtecke bilden dann die einzelnen Zimmer der Wohnung. In [3, 4] werden Floorplans als *rectangular layouts* bezeichnet.

Unter der Optimierung von Floorplans verstehen wir, dass wir einen Floorplan in einer solchen Weise verändern, dass die kombinatorische Struktur des Floorplans erhalten bleibt, die Flächeninhalte der einzelnen Teilrechtecke jedoch jeweils einen vorgegebenen Wert annehmen. Eppstein u. a. haben in [3] bewiesen, dass dieses Problem immer lösbar ist, und zudem gezeigt, dass die Lösung eindeutig ist, wenn die Seitenlängen des äußeren Grundrechtecks festgelegt sind.

Izumi u. a. haben in [6] einen Algorithmus beschrieben, der das beschriebene Optimierungsproblem mit Hilfe eines Luftdruckparadigmas löst. Dabei wird das Ungleichgewicht des aktuellen Flächeninhalts eines Teilrechtecks und des gewünschten Flächeninhalts dieses Teilrechtecks als Druck in diesem Teilrechteck aufgefasst. Diese Drücke führen auf natürliche Weise zu Verschiebungen innerhalb des Floorplans, welche diesen schließlich gegen den gewünschten Floorplan konvergieren lassen. Die Laufzeit erwies sich bei praktischen Tests als gut. Izumi u. a. konnten jedoch nur experimentell, nicht aber formal nachweisen, dass dieser Algorithmus korrekt ist.

Dieser formale Nachweis ist schließlich Felsner in [5] gelungen. Darüber hinaus hat Felsner das Optimierungsproblem verallgemeinert, indem er den Begriff des Flächeninhalts, der als Integral einer konstanten Dichtefunktion betrachtet werden kann, durch den allgemeineren Begriff der Masse ersetzt hat, die als Integral allgemeinerer Dichtefunktionen definiert ist.

Die Beweise von Eppstein u. a. sowie von Felsner werden wir in dieser Arbeit präsentieren.

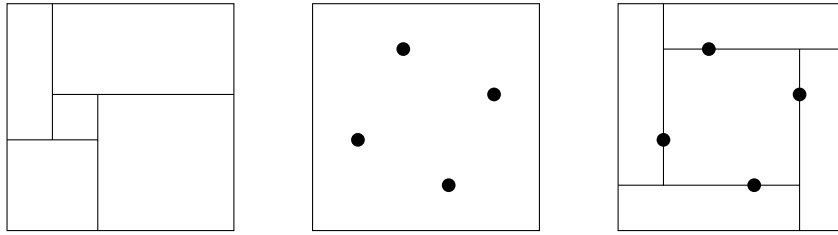


Abbildung 2: Unterbringen eines Floorplans auf einer Punktmenge

Felsner zeigt in [5] zusätzlich, wie die verallgemeinerte Version des Optimierungsproblems verwendet werden kann, um eine andere Art von Optimierungsproblemen zu lösen. Dabei suchen wir zu einem Floorplan F und einer Punktmenge P in der Ebene wieder einen Floorplan F' , der kombinatorisch dem Floorplan F gleicht und diesmal die zusätzliche Eigenschaft erfüllt, die Punktmenge P zu überdecken. D. h. alle Punkte aus P müssen auf dem Rand eines Teilrechtecks von F' liegen, nicht aber auf dem Rand des Grundrechtecks von F' (siehe Abbildung 2).

Auch diesen Beweis werden wir präsentieren und zudem auf Implementationsdetails zu dem Algorithmus eingehen, der sich aus diesem Beweis ergibt.

Das Unterbringen eines Floorplans auf einer Punktmenge ist nicht eindeutig. Ackerman u. a. beschäftigen sich in [1] mit der Frage, wie viele geometrisch verschiedene Floorplans auf einer Punktmenge untergebracht werden können. Dabei formulieren sie die Vermutung, dass das Unterbringen eines Floorplans auf einer Punktmenge zumindest dann eindeutig ist, wenn man für jeden Punkt festlegt, ob er von einem horizontalen oder einem vertikalen Segment überdeckt wird. Die Korrektheit dieser Vermutung hätte die in [1] angegebene obere Schranke für die gesuchte Anzahl von Floorplans deutlich verringert. Wir werden hier allerdings ein Gegenbeispiel für diese Vermutung präsentieren.

Ein weiteres Thema dieser Arbeit wird die Frage sein, ob sich das Luftdruckparadigma aus [5] eignet, um Optimierungsprobleme auf ähnlichen Strukturen wie Floorplans zu lösen. Dabei betrachten wir speziell das Problem, die Flächeninhalte der Teildreiecke einer Triangulierung zu optimieren.

1.2 Aufbau

In Abschnitt 2 werden wir uns zunächst mit der Struktur von Floorplans beschäftigen. Dabei werden wir grundlegende Begriffe definieren und schließlich zwei verschiedene Modelle dafür vorstellen, wann wir zwei Floorplans als kombinatorisch gleich bezeichnen. Diese Modelle sind starke und schwache Äquivalenz von Floorplans.

In Abschnitt 3 werden wir dann das Problem der Optimierung der Massen der Teilrechtecke eines Floorplans einführen. Anschließend werden wir den Eindeutigkeitsbeweis in der Variante aus [5] und die beiden Existenzbeweise aus [3] und [5] präsentieren. Dabei werden wir uns immer die verallgemeinerte Version des Optimierungsproblems aus [5] beziehen. Als Modell für die kombinatorische Gleichheit von Floorplans verwenden wir dabei schwache Äquivalenz. Wir werden zudem zeigen, dass die Existenz einer Lösung des

Optimierungsproblems nicht immer gegeben ist, wenn wir stattdessen starke Äquivalenz verwenden.

In Abschnitt 4 führen wir das Problem des Unterbringens eines Floorplans auf einer Punktmenge ein. Wir präsentieren den Beweis für die Existenz einer Lösung aus [5] und zeigen anschließend, dass die Lösung nicht eindeutig ist, auch nicht unter den zusätzlichen Voraussetzungen der Vermutung in [1].

In Abschnitt 5 beschäftigen wir uns mit Details zur Implementation des Verfahrens zum Unterbringen von Floorplans auf Punktfolgen, das sich aus dem Existenzbeweis aus Abschnitt 4 ergibt. Als Grundlage dient uns dabei die Implementation des Algorithmus für das Problem der Optimierung der Massen der Teilrechtecke eines Floorplans, welcher sich aus dem Existenzbeweis aus Abschnitt 3 ergibt, der das Luftdruckparadigma verwendet.

In Abschnitt 6 werden wir untersuchen, inwieweit sich das Luftdruckparadigma aus Abschnitt 3 eignet, um ein ähnliches Optimierungsproblem auf Triangulierungen zu lösen. Wir definieren dieses neue Optimierungsproblem und gehen darauf ein, welche Ergebnisse aus Abschnitt 3 übertragen werden können, aber auch darauf, welche Schwierigkeiten sich dabei ergeben.

1.3 Bezeichnungen

Wir werden im Folgenden häufig mit Graphen und insbesondere mit planaren Graphen zu tun haben. Mit einem *planaren Graphen* bezeichnen wir dabei einen Graphen zusammen mit einer festen kombinatorischen Einbettung und nicht, wie üblich, nur einen Graphen, der eine solche Einbettung erlaubt. Für den hier verwendeten Begriff des planaren Graphen sind auch die Bezeichnungen *ebener Graph* und *planar eingebetteter Graph* gebräuchlich.

2 Floorplans und Äquivalenzrelationen

Wir beginnen mit der Definition der grundlegenden Begriffe.

Definition 1. Ein *Floorplan* ist eine Zerlegung eines Rechtecks (im Folgenden Grundrechteck genannt) in eine endliche Menge von Rechtecken (im Folgenden Teilrechtecke genannt), deren Inneres paarweise disjunkt ist.

Definition 2. Ein *Segment* eines Floorplans F ist ein maximales nichtdegeneriertes Intervall, welches eine Teilmenge der Vereinigung der Ränder der Teilrechtecke von F ist.

Wir unterscheiden zwischen inneren und äußeren Segmenten. Die äußeren Segmente eines Floorplans F seien die vier Segmente, die das Grundrechteck von F umgeben. Alle anderen Segmente seien innere Segmente. Wir nennen jeweils ein Paar von parallelen äußeren Segmenten horizontal und eines vertikal. Da alle inneren Segmente eines Floorplans offensichtlich parallel zu einem der äußeren Segmente sind, können wir dann generell zwischen horizontalen und vertikalen Segmenten unterscheiden.

Nach unserer Definition ist es möglich, dass sich zwei Segmente kreuzen und sich in dem Schnittpunkt dieser beiden Segmente vier Teilrechtecke schneiden. Diesen Fall würden wir im Folgenden gerne ausschließen.

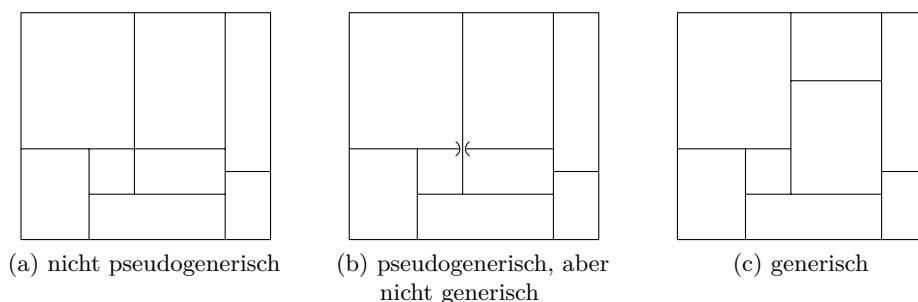


Abbildung 3: Generische und pseudogenerische Floorplans

Definition 3. Ein Floorplan F heißt *generisch*, falls das Innere der Segmente von F paarweise disjunkt ist.

Es wird uns nicht möglich sein, uns auf generische Floorplans zu beschränken. Daher benötigen wir eine schwächere Variante dieser Eigenschaft.

Definition 4. Ein Floorplan F heißt *pseudogenerisch*, falls wir in dem Fall, dass das Innere zweier Segmente von F nicht disjunkt ist, annehmen, dass genau eines dieser beiden Segmente im Schnittpunkt der beiden Segmente in zwei einzelne Segmente zerbrochen wird.

Abbildung 3 veranschaulicht die Definitionen von generischen und pseudogenerischen Floorplans.

Proposition 1. *Es sei F ein pseudogenerischer Floorplan, s die Anzahl der inneren Segmente von F und r die Anzahl der Teilrechtecke von F . Dann ist $r = s + 1$.*

Beweis. Wir definieren uns einen Hilfsgraphen H , dessen Knoten die vertikalen Segmente von F sind und der für jedes Teilrechteck R von F eine Kante zwischen dem Segment, das den linken Rand von R beinhaltet, und dem Segment, das den rechten Rand von R beinhaltet, besitzt. H ist also ein planarer Multigraph (siehe Abbildung 4).

Wir bezeichnen mit s_v die Anzahl der vertikalen inneren Segmente von F und mit s_h die Anzahl der horizontalen inneren Segmente von F . Weiter sei n die Anzahl der Knoten von H , m die Anzahl der Kanten von H und f die Anzahl der Faces von H .

Dann ist $s_v = n - 2$, da auch die beiden äußeren vertikalen Segmente von F Knoten von H sind. Des Weiteren ist $m = r$. Da es eine offensichtliche Bijektion zwischen der Menge der inneren Faces von H und der Menge der inneren horizontalen Segmente von F gibt, gilt außerdem $s_h = f - 1$. Mit dem Eulerschen Polyedersatz folgt schließlich

$$r = m = n + f - 2 = (n - 2) + (f - 1) + 1 = s_v + s_h + 1 = s + 1.$$

□

Ein alternativer Beweis für Proposition 1, der einen anderen Hilfsgraphen verwendet, ist in [4, Lemma 1] zu finden.

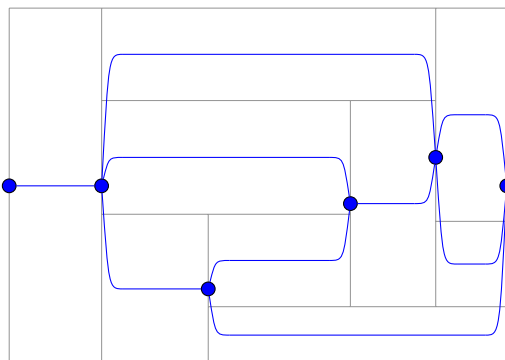


Abbildung 4: Ein Floorplan in grau und der zugehörige Hilfsgraph H aus dem Beweis von Proposition 1 in blau

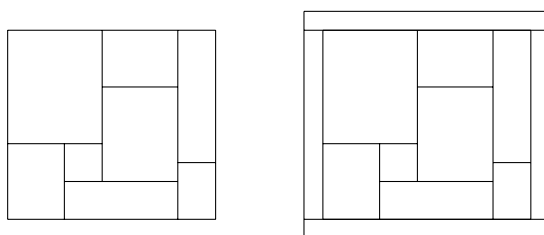


Abbildung 5: Ein Floorplan F und der zugehörige erweiterte Floorplan F_+

Im Folgenden werden wir zwei verschiedene Äquivalenzrelationen auf der Menge der generischen bzw. pseudogenerischen Floorplans definieren. Dazu schauen wir uns zunächst die Struktur von Floorplans genauer an.

2.1 Starke Äquivalenz

Wir werden in diesem Unterabschnitt starke Äquivalenz von Floorplans wie in [5, Abschnitt 2] definieren. Diese Definition entspricht der Definition von *equivalence* von Floorplans in [4, Abschnitt 2].

Definition 5. Der *erweiterte Floorplan* F_+ eines Floorplans F ist der Floorplan, der aus F durch Einrahmen mit vier weiteren Teilrechtecken wie in Abbildung 5 entsteht.

Definition 6. Der *Rechteckdualgraph* $G_+^*(F)$ eines generischen Floorplans F ist der Graph, dessen Knoten die Teilrechtecke von F_+ sind und der genau dann eine Kante zwischen zwei Teilrechtecken enthält, wenn diese sich berühren.

Wie in Abbildung 6 zu sehen ist, handelt es sich bei dem Rechteckdualgraphen $G_+^*(F)$ eines generischen Floorplans F um eine innere Triangulierung eines 4-gons.

Definition 7. Es sei G eine innere Triangulierung eines 4-gons, deren äußere Knoten im Uhrzeigersinn l, o, r, u heißen. Eine *transversale Struktur* für G ist dann eine Orientierung

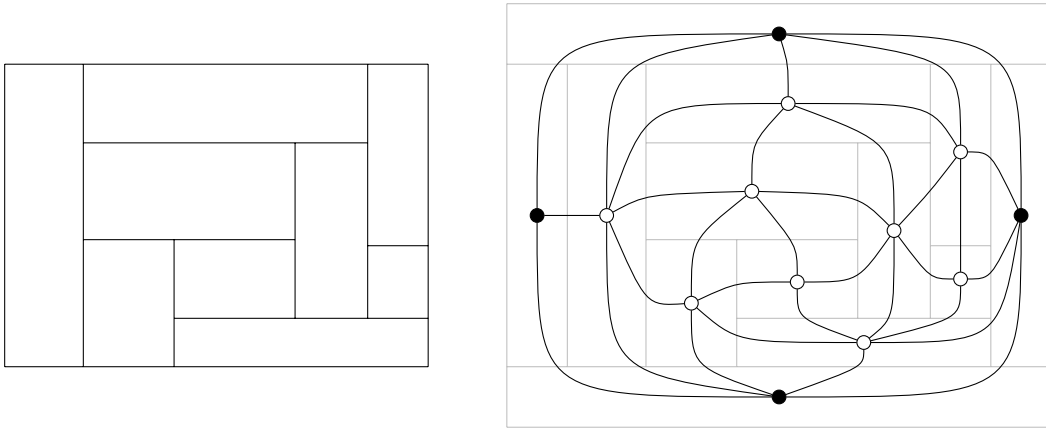


Abbildung 6: Ein Floorplan F und der zugehörige Rechteckdualgraph $G_+^*(F)$

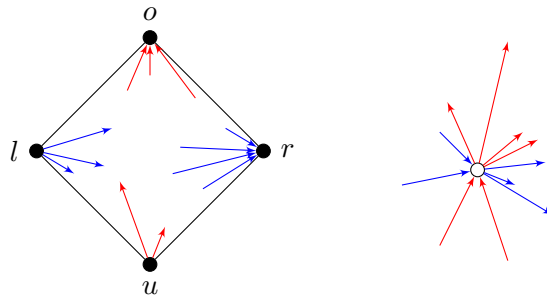


Abbildung 7: Die lokalen Bedingungen der transversalen Struktur

der inneren Kanten von G , d. h. aller Kanten von G , die nicht auf dem äußeren Face liegen, und eine Färbung derselben mit den Farben rot und blau, so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind (siehe Abbildung 7):

- (1) Alle zu l inzidenten Kanten sind blau und ausgehend, alle zu u inzidenten rot und ausgehend, alle zu r inzidenten blau und eingehend und alle zu o inzidenten rot und eingehend.
- (2) Jeder Knoten $v \neq l, u, r, o$ ist inzident zu genau vier nichtleeren Blöcken von Kanten, wobei der erste Block nur rote eingehende, der zweite nur blaue eingehende, der dritte nur rote ausgehende und der vierte nur blaue ausgehende Kanten enthält und die Blöcke im Uhrzeigersinn in dieser Reihenfolge auftreten.

Wir zeigen nun, wie ein generischer Floorplan F eine transversale Struktur auf seinem Rechteckdualgraphen $G_+^*(F)$ induziert. Dazu betrachten wir eine feste Kante e in $G_+^*(F)$ zwischen den zwei Teilrechtecken R_i und R_j . Nach der Definition von $G_+^*(F)$ besitzen R_i und R_j dann ein gemeinsames Randsegment s_{ij} . Da zwei Teilrechtecke eines Floorplans höchstens ein gemeinsames Randsegment besitzen können, ist s_{ij} eindeutig. Falls s_{ij}

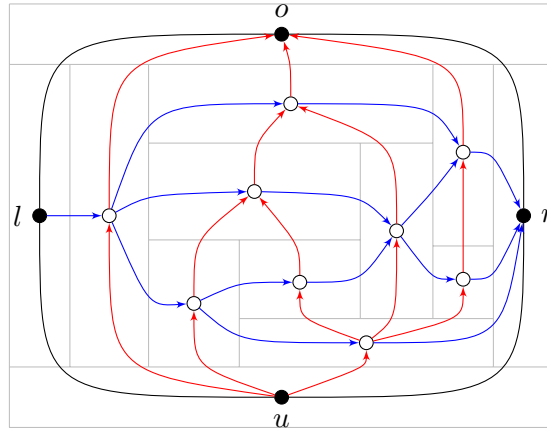


Abbildung 8: Die von dem Floorplan F aus Abbildung 6 auf dem Rechteckdualgraphen $G_+^*(F)$ induzierte transversale Struktur

horizontal ist, liegt eines der Teilrechtecke R_i und R_j oberhalb von s_{ij} und das andere unterhalb. In diesem Fall färben wir die Kante e rot und orientieren sie vom unteren Rechteck zum oberen. Falls s_{ij} hingegen vertikal ist, können wir analog ein linkes und ein rechtes Teilrechteck unterscheiden, färben die Kante e blau und orientieren sie vom linken zum rechten Rechteck (siehe Abbildung 8).

Definition 8. Zwei generische Floorplans heißen *stark äquivalent*, wenn sie den gleichen Rechteckdualgraphen besitzen und auf diesem die gleiche transversale Struktur induzieren.

2.2 Schwache Äquivalenz

Auch schwache Äquivalenz von Floorplans werden wir definieren wie in [5, Abschnitt 2]. Diese Definition ist äquivalent zur Definition von *order-equivalence* in [4, Abschnitt 2].

Definition 9. Der *Segmentkontakt-Graph* $G_{\text{seg}}(F)$ eines pseudogenerischen Floorplans F ist der Graph, dessen Knoten die Segmente von F sind und der genau dann eine Kante zwischen zwei Segmenten enthält, wenn diese sich berühren.

Wie in Abbildung 9 zu sehen ist, handelt es sich bei dem Segmentkontakt-Graphen $G_{\text{seg}}(F)$ eines pseudogenerischen Floorplans F um eine Quadrangulierung, also insbesondere um einen planaren Graphen.

Definition 10. Es sei G eine Quadrangulierung. Die beiden Farbklassen der Bipartition von G seien schwarz sowie weiß und die beiden schwarzen Knoten auf dem äußeren Face seien u und o . Eine *separating decomposition* von G ist dann eine Orientierung der Kanten von G und eine Färbung derselben mit den Farben rot und blau, so dass folgende Eigenschaften erfüllt sind (siehe Abbildung 10):

- (1) Alle Kanten, die inzident zu s sind, sind eingehende rote Kanten, und alle Kanten, die inzident zu t sind, sind eingehende blaue Kanten.

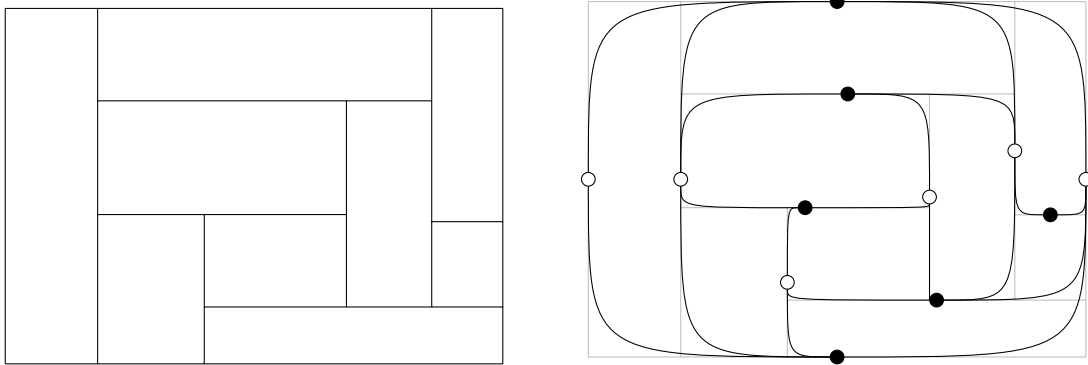


Abbildung 9: Ein Floorplan F und der zugehörige Segmentkontakt-Graph $G_{\text{seg}}(F)$

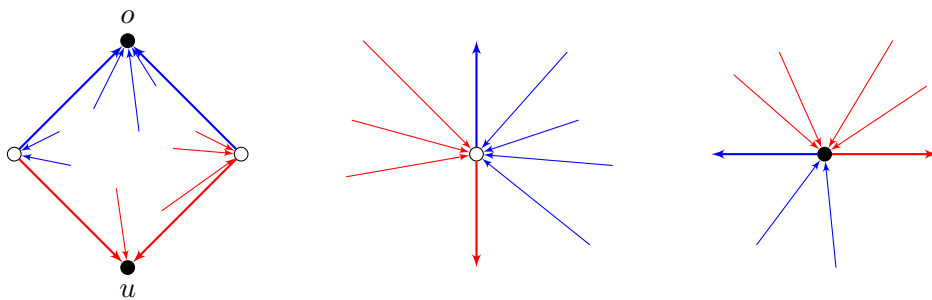


Abbildung 10: Die lokalen Bedingungen der separating decomposition

- (2) Jeder Knoten $v \neq s, t$ ist inzident zu genau einem nichtleeren Intervall von roten Kanten und genau einem nichtleeren Intervall von blauen Kanten. Jedes dieser Intervalle enthält genau eine ausgehende Kante. Falls v schwarz ist, ist diese ausgehende Kante die im Uhrzeigersinn letzte Kante des Farbintervalls und, falls v weiß ist, ist sie umgekehrt die erste Kante des Farbintervalls.

Wir zeigen nun, wie ein pseudogenerischer Floorplan F auf seinem Segmentkontakt-Graphen $G_{\text{seg}}(F)$ eine separating decomposition induziert. Dazu sei s das untere äußere Segment von F und t das obere äußere Segment von F . Wir verlängern zunächst s und t in beide Richtungen. Da F pseudogenerisch ist, gibt es nun an jedem Schnittpunkt von Segmenten genau ein Segment v , welches dort endet, und genau ein Segment w , welches dort nicht endet. Die zugehörige Kante in $G_{\text{seg}}(F)$ orientieren wir von v nach w . Falls v ein horizontales Segment ist, liegt v außerdem entweder vollständig rechts von w und wir färben die Kante blau oder vollständig links von w und wir färben die Kante rot. Falls v ein vertikales Segment ist, liegt v analog entweder vollständig unterhalb von w und wir färben die Kante blau oder vollständig oberhalb von w und wir färben die Kante rot (siehe Abbildung 11).

Definition 11. Zwei pseudogenerische Floorplans heißen *schwach äquivalent*, wenn sie

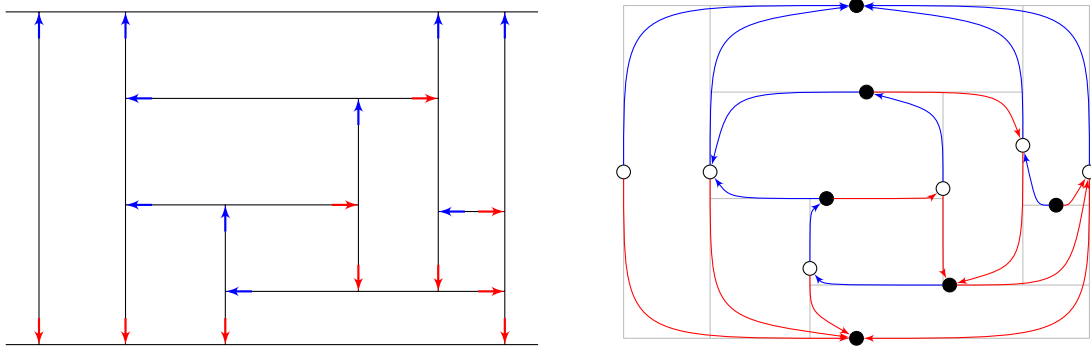


Abbildung 11: Ein Floorplan F und die von F induzierte separating decomposition auf $G_{\text{seg}}(F)$

den gleichen Segmentkontakt-Graphen besitzen und auf diesem die gleiche separating decomposition induzieren.

2.3 Zusammenhang zwischen starker und schwacher Äquivalenz

Offensichtlich beschreiben starke und schwache Äquivalenz jeweils eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Floorplans. Wie die Bezeichnungen bereits andeuten, ist starke Äquivalenz eine stärkere Äquivalenzrelation als schwache Äquivalenz.

Proposition 2. *Wenn zwei generische Floorplans stark äquivalent sind, so sind sie auch schwach äquivalent.*

Beweis. Es sei F ein generischer Floorplan. Wir werden zeigen, dass aus der von F induzierten transversalen Struktur auf dem Rechteckdualgraphen $G_+^*(F)$ der Segmentkontakt-Graph $G_{\text{seg}}(F)$ von F sowie die von F auf diesem induzierte separating decomposition konstruiert werden können.

Jedes innere Face von $G_+^*(F)$ korrespondiert zu dem Kontakt zweier Segmente von F . Diese Faces sind Dreiecke und für die Färbung und Orientierung eines Dreiecks gibt es in einer transversalen Struktur bis auf Symmetrie nur vier verschiedene Möglichkeiten. Dies ergibt sich direkt aus der Definition der transversalen Struktur. Durch die Färbung und Orientierung der Kanten erhalten wir für jedes Face bzw. jeden Segmentkontakt die Informationen, welches der Segmente horizontal und welches vertikal ist, welches der beiden Segmente an der Kontaktstelle endet und ob der Kontakt in der von F induzierten separating decomposition einer blauen oder einer roten Kante entspricht (siehe Abbildung 12).

Bislang haben wir die inneren Faces ignoriert, die zu einer Kante inzident sind, die in der transversalen Struktur nicht gefärbt ist. Diese vier Faces korrespondieren zu den Segmentkontakten an den vier Ecken des Floorplans. An diesen Kontaktstellen enden beide Segmente. Welches der beiden Segmente horizontal und welches vertikal ist, folgt auch hier sofort aus der Färbung und Orientierung der beiden übrigen Kanten.

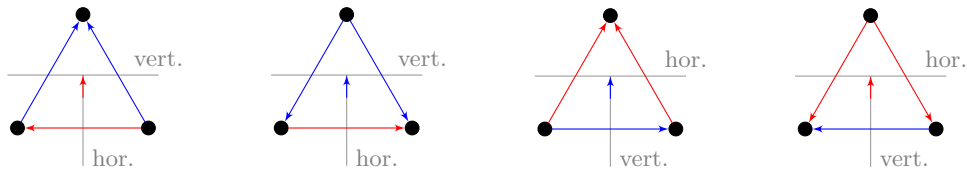


Abbildung 12: Rekonstruktion der Segmentkontakte aus den Faces der transversalen Struktur

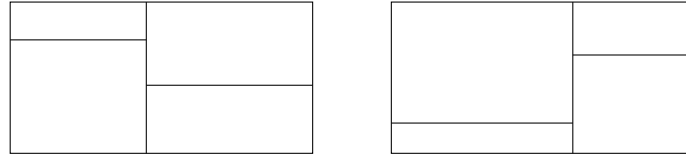


Abbildung 13: Zwei schwach, aber nicht stark äquivalente Floorplans

Mit den bisherigen Erkenntnissen sind wir imstande, ein Skelett von F zu zeichnen. Dieses unterscheidet sich von dem richtigen Floorplan F darin, dass die Segmente zu beliebigen glatten Kurven entartet sind. Da wir jedoch zusätzlich die Färbungen der Segmentkontakte in der auf $G_{\text{seg}}(F)$ von F induzierten separating decomposition kennen, können wir wie in Abbildung 11 den Segmentkontakt-Graphen $G_{\text{seg}}(F)$ von F sowie die von F auf diesem induzierte separating decomposition konstruieren. \square

Wie Abbildung 13 zeigt, gibt es Floorplans, die zwar schwach äquivalent sind, nicht aber stark äquivalent. Dies zeigt, dass starke Äquivalenz tatsächlich eine echt stärkere Äquivalenzrelation als schwache Äquivalenz ist.

3 Optimierung der Massen der Teilrechtecke eines Floorplans

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Optimierung von Floorplans. Wir suchen zu einem gegebenen Floorplan F einen Floorplan F' , der schwach äquivalent zu F ist und dessen Teilrechtecke vorgegebene Flächeninhalte besitzen.

Da schwache Äquivalenz nur für pseudogenerische Floorplans definiert ist, seien von nun an alle Floorplans pseudogenerisch. Außerdem beschränken wir uns auf Floorplans, deren Grundrechteck das Einheitsquadrat ist, also deren Seitenlängen jeweils beide Eins sind, und betten diese in den Bereich $[0, 1]^2$ eines kartesischen Koordinatensystems ein. Da durch Skalierung jeder Floorplan in einen stark äquivalenten Floorplan umgewandelt werden kann, dessen Seitenlängen beliebige Werte annehmen, ist dies keine Beschränkung der Allgemeinheit für das Optimierungsproblem.

Des Weiteren möchten wir den Begriff des Flächeninhalts durch einen allgemeineren Massebegriff ersetzen. Im Folgenden seien alle Integrale Lebesgue-Integrale und mit Messbarkeit bezeichnen wir Lebesgue-Messbarkeit.

Definition 12. Wir nennen eine Abbildung $\mu : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine *Dichtefunktion*, wenn μ messbar ist, $\int_0^1 \int_0^1 \mu(x, y) dx dy = 1$ ist und das Integral über nichtdegenerierte Rechtecke nicht Null ist.

Definition 13. Es sei μ eine Dichtefunktion und $A \subseteq [0, 1]^2$ eine messbare Menge. Dann ist die μ -Masse von A definiert als $m_\mu(A) := \iint_A \mu(x, y) dx dy$.

Da achsenparallele Rechtecke $R \subseteq [0, 1]^2$ messbar sind, ist für diese insbesondere die μ -Masse $m_\mu(R)$ bezüglich jeder Dichtefunktion μ definiert.

Der Flächeninhalt eines Rechtecks entspricht der μ -Masse dieses Rechtecks bezüglich der Dichtefunktion $\mu \equiv 1$. Der oben definierte Massebegriff ist also tatsächlich eine Verallgemeinerung des Flächeninhaltsbegriffs.

Wenn aus dem Kontext hervorgeht, was die Dichtefunktion μ ist, werden wir im Folgenden auch von der Masse m anstatt der μ -Masse m_μ sprechen.

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, folgenden Satz zu beweisen:

Theorem 1. *Es sei $\mu : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine Dichtefunktion auf dem Einheitsquadrat, so dass die Abbildung $g : [0, 1]^4 \rightarrow \mathbb{R} : (a, b, c, d) \mapsto \int_a^b \int_c^d \mu(x, y) dx dy$ stetig ist. Es sei weiter F ein Floorplan mit den Teilrechtecken R_1, \dots, R_{n+1} und $w : \{R_1, \dots, R_{n+1}\} \rightarrow \mathbb{R}_+$ eine Gewichtsfunktion mit $\sum_{i=1}^{n+1} w(R_i) = 1$. Dann gibt es genau einen Floorplan F' im Einheitsquadrat, der schwach äquivalent zu F ist und $m(R_i) = w(R_i)$ für alle Teilrechtecke R_i erfüllt.*

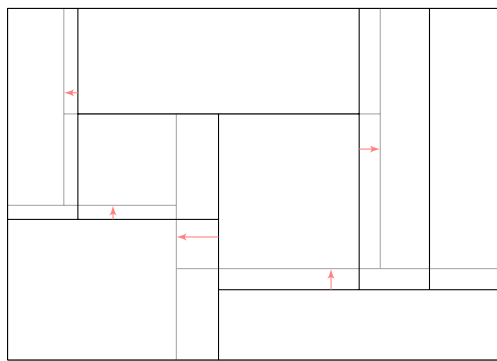
Bevor wir zu dem Beweis dieses Theorems kommen, zeigen wir, dass aus dem Theorem selbst folgt, dass eine entsprechende Aussage für starke Äquivalenz falsch ist.

Korollar 1. *Zu jeder Dichtefunktion $\mu : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ auf dem Einheitsquadrat, welche die Voraussetzungen von Theorem 1 erfüllt, gibt es einen Floorplan F mit den Teilrechtecken R_1, \dots, R_{n+1} und eine Gewichtsfunktion $w : \{R_1, \dots, R_{n+1}\} \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit $\sum_{i=1}^{n+1} w(R_i) = 1$, so dass es keinen Floorplan F' im Einheitsquadrat gibt, der stark äquivalent zu F ist und $m(R_i) = w(R_i)$ für alle Teilrechtecke R_i erfüllt.*

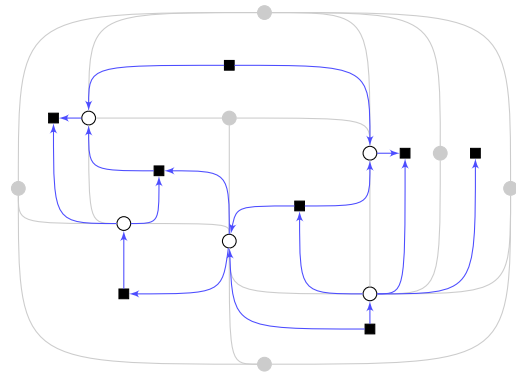
Beweis. Nach Proposition 2 gibt es Floorplans F und G , die schwach, aber nicht stark äquivalent sind. Wir können annehmen, dass F und G im Einheitsquadrat liegen. Weiter definieren wir die Gewichtsfunktion w als die Abbildung, die ein Teilrechteck R_i auf die Masse von R_i in G abbildet. Nach Theorem 1 ist G insbesondere der einzige zu F schwach äquivalente Floorplan im Einheitsquadrat, der $m(R_i) = w(R_i)$ für alle Teilrechtecke R_i erfüllt.

Wir nehmen nun an, es gibt einen Floorplan F' im Einheitsquadrat, der stark äquivalent zu F ist und $m(R_i) = w(R_i)$ für alle Teilrechtecke R_i erfüllt. Da F' nach Proposition 2 auch schwach äquivalent zu F ist, ist dann $F' = G$, im Widerspruch dazu, dass F und G nicht stark äquivalent sind. Die Annahme, dass es einen solchen Floorplan F' gibt, ist also falsch. \square

Jetzt werden wir mit dem Beweis von Theorem 1 fortfahren. Wir werden zunächst die Eindeutigkeit beweisen und dann auf zwei verschiedene Arten die Existenz.



(a) Ein Floorplan F in schwarz und ein schwach äquivalenter Floorplan F' in grau



(b) Der Verschiebungsgraph zu F und F' in blau und $G_{\text{seg}}(F)$ in grau

Abbildung 14: Beispiel eines Verschiebungsgraphen

3.1 Eindeutigkeit

Der hier vorgeführte Beweis der Eindeutigkeitsaussage aus Theorem 1 folgt dem entsprechenden Beweis in [5, Proposition 4].

Wir definieren uns zu zwei schwach äquivalenten Floorplans F und F' zunächst einen Hilfsgraphen, den *Verschiebungsgraphen* H . Die Knoten von H seien alle Teilrechtecke von F sowie diejenigen Segmente von F , die in F' andere Koordinaten besitzen als in F . Kanten habe H zwischen einem Teilrechteck R und einem Segment s , falls diese inzident sind. Falls s bei der Verschiebung von der Position in F in die Position in F' in R hineingeschoben wird, sei diese Kante von s nach R gerichtet. Andernfalls sei sie von R nach s gerichtet. Als Teilgraph des Winkelgraphen von $G_{\text{seg}}(F)$ ist H planar (siehe Abbildung 14).

Lemma 1. *Falls der Verschiebungsgraph H zu zwei schwach äquivalenten Floorplans F und F' eine Kante enthält, so enthält er eine Quelle oder eine Senke, d. h. einen Knoten, der eine ausgehende, aber keine eingehende Kante besitzt, oder einen Knoten, der eine eingehende, aber keine ausgehende Kante besitzt.*

Beweis. Wir nehmen an, dass H weder eine Quelle, noch eine Senke besitzt. Dann enthält H einen gerichteten Kreis und somit auch einen einfachen gerichteten Kreis. Wir betrachten jetzt eine feste planare Zeichnung von H . Es sei C ein einfacher gerichteter Kreis in H , der in dieser Zeichnung eine minimale Fläche einschließt. Außerdem nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass C im Uhrzeigersinn verläuft.

C enthält sowohl horizontale als auch vertikale Segmente. Denn wenn wir einen gerichteten Weg $s_0 \rightarrow R_1 \rightarrow s_1 \rightarrow R_2 \rightarrow \dots \rightarrow R_t \rightarrow s_t$ in H betrachten, der nur Segmente s_i einer Sorte enthält, so ist die Folge der Koordinaten dieser Segmente in F nach Konstruktion von H entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend, also insbesondere $s_i \neq s_j$ für $i \neq j$.

Da C im Uhrzeigersinn verläuft, gibt es also ein Teilrechteck R , ein vertikales Segment

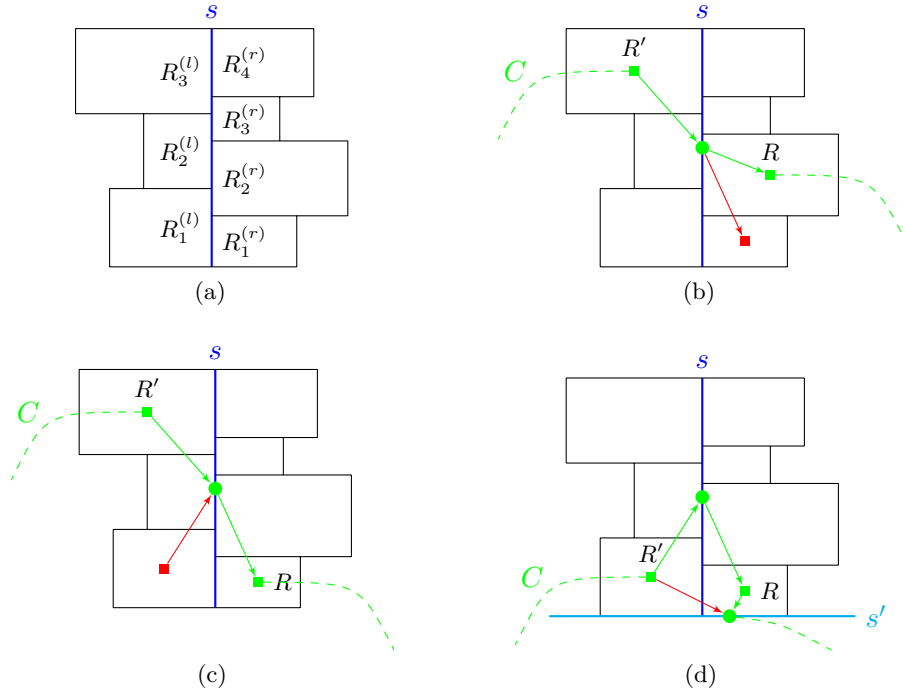


Abbildung 15: Illustrationen zum Beweis von Lemma 1

s und ein horizontales Segment s' , so dass der Weg $s \rightarrow R \rightarrow s'$ auf C liegt, s das Segment ist, das den linken Rand von R enthält, und s' das Segment ist, das den unteren Rand von R enthält.

Wir können bei den zu s inzidenten Teilrechtecken unterscheiden zwischen solchen, die links von s liegen, und solchen, die rechts von s liegen. Die links von s liegenden Teilrechtecke bezeichnen wir von unten nach oben mit $R_1^{(l)}, \dots, R_{d^{(l)}}^{(l)}$ und die rechts von s liegenden ebenfalls von unten nach oben mit $R_1^{(r)}, \dots, R_{d^{(r)}}^{(r)}$ (siehe Abbildung 15 (a)).

Da die Kante $s \rightarrow R$ in H enthalten ist und R eines der rechts von s liegenden Teilrechtecke ist, also $R = R_i^{(r)}$ für ein $i \in \{1, \dots, d^{(r)}\}$ ist, gibt es in H nach Konstruktion von H für $i = 1, \dots, d^{(r)}$ die Kante $s \rightarrow R_i^{(r)}$. Falls nun $R \neq R_1^{(r)}$ ist, liegt die Kante $s \rightarrow R_1^{(r)}$ im Inneren von C (siehe Abbildung 15 (b)). Da H keine Senke besitzt, können wir mit dieser Kante beginnend nun einen Weg $s \rightarrow R_1^{(r)} \rightarrow \dots$ konstruieren, welcher entweder irgendwann einen Kreis schließt, der vollständig innerhalb von C liegt, oder wieder auf den Kreis C trifft und diesen somit abkürzt. Beides steht im Widerspruch zur Minimalität der von C eingeschlossenen Fläche. Es ist also $R = R_1^{(r)}$.

Es sei R' das Teilrechteck, so dass die Kante $R' \rightarrow s$ auf C liegt. Da R' eines der links von s liegenden Teilrechtecke ist, also $R' = R_i^{(l)}$ für ein $i \in \{1, \dots, d^{(l)}\}$ ist, gibt es in H für $i = 1, \dots, d^{(l)}$ die Kante $R_i^{(l)} \rightarrow s$. Falls nun $R' \neq R_1^{(l)}$ ist, liegt die Kante

$R_1^{(l)} \rightarrow s$ im Inneren von C (siehe Abbildung 15 (c)). Analog zum vorherigen Fall können wir nun auf Grund des Fehlens einer Quelle in H einen Weg $s \leftarrow R_1^{(l)} \leftarrow \dots$ konstruieren, welcher irgendwann einen Kreis schließt, der vollständig innerhalb von C liegt, oder wieder auf den Kreis C trifft und diesen somit abkürzt. Da beides wieder im Widerspruch zur Minimalität der von C eingeschlossenen Fläche steht, ist folglich $R' = R_1^{(l)}$.

Es ist also $R' = R_1^{(l)}$ sowie $R = R_1^{(r)}$ und H enthält die Kante $R_1^{(r)} = R \rightarrow s'$. Da das Segment s' den unteren Rand von $R_1^{(r)}$ und somit auch von $R_1^{(l)}$ enthält, ist nach Konstruktion von H ebenfalls die Kante $R' = R_1^{(l)} \rightarrow s'$ in H enthalten (siehe Abbildung 15 (d)), die den Kreis C abkürzt, im Widerspruch zur Minimalität der von C eingeschlossenen Fläche.

Die Annahme, dass H weder eine Quelle, noch eine Senke besitzt, ist also falsch. \square

Mit Lemma 1 lässt sich nun die Eindeutigkeit aus Theorem 1 beweisen.

Lemma 2. *Unter den Voraussetzungen von Theorem 1 gibt es höchstens einen Floorplan F' im Einheitsquadrat, der schwach äquivalent zu F ist und $m(R_i) = w(R_i)$ für alle Teilrechtecke R_i erfüllt.*

Beweis. Wir nehmen an, dass es zwei verschiedene Floorplans F' und F'' im Einheitsquadrat gibt, die schwach äquivalent zu F sind und $m(R_i) = w(i)$ für alle Teilrechtecke R_i erfüllen. Da schwache Äquivalenz eine Äquivalenzrelation beschreibt und eine solche symmetrisch und transitiv ist, sind dann auch F' und F'' schwach äquivalent. Wir betrachten nun den Verschiebungsgraphen H zu F' und F'' . Da F' und F'' nicht gleich sind, enthält H eine Kante. Nach Lemma 1 gibt es in H also eine Quelle oder eine Senke. Da Knoten in H , die zu einem Segment gehören, nach Konstruktion von H sowohl eingehende als auch ausgehende Kanten besitzen, kommen als Quelle oder Senke nur Knoten in Frage, die zu einem Teilrechteck R_i gehören. Falls R_i eine Quelle von H ist, ist der Repräsentant von R_i in F' echt in dem Repräsentanten von R_i in F'' enthalten, und falls R_i eine Senke von H ist, ist umgekehrt der Repräsentant von R_i in F'' echt in dem Repräsentanten von R_i in F' enthalten. Da die Differenz der beiden Repräsentanten die Vereinigung nichtdegenerierter Rechtecke ist, ist die Masse dieser Differenz nicht Null. Also hat R_i in beiden Fällen in F' und F'' verschiedene Massen, im Widerspruch dazu, dass diese in beiden Floorplans $w(i)$ beträgt.

Die Annahme, dass es zwei verschiedene Floorplans gibt, welche die Voraussetzungen erfüllen, ist also falsch. \square

3.2 Existenz

Wir werden jetzt zwei verschiedene Beweise für die Existenzaussage aus Theorem 1 geben. Der erste dieser beiden Beweise beweist das Theorem in der Form, wie es oben aufgeführt ist, und ist recht kompakt. Der zweite Beweis verwendet hingegen stärkere Voraussetzungen an die Dichtefunktion μ und beweist daher nur eine abgeschwächte Form des Theorems. Er hat jedoch den Vorteil, dass er einen Algorithmus zur Optimierung von Floorplans liefert, der im Falle einer konstanten Dichtefunktion μ schnelle Laufzeiten erzielt, was in [6, Abschnitt 7] experimentell nachgewiesen wird.

3.2.1 Beweis nach Eppstein u. a.

Der erste Beweis ist eine Verallgemeinerung des entsprechenden Beweises aus [3]. Der Originalbeweis bezieht sich nur auf den Fall der Optimierung der Flächeninhalte der Teilrechtecke, also auf den Fall einer konstanten Dichtefunktion $\mu \equiv 1$. Die im Folgenden vorgeführte Variante dieses Beweises ist für die in Theorem 1 beschriebene allgemeinere Klasse von Dichtefunktionen μ gültig.

Wir definieren zunächst eine partielle Ordnung auf der Menge der inneren Segmente eines Floorplans.

Definition 14. Es sei F ein Floorplan mit den Teilrechtecken R_1, \dots, R_{n+1} und den inneren Segmenten s_1, \dots, s_n . Wir sagen $s_i < s_j$, falls es ein Teilrechteck R_k gibt, so dass s_i den unteren und s_j den oberen Rand von R_k enthält oder s_i den linken und s_j den rechten Rand von R_k enthält.

Da diese Relation offensichtlich azyklisch ist, bildet die reflexiv-transitive Hülle dieser Relation wie bereits angedeutet eine partielle Ordnung auf der Menge der inneren Segmente eines Floorplans. Horizontale und vertikale Segmente sind bezüglich dieser Ordnung unvergleichbar.

Lemma 3. *Es sei F ein Floorplan mit den inneren Segmenten s_1, \dots, s_n . Dann gibt es eine Bijektion φ von der Menge $A(F)$ der zu F schwach äquivalenten Floorplans im Einheitsquadrat in die Menge $P_F := \{c \in (0, 1)^n : c_i < c_j, \text{ falls } s_i < s_j\}$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die oben definierte partielle Ordnung auf den Segmenten von F für alle zu F schwach äquivalenten Floorplans erhalten bleibt. Wir betrachten dabei nur horizontale Segmente. Für vertikale Segmente folgt die Aussage analog. Für zwei horizontale Segmente s_i, s_j gilt genau dann $s_i < s_j$, wenn s_i den unteren Rand eines Teilrechtecks R_k und s_j den oberen Rand dieses Teilrechtecks enthält. Und dies ist genau dann der Fall, wenn s_i und s_j beide auf dem zu R_k gehörenden Face von $G_{\text{seg}}(F)$ liegen und in der von F induzierten separating decomposition auf diesem Face gegen den Uhrzeigersinn auf s_i eine rote Kante folgt. Da zu F schwach äquivalente Floorplans den gleichen Segmentkontakt-Graphen wie F besitzen und auf diesem auch die gleiche separating decomposition induzieren, haben wir damit gezeigt, dass die partielle Ordnung auf den Segmenten für diese erhalten bleibt.

Die gesuchte Bijektion $\varphi : A(F) \rightarrow P_F$ erhalten wir nun, indem wir einen zu F schwach äquivalenten Floorplan im Einheitsquadrat auf den Vektor der Koordinaten seiner inneren Segmente abbilden. Mit den Koordinaten der Segmente meinen wir dabei die x -Koordinaten der vertikalen und die y -Koordinaten der horizontalen Segmente. Die Umkehrabbildung erhalten wir durch folgende Konstruktion: Wir rekonstruieren jedes innere Segment für sich. Im Falle eines horizontalen Segments s_i kennen wir seine y -Koordinate c_i , aus der separating decomposition das linke vertikale Segment s_l sowie das rechte vertikale Segment s_r , in denen s_i endet, und auch die x -Koordinaten c_l und c_r dieser beiden Segmente. Das Segment s_i ist also die Strecke zwischen den Punkten (c_l, c_i) und (c_r, c_i) . Vertikale Segmente lassen sich analog rekonstruieren. \square

Wir unterscheiden im Folgenden nicht mehr zwischen Punkten aus P_F und zu F schwach äquivalenten Floorplans im Einheitsquadrat.

P_F ist nach Definition ein offenes Polyeder und als solches eine offene Menge. Wegen $P_F \subseteq (0, 1)^n$ ist P_F außerdem beschränkt. P_F ist also ein offenes Polytop.

Lemma 4. *Unter den Voraussetzungen von Theorem 1 existiert ein Floorplan F' , der schwach äquivalent zu F ist und $m(R_i) = w(R_i)$ für alle Teilrechtecke R_i erfüllt.*

Beweis. Es sei F ein Floorplan mit den inneren Segmenten s_1, \dots, s_n und den Teilrechtecken R_1, \dots, R_{n+1} . Wir definieren uns die Abbildung $W : P_F \rightarrow \mathbb{R}^n$, welche einen Punkt F' aus P_F auf den Vektor abbildet, dessen Einträge die Massen der Teilrechtecke R_1, \dots, R_n in F' sind. Aus der Stetigkeit von g (siehe Theorem 1) folgt, dass auch W stetig ist. Wir können W sogar stetig auf dem Rand ∂P_F von P_F fortsetzen: Die Punkte auf dem Rand von P_F korrespondieren zu Floorplans im Einheitsquadrat, die degenerierte Teilrechtecke besitzen, also Teilrechtecke mit der Masse Null. Daher werden diese Floorplans auf Vektoren abgebildet, bei denen eine Komponente Null ist oder die Summe aller Komponenten Eins ist.

Da sich die Masse des Teilrechtecks R_{n+1} durch $m(R_{n+1}) = 1 - \sum_{i=1}^n m(R_i)$ aus den Massen der Teilrechtecke R_1, \dots, R_n berechnen lässt, folgt aus Lemma 2, dass die Abbildung $W : P_F \rightarrow \mathbb{R}^n$ injektiv ist. Es existiert also die Umkehrabbildung $W^{-1} : W(P_F) \rightarrow P_F$.

Wir möchten nun zeigen, dass auch W^{-1} stetig ist. Es sei dazu $w_1, w_2, \dots \in W(P_F)$ eine konvergente Folge in $W(P_F)$ mit dem Grenzwert $w^* := \lim_{i \rightarrow \infty} w_i \in W(P_F)$. Es sei $F_i := W^{-1}(w_i)$ für alle $i \in \mathbb{N}$ sowie $F^* := W^{-1}(w^*)$. Da P_F beschränkt ist, gibt es nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine Teilfolge G_1, G_2, \dots von F_1, F_2, \dots , so dass der Grenzwert $\hat{G} := \lim_{i \rightarrow \infty} G_i$ existiert. Aus der Stetigkeit von W folgt

$$W(\hat{G}) = W\left(\lim_{i \rightarrow \infty} G_i\right) = \lim_{i \rightarrow \infty} W(G_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} W(F_i) = \lim_{i \rightarrow \infty} w_i = w^* = W(F^*).$$

Als Grenzwert einer Folge in P_F ist $\hat{G} \in \overline{P_F}$, wobei $\overline{P_F}$ den Abschluss von P_F bezeichne. Falls \hat{G} auf dem Rand von P_F liegt, also falls $\hat{G} \in \partial P_F$ ist, so ist eine Komponente von $W(\hat{G})$ Null oder die Summe aller Komponenten von $W(\hat{G})$ Eins. Dies steht im Widerspruch zu $W(\hat{G}) = W(F^*)$, da $F^* \in P_F$ ist und somit keine degenerierten Teilrechtecke besitzt. Es ist also $\hat{G} \in P_F$ und aus der Injektivität von W folgt $\hat{G} = F^*$. Auf diese Weise erhalten wir für alle Häufungspunkte \hat{F} der Folge F_1, F_2, \dots , dass $\hat{F} = F^*$ ist, woraus $\lim_{i \rightarrow \infty} F_i = F^*$ folgt. Damit ist die Stetigkeit von W^{-1} gezeigt.

Es sei $w := (w(R_1), \dots, w(R_n)) \in \mathbb{R}^n$. Wir müssen zeigen, dass $w \in W(P_F)$ ist. Dazu betrachten wir die Strecke $W(F)w := \{\lambda W(F) + (1 - \lambda)w : \lambda \in [0, 1]\}$ und definieren w' als den von $W(F)$ am weitesten entfernten Punkt auf dieser Strecke, so dass die halboffene Strecke $\{\lambda W(F) + (1 - \lambda)w' : \lambda \in (0, 1]\}$ in $W(P_F)$ liegt. Das Bild dieser halboffenen Strecke unter der Umkehrabbildung W^{-1} ist eine Kurve in P_F , deren Endpunkte F und ein Floorplan $F' \in \overline{P_F}$ sind. Da w' auf der Strecke zwischen $W(F)$ und w liegt und die Komponenten von $W(F)$ und w alle größer als Null sind sowie die Summen der Komponenten von $W(F)$ und w jeweils kleiner als Eins sind, sind auch die Komponenten

von w' alle größer als Null sowie die Summe der Komponenten von w' kleiner als Eins und daher ist $F' \notin \partial P_F$ bzw. $F' \in P_F$. Es folgt also $w' \in W(P_F)$. Da P_F eine offene Menge ist und $W^{-1} : W(P_F) \rightarrow P_F$ stetig ist, ist auch $W(P_F)$ eine offene Menge. w' kann also nur dann der von $W(F)$ am weitesten entfernte Punkt auf der Strecke $W(F)w$ in $W(P_F)$ sein, wenn $w' = w$ ist. Es ist also $w \in W(P_F)$. \square

3.2.2 Beweis nach Felsner

Für den zweiten Beweis folgen wir den Darstellungen in [5, Abschnitt 3]. Wie bereits oben erwähnt, benötigen wir für diesen Beweis stärkere Voraussetzungen an die Dichtefunktion μ . So seien die Abbildungen

$$g_{x,I} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \int_I \mu(t, y) dy,$$

$$g_{y,I} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \int_I \mu(x, t) dx$$

für alle nichtdegenerierten Intervalle $I \subseteq [0, 1]$ stetig.

In diesem Abschnitt sei ein fester Floorplan F mit den Teilrechtecken R_1, \dots, R_{n+1} sowie den inneren Segmenten s_1, \dots, s_n , eine feste Dichtefunktion $\mu : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ und eine feste Gewichtsfunktion $w : \{R_1, \dots, R_{n+1}\} \rightarrow \mathbb{R}_+$ gegeben.

Der Beweis beruht auf einem Luftdruckparadigma. Zunächst umreißen wir die Idee dieses Beweises: Wir fassen den Quotienten aus der gewünschten Masse $w(R_i)$ eines Teilrechtecks R_i und der aktuellen Masse $m(R_i)$ dieses Teilrechtecks als Luftdruck in R_i auf. Auf Grund des inneren Drucks übt R_i auf die zu R_i inzidenten inneren Segmente von F eine Kraft aus. Den Betrag dieser Kraft erhalten wir, indem wir den Druck über den jeweiligen Rand des Teilrechtecks R_i integrieren. Betrachten wir nun ein inneres Segment s , so erhalten wir die auf s wirkende effektive Kraft, indem wir die von den an s anliegenden Teilrechtecken auf s wirkenden Kräfte addieren. Dabei erhalten von links auf s wirkende Kräfte ein anderes Vorzeichen als von rechts wirkende bzw. von oben wirkende ein anderes Vorzeichen als von unten wirkende. Nun verschieben wir das Segment s in Richtung dieser effektiven Kraft und erhalten auf diese Weise ein besseres Gleichgewicht zwischen den Drücken in den einzelnen Teilrechtecken. Wir werden zeigen, dass bei wiederholter Anwendung dieser Strategie und unter Beachtung bestimmter Regeln die Massen $m(R_i)$ aller Teilrechtecke R_i gegen die gewünschten Massen $w(R_i)$ konvergieren.

Definition 15. Der *Druck* in dem Teilrechteck R_i ist definiert als $p(R_i) := \frac{w(R_i)}{m(R_i)}$.

Es sei nun s ein inneres Segment von F und R_i ein Teilrechteck von F , so dass sich s und R_i berühren. Wir betrachten zunächst den Fall, dass s ein vertikales Segment ist. Es sei x_s die x -Koordinate von s und $(x_s, y_u(i)), (x_s, y_o(i))$ seien der untere bzw. obere Endpunkt von $s \cap \partial R_i$. Die *Kraft, die R_i auf s ausübt*, ist dann definiert als

$$f(s, R_i) := p(R_i) \int_{y_u(i)}^{y_o(i)} \mu(x_s, y) dy.$$

Definition 16. Es sei s ein vertikales Segment. Dann ist die *Kraft, die auf s ausgeübt wird*,

$$f(s) := \sum_{R_i \text{ links von } s} f(s, R_i) - \sum_{R_i \text{ rechts von } s} f(s, R_i).$$

Die Definitionen für den Fall, dass s ein horizontales Segment ist, seien symmetrisch.

Definition 17. Ein Segment s ist *im Gleichgewicht*, wenn $f(s) = 0$ ist.

Ein Teilrechteck R_i ist *im Gleichgewicht*, wenn $p(R_i) = 1$ ist.

Wir werden nun folgenden Satz beweisen:

Proposition 3. *Es sind genau dann alle Teilrechtecke von F im Gleichgewicht, wenn alle inneren Segmente von F im Gleichgewicht sind.*

Wir zeigen zunächst mit Lemma 5 die einfachere Richtung von Proposition 3 und im Anschluss mit Lemma 6 die andere Richtung.

Lemma 5. *Wenn alle Teilrechtecke von F im Gleichgewicht sind, dann sind auch alle inneren Segmente von F im Gleichgewicht.*

Beweis. Es sei s ein vertikales inneres Segment von F . Die beiden Endpunkte von s seien (x_s, y_s^u) sowie (x_s, y_s^o) . Da alle Teilrechtecke von F im Gleichgewicht sind, gilt $p(R_i) = 1$ für $i = 1, \dots, n + 1$. Damit folgt

$$\begin{aligned} f(s) &= \sum_{R_i \text{ links von } s} f(s, R_i) - \sum_{R_i \text{ rechts von } s} f(s, R_i) \\ &= \sum_{R_i \text{ links von } s} \left(p(R_i) \int_{y_u^{(i)}}^{y_o^{(i)}} \mu(x_s, y) dy \right) - \sum_{R_i \text{ rechts von } s} \left(p(R_i) \int_{y_u^{(i)}}^{y_o^{(i)}} \mu(x_s, y) dy \right) \\ &= \sum_{R_i \text{ links von } s} \left(\int_{y_u^{(i)}}^{y_o^{(i)}} \mu(x_s, y) dy \right) - \sum_{R_i \text{ rechts von } s} \left(\int_{y_u^{(i)}}^{y_o^{(i)}} \mu(x_s, y) dy \right) \\ &= \int_{y_s^u}^{y_s^o} \mu(x_s, y) dy - \int_{y_s^u}^{y_s^o} \mu(x_s, y) dy \\ &= 0. \end{aligned}$$

Das Segment s ist also im Gleichgewicht. Analog erhalten wir, dass auch alle horizontalen Segmente von F im Gleichgewicht sind. \square

Lemma 6. *Wenn alle inneren Segmente von F im Gleichgewicht sind, dann sind auch alle Teilrechtecke von F im Gleichgewicht.*

Beweis. Wir nehmen an, dass alle inneren Segmente von F im Gleichgewicht sind, nicht jedoch alle Teilrechtecke von F . Es ist also $\min_i p(R_i) < \max_i p(R_i)$ und wir können ein τ wählen mit $\min_i p(R_i) < \tau < \max_i p(R_i)$. Es sei T_τ die Vereinigung aller Teilrechtecke von F , deren Druck größer als τ ist, also $T_\tau := \bigcup \{R_i : p(R_i) > \tau\}$. Wegen $\max_i p(R_i) > \tau$ ist $T_\tau \neq \emptyset$. Es sei weiter Γ_τ der Rand von T_τ , also $\Gamma_\tau := \partial T_\tau$.

Wir zeigen nun per Widerspruch, dass Γ_τ kein vollständiges Segment s von F enthält, so dass T_τ nur zu s inzidente Teilrechtecke enthält, die auf einer der beiden Seiten von s liegen. Dazu nehmen wir an, dass dies nicht der Fall ist. Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, dass Γ_τ das vertikale Segment s enthält und T_τ nur zu s inzidente Teilrechtecke enthält, die links von s liegen. Wir betrachten nun das nichttriviale Intervall I auf s , das als Schnittmenge eines Teilrechtecks R_i , dessen rechter Rand auf s liegt, und eines Teilrechtecks R_j definiert ist, dessen linker Rand auf s liegt. Es ist also $R_i \in T_\tau$ sowie $R_j \notin T_\tau$ und daher $p(R_i) > \tau > p(R_j)$. Die Kraft, die entlang I auf s wirkt, ist

$$p(R_i) \int_I \mu(x_s, y) dy - p(R_j) \int_I \mu(x_s, y) dy = (p(R_i) - p(R_j)) \int_I \mu(x_s, y) dy > 0,$$

da nach unserer Definition einer Dichtefunktion μ für alle nichttrivialen Intervalle I die Ungleichung $\int_I \mu(x_s, y) dy > 0$ erfüllt ist. Da wir s als Vereinigung solcher Intervalle I schreiben können, ist damit $f(s) > 0$ und somit s nicht im Gleichgewicht, im Widerspruch zu der Annahme, dass alle inneren Segmente von F im Gleichgewicht sind. Damit ist die Behauptung gezeigt, dass Γ_τ kein solches Segment s enthalten kann.

Es sei nun s_0 ein Segment von F , das zu Γ_τ beiträgt. Aus der gerade bewiesenen Behauptung folgt, dass Γ_τ das Segment s_0 an einem inneren Punkt von s_0 verlässt und von dort entlang eines anderen Segments s_1 weiterläuft. Durch Iterieren dieses Gedankens erhalten wir eine Folge s_0, s_1, s_2, \dots von Segmenten von F . Da es in F nur endlich viele Segmente gibt und s_1 nur zwei, also ebenfalls endlich viele, Endpunkte besitzt, gibt es ein k und somit auch ein minimales k , so dass $s_k = s_0$ ist und der Endpunkt von s_{k+1} , der auf s_k liegt, dem Endpunkt von s_1 entspricht, der auf s_0 liegt.

Nach der Definition der induzierten separating decomposition SD_F von F gibt es in eben dieser für $i = 0, \dots, k-1$ die Kante $s_i \leftarrow s_{i+1}$. SD_F enthält also den gerichteten Kreis $s_0 \leftarrow s_1 \leftarrow \dots \leftarrow s_{k-1} \leftarrow s_0$. Die vier äußeren Segmente von F können nicht auf einem gerichteten Kreis in SD_F liegen, weshalb sie insbesondere nicht zu Γ_τ beitragen können.

Es sei jetzt s ein vertikales Segment in F mit maximaler x -Koordinate unter allen vertikalen Segmenten in F , die für irgendein τ' mit $\min_i p(R_i) < \tau' < \max_i p(R_i)$ zu $\Gamma_{\tau'}$ beitragen. τ sei so gewählt, dass s zu Γ_τ beiträgt. Auf Grund der Wahl von s liegt T_τ vollständig links von s . Es sei weiter s' das Segment, das in dem oben beschriebenen zu Γ_τ gehörenden Kreis in SD_F der Nachfolger von s ist, sowie p der Schnittpunkt von s und s' . Der Teil von s' , der links von p liegt, gehört dann zu Γ_τ . Rechts von p hingegen haben alle zu s' inzidenten Teilrechtecke den gleichen Druck. Denn ansonsten würde ein Teil von s' rechts von p für eine andere Wahl von τ' zu $\Gamma_{\tau'}$ gehören und der Vorgänger von s' auf dem zu $\Gamma_{\tau'}$ gehörenden Kreis in SD_F einen Widerspruch zur Wahl von s darstellen.

Nun betrachten wir $f(s')$. Dabei teilen wir $f(s')$ in den Beitrag $f_l(s')$ links von p und den Beitrag $f_r(s')$ rechts von p auf. Links von p ist der Druck aller zu s' inzidenten Teilrechtecke auf der Seite von T_τ größer als τ und aller inzidenten Teilrechtecke auf der anderen Seite von s' kleiner als τ und damit auch kleiner als der Druck der Teilrechtecke auf der Seite von T_τ . Es ist also $f_l(s') \neq 0$. Rechts von p haben alle zu s' inzidenten

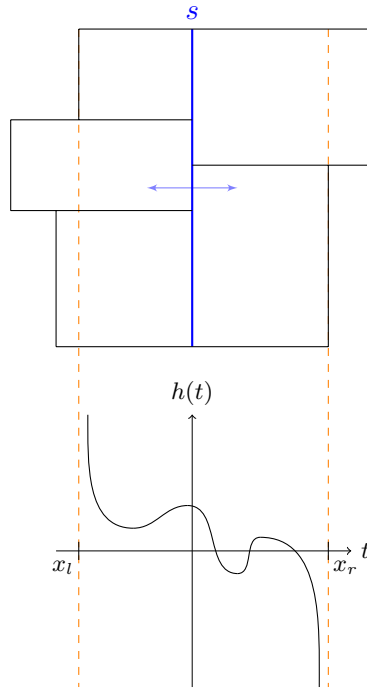


Abbildung 16: Die Abbildung h aus dem Beweis von Proposition 4

Teilrechtecke den gleichen Druck. Damit ist $f_r(s') = 0$. Insgesamt erhalten wir somit $f(s') = f_l(s') + f_r(s') \neq 0$ und s' ist nicht im Gleichgewicht, im Widerspruch zu der Annahme, dass alle inneren Segmente von F im Gleichgewicht sind. \square

Proposition 4. *Wenn ein inneres Segment s von F nicht im Gleichgewicht ist, dann können wir s parallel an eine andere Position verschieben und die Position aller anderen Segmente von F beibehalten, so dass anschließend s im Gleichgewicht ist und der resultierende Floorplan schwach äquivalent zu F ist.*

Beweis. Es sei s ein vertikales Segment von F , das nicht im Gleichgewicht ist. Wir betrachten zunächst den Bereich, in dem wir s parallel verschieben können, so dass der resultierende Floorplan schwach äquivalent zu F ist. Dazu bezeichnen wir mit S_l und S_r die Mengen der Teilrechtecke von F , die s von links bzw. von rechts berühren. Es sei außerdem R_l das Teilrechteck in S_l , dessen linker Rand eine maximale x -Koordinate x_l unter allen Teilrechtecken in S_l hat, und R_r das Teilrechteck in S_r , dessen rechter Rand eine minimale x -Koordinate x_r unter allen Teilrechtecken in S_r hat. Dann können wir s offensichtlich parallel an jede Position $x_s = t$ mit $x_l < t < x_r$ verschieben und der resultierende Floorplan ist schwach äquivalent zu F .

Wir definieren nun die Abbildung $h : (x_l, x_r) \rightarrow \mathbb{R}$, die ein $t \in (x_l, x_r)$ auf die Kraft $f(s)$ abbildet, welche auf das Segment s ausgeübt wird, wenn dieses an die Stelle $x_s = t$

verschoben worden ist. Es sei daran erinnert, dass die Abbildung

$$g : [0, 1]^4 \rightarrow \mathbb{R}_+ : (a, b, c, d) \mapsto \int_a^b \int_c^d \mu(x, y) \, dx \, dy$$

sowie für alle nichtdegenerierten Intervalle I die Abbildungen

$$g_{x,I} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+ : t \mapsto \int_I \mu(t, y) \, dy,$$

$$g_{y,I} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+ : t \mapsto \int_I \mu(x, t) \, dx$$

nach Voraussetzung stetig sind. Auf Grund der Stetigkeit von g hängt für alle Teilrechtecke $R_i \in S_l \cup S_r$ der Druck $p(R_i) = \frac{w(R_i)}{m(R_i)}$ stetig von t ab. Mit der Stetigkeit von $g_{x,I}$ für alle nichtdegenerierte Intervall $I = [y_u(s), y_o(s)]$ folgt schließlich, dass auch h eine stetige Abbildung ist.

Wir untersuchen nun, wie sich h an den beiden Rändern des Definitionsbereichs verhält. Auf Grund der Stetigkeit von g ist $\lim_{t \rightarrow x_l} m(R_l) = 0$ und damit $\lim_{t \rightarrow x_l} p(R_l) = \infty$. Es seien y_u die y -Koordinate des unteren Randes von R_l und y_o die y -Koordinate des oberen Randes von R_l sowie $I := [y_u, y_o]$. Da für alle $t \in (x_l, x_r)$ der Wert $g_{x,I}(t) > 0$ ist und die Abbildung $g_{x,I}$ stetig und damit beschränkt ist, folgt $\lim_{t \rightarrow x_l} h(t) = +\infty$. Analog erhalten wir $\lim_{t \rightarrow x_r} h(t) = -\infty$. Nach dem Zwischenwertsatz gibt es folglich ein $t_0 \in (x_l, x_r)$ mit $h(t_0) = 0$. Wenn wir s an die Position $x_s = t_0$ verschoben haben, gilt also $f(s) = 0$, d. h. s ist dann im Gleichgewicht.

Der Beweis für den Fall, dass s ein horizontales Segment ist, läuft analog. \square

Definition 18. Die *Entropie* eines Teilrechtecks R_i ist definiert als

$$E(R_i) := -w(R_i) \log p(R_i).$$

Die *Entropie* des Floorplans F ist definiert als

$$E := \sum_{i=1}^{n+1} E(R_i) = \sum_{i=1}^{n+1} -w(R_i) \log p(R_i).$$

Dabei bezeichne \log den natürlichen Logarithmus.

Lemma 7. *Es sei $x \in \mathbb{R}_+$. Dann ist $\log x \geq 1 - \frac{1}{x}$. Weiter ist $\log x = 1 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 1$.*

Beweis. Wir zeigen, dass für die Abbildung $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \log x - \left(1 - \frac{1}{x}\right)$ die Ungleichung $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}_+$ erfüllt ist. Dazu betrachten wir die erste Ableitung von f . Es ist $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right)$. Die einzige Nullstelle der ersten Ableitung liegt also bei $x = 1$. Wegen $f(1) = 0$, $f\left(\frac{1}{e}\right) = -2 + e > 0$ und $f(e) = \frac{1}{e} > 0$ liegt bei $x = 0$ das absolute Minimum von f . Damit folgt $f(x) \geq f(1) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}_+$ sowie $\log x = 1 - \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. \square

Lemma 8. Die Entropie E eines Floorplans F ist nichtpositiv und $E = 0$ gilt genau dann, wenn alle Teilrechtecke von F im Gleichgewicht sind.

Beweis. Für die Entropie eines Teilrechtecks R_i gilt unter Verwendung von Lemma 7

$$\begin{aligned} E(R_i) &= -w(R_i) \log p(R_i) \leq -w(R_i) \left(1 - \frac{1}{p(R_i)}\right) \\ &= -w(R_i) \left(1 - \frac{m(R_i)}{w(R_i)}\right) = m(R_i) - w(R_i). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die Entropie von F

$$E = \sum_{i=1}^{n+1} E(R_i) \leq \sum_{i=1}^{n+1} (m(R_i) - w(R_i)) = \sum_{i=1}^{n+1} m(R_i) - \sum_{i=1}^{n+1} w(R_i) = 1 - 1 = 0.$$

Es folgt außerdem, dass die Gleichheit $E = 0$ genau dann erfüllt ist, wenn in der obigen Summe für jeden Summanden Gleichheit gilt, also wenn $\log p(R_i) = 1 - \frac{1}{p(R_i)}$ für $i = 1, \dots, n+1$ ist. Nach Lemma 7 ist dies genau dann der Fall, wenn für $i = 1, \dots, n+1$ die Gleichung $p(R_i) = 1$ erfüllt ist, also wenn alle Teilrechtecke von F im Gleichgewicht sind. \square

Lemma 9. Wir können ein Segment s , das nicht im Gleichgewicht ist, an eine Position verschieben, so dass es anschließend im Gleichgewicht ist und die Entropie von F gewachsen ist.

Beweis. Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit s ein vertikales Segment und $f(s) > 0$. Es sei weiter $t_0 := \min \{t \in (x_s, x_r) : h(t) = 0\}$. Wir definieren die Abbildung $E : [x_s, t_0] \rightarrow \mathbb{R}$, die ein $t \in [x_s, t_0]$ auf die Entropie des Floorplans abbildet, den wir erhalten, wenn wir s an die Position $x_s = t$ verschoben haben.

Wir werden nun zeigen, dass $\frac{d}{dt} E(t) = h(t)$ ist. Durch Verschieben des Segments s ändert sich nur die Entropie der Teilrechtecke, die inzident zu s sind. Es genügt daher, die Änderung der Entropie solcher Teilrechtecke zu betrachten. Es sei $R_i = [x_1, t] \times [y_1, y_2] \in S_l$ (für die Definition von S_l siehe den Beweis von Proposition 4). Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(R_i) &= \frac{d}{dt} (-w(R_i) \log p(R_i)) = -w(R_i) \frac{1}{p(R_i)} \frac{d}{dt} p(R_i) \\ &= -w(R_i) \frac{m(R_i)}{w(R_i)} \frac{d}{dt} \frac{w(R_i)}{m(R_i)} = -w(R_i) \frac{m(R_i) - w(R_i)}{w(R_i) m(R_i)^2} \frac{d}{dt} m(R_i) \\ &= \frac{w(R_i)}{m(R_i)} \frac{d}{dt} m(R_i) = p(R_i) \frac{d}{dt} \int_{x_1}^t \int_{y_1}^{y_2} \mu(x, y) dy dx \\ &= p(R_i) \int_{y_1}^{y_2} \mu(t, y) dy. \end{aligned}$$

Für ein Teilrechteck $R_j = [t, x_2] \times [y_1, y_2] \in S_r$ erhalten wir mit der gleichen Rechnung $\frac{d}{dt} E(R_j) = -p(R_j) \int_{y_1}^{y_2} \mu(t, y) dy$. Wegen $E = \sum_{i=1}^{n+1} E(R_i)$ ist $\frac{d}{dt} E(t) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{d}{dt} E(R_i)$

und durch Einsetzen der obigen Ergebnisse erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(t) &= \sum_{R_i \in S_l} \frac{d}{dt}E(R_i) + \sum_{R_j \in S_r} \frac{d}{dt}E(R_j) + \sum_{R_k \notin S_l, S_r} \frac{d}{dt}E(R_k) \\
&= \sum_{R_i \in S_l} p(R_i) \int_{y_1}^{y_2} \mu(t, y) dy + \sum_{R_j \in S_r} -p(R_j) \int_{y_1}^{y_2} \mu(t, y) dy + \sum_{R_k \notin S_l, S_r} 0 \\
&= h(t).
\end{aligned}$$

Für alle $t \in [x_s, t_0)$ ist $h(t) > 0$ und damit auch $\frac{d}{dt}E(t) > 0$, was bedeutet, dass die Entropie wächst, wenn wir das Segment s an die Position $x_s = t_0$ verschieben. \square

Im Folgenden betrachten wir eine Folge F_0, F_1, F_2, \dots von Floorplans im Einheitsquadrat, wobei $F_0 = F$ ist und für $i = 0, 1, 2, \dots$ der Floorplan F_{i+1} entstehe, indem in F_i ein Segment, das nicht im Gleichgewicht ist, so verschoben wird, dass es anschließend im Gleichgewicht ist und die Entropie des Floorplans gewachsen ist.

Definition 19. Wir nennen eine Regel, nach der in F_i das Segment ausgewählt wird, welches verschoben wird, *nichtignorierend*, falls Folgendes erfüllt ist: Wenn ein Segment s in einem Floorplan F_i nicht im Gleichgewicht ist, dann gibt es ein $j > i$, so dass s in F_j im Gleichgewicht ist.

Proposition 5. Falls die Auswahl des Segments, das verschoben wird, nichtignorierend ist, gibt es eine konvergente Teilfolge G_0, G_1, G_2, \dots von F_0, F_1, F_2, \dots . Die Entropie des Grenzwerts $G := \lim_{i \rightarrow \infty} G_i$ ist Null.

Beweis. Wir betrachten wieder die Bijektion zwischen der Menge der zu F schwach äquivalenten Floorplans im Einheitsquadrat und der Menge $P_F \subseteq (0, 1)^n$ aus Lemma 3. Zu der Folge F_0, F_1, F_2, \dots von schwach äquivalenten Floorplans korrespondiert eine Folge z_0, z_1, z_2, \dots von Vektoren aus P_F . Da P_F beschränkt ist, gibt es eine konvergente Teilfolge von z_0, z_1, z_2, \dots . Es sei G_0, G_1, G_2, \dots die zu dieser konvergenten Teilfolge korrespondierende Folge von Floorplans und e_i die Entropie von G_i für $i = 0, 1, 2, \dots$. Nach Voraussetzung ist die Folge e_0, e_1, e_2, \dots streng monoton wachsend und nach Lemma 8 ist sie durch Null nach oben beschränkt. Sie konvergiert also gegen einen Wert $a \in \mathbb{R}_-$. Es bleibt zu zeigen, dass $a = 0$ ist.

Wir nehmen an, dass $a \neq 0$ ist. Da die Entropie stetig in den Koordinatenvektoren aus P_F ist, beträgt die Entropie des Floorplans $G = \lim_{i \rightarrow \infty} G_i$ also $a < 0$. Nach Lemma 8 gibt es daher in G ein Teilrechteck, das nicht im Gleichgewicht ist. Daraus folgt mit Proposition 3, dass es in G auch ein Segment s gibt, das nicht im Gleichgewicht ist. Es sei Δ der Wert, um den die Entropie von G wächst, wenn s in G wie in Lemma 9 an eine Position verschoben wird, so dass s im Gleichgewicht ist. Da G der Grenzwert der Folge G_0, G_1, G_2, \dots ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $i \geq N$ das Segment s in G_i nicht im Gleichgewicht ist und die Entropie von G_i um mindestens $\frac{\Delta}{2}$ wächst, wenn s in G_i wie in Lemma 9 verschoben wird. Da a der Grenzwert der Folge e_0, e_1, e_2, \dots ist, gibt es außerdem ein $M \in \mathbb{N}$, so dass für alle $i \geq M$ die Ungleichung $e_i > a - \frac{\Delta}{2}$ erfüllt ist. Daraus folgt, dass für alle $i \geq \max\{M, N\}$ das Segment s nicht zum Verschieben

ausgewählt wird, obwohl es nicht im Gleichgewicht ist. Dies ist ein Widerspruch zu der Voraussetzung, dass die Auswahl des Segments, das verschoben wird, nichtignorierend ist, und daher die Annahme, dass $a \neq 0$ ist, falsch. \square

Proposition 6. *Die Folge F_0, F_1, F_2, \dots konvergiert gegen einen Floorplan F' , dessen Entropie Null ist.*

Beweis. Es seien G_0, G_1, G_2, \dots und G'_0, G'_1, G'_2, \dots zwei konvergente Teilfolgen der Folge F_0, F_1, F_2, \dots sowie $G := \lim_{i \rightarrow \infty} G_i$ und $G' := \lim_{i \rightarrow \infty} G'_i$ die Grenzwerte dieser beiden Folgen. Nach Proposition 5 beträgt die Entropie der Floorplans G und G' jeweils Null. Daraus folgt mit Lemma 8, dass sowohl in G als auch in G' alle Teilrechtecke im Gleichgewicht sind, d. h. G und G' erfüllen beide $m(R_i) = w(R_i)$ für alle Teilrechtecke R_i . Nach Lemma 2 ist also $G = G'$.

Die Folge F_0, F_1, F_2, \dots hat also genau einen Häufungspunkt F' , dessen Entropie nach Proposition 5 Null ist. Da P_F beschränkt ist, ist F' der Grenzwert der Folge F_0, F_1, F_2, \dots \square

4 Unterbringen von Floorplans auf Punktmengen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit einer anderen Form der Optimierung von Floorplans. Es sei F ein pseudogenerischer Floorplan und S eine Teilmenge der inneren Segmente von F . Außerdem sei $P \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Menge von genau $|S|$ Punkten, also $|P| = |S|$. Unser Ziel ist es nun, einen zu F schwach äquivalenten Floorplan F' zu finden, so dass jeder Punkt aus P von einem der zu den Segmenten aus S korrespondierenden Segmenten von F' überdeckt wird.

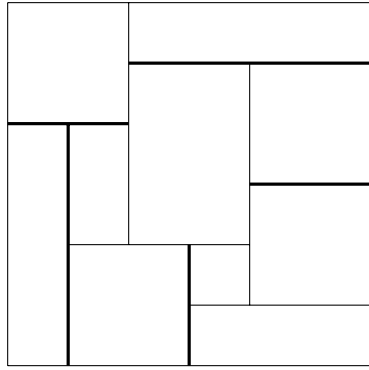
Wir präsentieren hier den Beweis aus [5, Abschnitt 4] für die Existenz eines solchen Floorplans F' . Wir müssen jedoch zunächst eine stärkere Voraussetzung an die Punktmenge P stellen.

Definition 20. Eine Menge $P \subseteq \mathbb{R}^2$ von Punkten heißt *generisch*, falls keine zwei Punkte aus P die gleiche x - oder y -Koordinate besitzen.

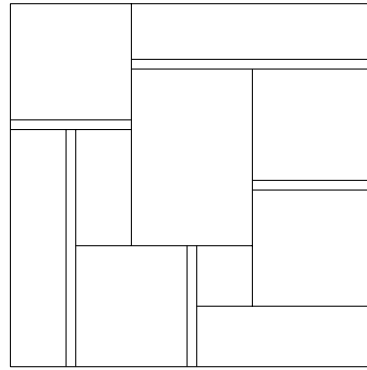
Theorem 2. *Es sei F ein pseudogenerischer Floorplan, S eine Teilmenge der inneren Segmente von F , $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ ein achsenparalleles Rechteck und $P \subseteq \mathcal{R}$ eine generische Menge von $|S|$ Punkten. Dann gibt es einen zu F schwach äquivalenten Floorplan F' mit dem Grundrechteck \mathcal{R} , so dass jeder Punkt aus P von einem der zu den Segmenten aus S korrespondierenden Segmenten von F' überdeckt wird.*

Beweis. Wir können uns aus den gleichen Gründen wie zuvor auf den Fall beschränken, dass das Grundrechteck von F sowie \mathcal{R} jeweils das Einheitsquadrat sind. Wir werden nun einen neuen Floorplan F_S , eine Dichtefunktion μ und eine Gewichtsfunktion w konstruieren und auf diese Theorem 1 anwenden.

Wir beginnen mit der Dichtefunktion μ . Die Idee ist, dass μ in der Nähe der Punkte aus P große Werte annimmt und ansonsten kleine. Es bezeichne $m := |P|$ die Anzahl der Punkte in P . Dann sei $\mu := \frac{1}{m+1} \left(1 + \sum_{p \in P} \mu_p \right)$. Die Definition der Dichtefunktionen



(a) Ein Floorplan F , bei dem eine Teilmenge S der inneren Segmente fett gezeichnet ist



(b) Der Floorplan F_S , der durch Verdoppeln der Segmente aus S entsteht

Abbildung 17: Die Konstruktion des Floorplans F_S

μ_p folgt. Wir wählen ein $\Delta > 0$, so dass für je zwei Punkte $p, p' \in P$ mit $p \neq p'$ die Ungleichungen $|x_p - x_{p'}| > 2\Delta$ und $|y_p - y_{p'}| > 2\Delta$ sowie für alle $p \in P$ die Ungleichungen $x_p, y_p, 1 - x_p, 1 - y_p > \Delta$ erfüllt sind. Dies ist möglich, da P generisch ist. Es bezeichne $D_\Delta(p)$ den Kreis mit dem Mittelpunkt p und dem Radius Δ . Wir definieren nun für alle $p \in P$ und $q \in [0, 1]^2$

$$\mu_p(q) := \begin{cases} \frac{1}{\pi\Delta^2}, & \text{falls } q \in D_\Delta(p), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit erhalten wir für alle $p \in P$

$$\int_0^1 \int_0^1 \mu_p(x, y) dx dy = \iint_{D_\Delta(p)} \frac{1}{\pi\Delta^2} dx dy = \frac{1}{\pi\Delta^2} \pi\Delta^2 = 1$$

und somit

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \mu(x, y) dx dy &= \frac{1}{m+1} \left[\int_0^1 \int_0^1 1 dx dy + \sum_{p \in P} \left(\int_0^1 \int_0^1 \mu_p(x, y) dx dy \right) \right] \\ &= \frac{1}{m+1} (1 + m) = 1. \end{aligned}$$

μ ist also eine gültige Dichtefunktion.

Jetzt konstruieren wir den Floorplan F_S . F_S entstehe aus F , indem in F jedes Segment aus S verdoppelt wird, d. h. jedes vertikale Segment aus S durch eine linke und eine rechte Kopie ersetzt wird und jedes horizontale Segment aus S durch eine untere und eine obere Kopie. Oder, anders formuliert, ersetzen wir jedes Segment aus S durch ein schmales Teilrechteck (siehe Abbildung 17). Die Menge dieser m neuen schmalen Teilrechtecke bezeichnen wir mit \mathcal{S} und r sei die Anzahl aller Teilrechtecke von F_S .

Als Letztes legen wir nun die Gewichtsfunktion w fest. Unser Ziel ist es, dass in dem Floorplan F jedes der Segmente aus S auf genau einem der Punkte aus P landet bzw.

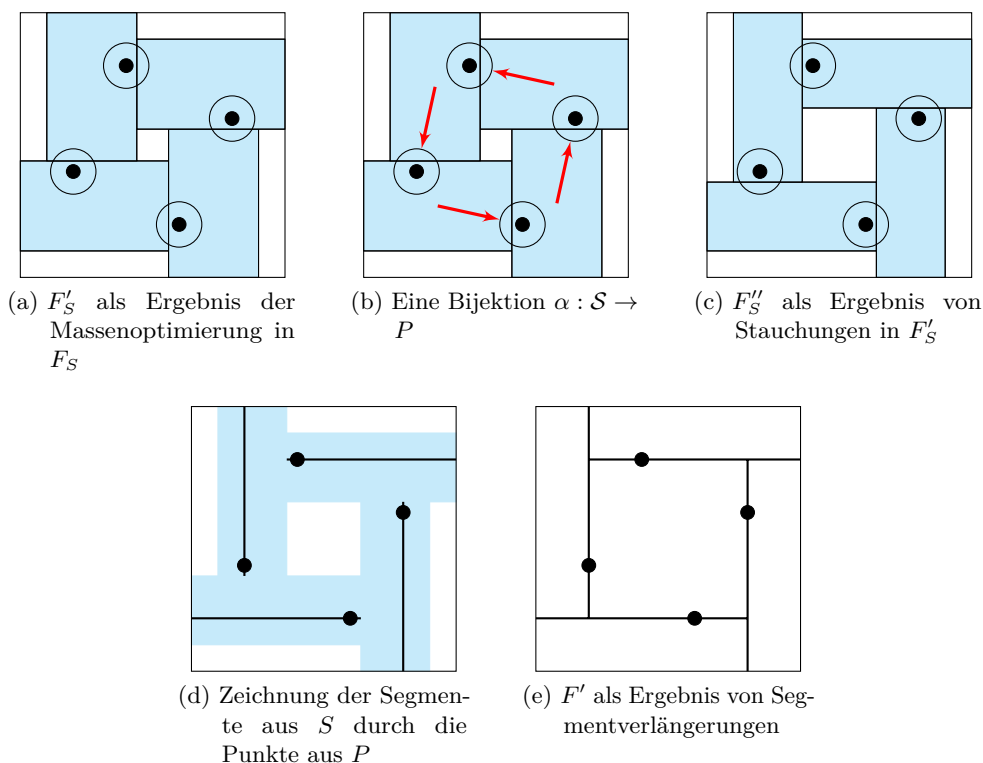


Abbildung 18: Zwischenschritte der Lösung des Optimierungsproblems aus Abbildung 2

dass in dem Floorplan F_S jedes der Teilrechtecke aus \mathcal{S} genau einen der Kreise $D_\Delta(p)$ um die Punkte aus P enthält. Daher definieren wir für alle Teilrechtecke R von F_S

$$w(R) := \begin{cases} \frac{1}{m+1} \left(1 + \frac{1}{r}\right), & \text{falls } R \in \mathcal{S}, \\ \frac{1}{m+1} \frac{1}{r} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit erhalten wir

$$\sum_{R \text{ Teilrechteck von } F_S} w(R) = m \frac{1}{m+1} \left(1 + \frac{1}{r}\right) + (r-m) \frac{1}{m+1} \frac{1}{r} = 1.$$

w ist also eine gültige Gewichtsfunktion.

Jetzt sind alle Voraussetzungen erfüllt, um Theorem 1 auf F_S , μ und w anzuwenden. Wir erhalten also einen Floorplan F'_S im Einheitsquadrat, der schwach äquivalent zu F_S ist und $m_\mu(R) = w(R)$ für alle Teilrechtecke R von F'_S erfüllt.

Unser Ziel war es, dass jedes der Teilrechtecke aus \mathcal{S} genau einen der Kreise $D_\Delta(p)$ enthält. Da diese Kreise jedoch nicht vollständig innerhalb eines einzigen Teilrechtecks liegen müssen, sondern auch zu der Masse mehrerer Teilrechtecke beitragen können (siehe Abbildung 18(a)), suchen wir nun zumindest eine Bijektion α zwischen \mathcal{S} und P , so dass jedem Teilrechteck R aus \mathcal{S} ein Punkt p aus P zugeordnet wird, dessen umgebender

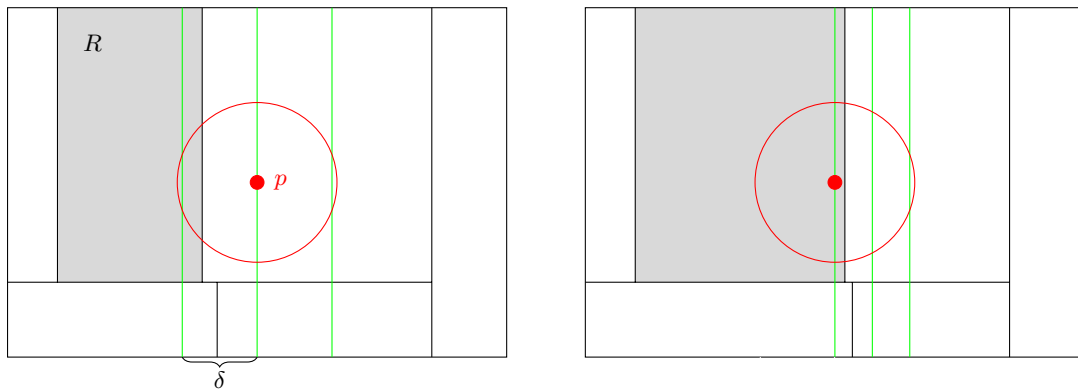
Kreis $D_\Delta(p)$ wenigstens teilweise in R liegt. Dazu definieren wir uns einen bipartiten Hilfsgraphen G , dessen Knoten die Punkte aus P und die Teilrechtecke aus \mathcal{S} seien. Dies seien auch die beiden Partitionsklassen. Eine Kante zwischen einem Punkt $p \in P$ und einem Teilrechteck $R \in \mathcal{S}$ enthalte G genau dann, wenn $R \cap D_\Delta(p) \neq \emptyset$ in F'_S ist. Die gesuchte Bijektion α korrespondiert zu einem perfekten Matching in G . Wir werden nun zeigen, dass in G ein perfektes Matching existiert. Dazu verwenden wir den Satz von Hall. Wir müssen also für jede Teilmenge A von \mathcal{S} zeigen, dass es mindestens $|A|$ Punkte in P gibt, die in G zu einem der Teilrechtecke aus A benachbart sind. Da F'_S die Gewichtsfunktion w realisiert, gilt

$$m_\mu\left(\bigcup A\right) = \sum_{R \in A} m_\mu(R) = \sum_{R \in A} w(R) = |A| \frac{1}{m+1} \left(1 + \frac{1}{r}\right).$$

Wegen $\mu = \frac{1}{m+1} \left(1 + \sum_{p \in P} \mu_p\right)$ ist $m_\mu = \frac{1}{m+1} \left(m_1 + \sum_{p \in P} m_{\mu_p}\right)$, wobei die Dichtefunktion $\mathbf{1}$ definiert sei als $\mathbf{1} : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}_+ : q \mapsto 1$. Des Weiteren ist $m_1(\bigcup A) < 1$, da es in F'_S mindestens ein Teilrechteck R mit $R \notin \mathcal{S} \supseteq A$ gibt, und $m_{\mu_p}(\bigcup A) \leq 1$ für alle $p \in P$. Es folgt also, dass es mindestens $|A|$ Punkte $p \in P$ mit $m_{\mu_p}(\bigcup A) > 0$ geben muss. Da diese Punkte nach der Definition von G alle mit einem Teilrechteck aus A verbunden sind, ist die Voraussetzung für den Satz von Hall erfüllt und mit diesem Satz folgt, dass es in G ein perfektes Matching gibt. Die gesuchte Bijektion $\alpha : \mathcal{S} \rightarrow P$ existiert also ebenfalls (siehe Abbildung 18 (b)).

Der nächste Schritt ist, dass wir den Floorplan F'_S in einen schwach äquivalenten Floorplan F''_S überführen werden, der die Eigenschaft hat, dass jedes Teilrechteck $R \in \mathcal{S}$ den Punkt $\alpha(R)$ enthält. Es sei $R \in \mathcal{S}$ ein Teilrechteck von F'_S , das den Punkt $\alpha(R) =: p = (p_x, p_y)$ nicht enthält. Wir betrachten den Fall, dass p rechts von R liegt. Es seien x_l und x_r die x -Koordinaten des linken und rechten Randes von R . Dann wählen wir ein $\delta \leq \Delta$ mit $x_l < p_x - \delta < x_r$, was möglich ist, da R den Kreis $D_\Delta(p)$ schneidet, und stauchen das Rechteck $[p_x - \delta, p_x + \delta] \times [0, 1]$ von F'_S in das Rechteck $[p_x, p_x + \delta] \times [0, 1]$ und füllen das dadurch entstandene freie Rechteck $[p_x - \delta, p_x] \times [0, 1]$, indem wir die horizontalen Segmente von F'_S , deren linker Endpunkt eine x -Koordinate kleiner als $p_x - \delta$ und deren rechter Endpunkt eine x -Koordinate größer als oder gleich $p_x - \delta$ hatte, über diesen Bereich verlängern (siehe Abbildung 19). Der so entstandene Floorplan ist offensichtlich schwach äquivalent zu F'_S und der Punkt p liegt nun nicht mehr rechts von R und auch nicht links von R . Der Fall, dass p links von R liegt, ist analog zu beheben. Auch die Fälle, dass p ober- oder unterhalb von R liegt, können mit entsprechenden vertikalen Stauchungen behandelt werden. Es ist zu beachten, dass für ein Rechteck R sowohl eine horizontale als auch eine vertikale Stauchung notwendig sein können. Wegen $\delta \leq \Delta$ und der Wahl von Δ überschneiden sich die von den einzelnen Stauchungen in einer der Koordinatenrichtungen betroffenen Gebiete nicht, so dass das Ergebnis einer Stauchung nicht durch eine andere Stauchung wieder rückgängig gemacht werden kann. Wir erhalten also durch wiederholtes Anwenden von Stauchungen den gewünschten Floorplan F''_S (siehe Abbildung 18 (c)).

Der letzte Schritt ist nun, dass wir aus F''_S einen zu F schwach äquivalenten Floorplan F' konstruieren, in dem für alle $s \in \mathcal{S}$ gilt, dass s den Punkt $\alpha(R_s)$ überdeckt. Für alle



(a) Ein Floorplan, in dem das Teilrechteck R den Punkt $p = \alpha(R)$ nicht enthält (b) Das Ergebnis einer horizontalen Stauchung, die dies behebt

Abbildung 19: Visualisierung einer Stauchung

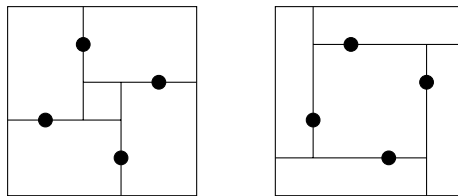


Abbildung 20: Zwei schwach äquivalente Floorplans, welche auf der gleichen Punktmenge untergebracht sind

Segmente $s \notin S$ übernehmen wir einfach eine Kopie s' des entsprechenden Segments aus F''_S . Für alle horizontalen Segmente $s \in S$ nehmen wir eine Kopie s' eines der beiden horizontalen Randsegmente von R_s in F''_S , orthogonal verschoben zur y -Koordinate $\alpha(R_s)_y$, also in das Teilrechteck R_s hinein verschoben. Und für alle vertikalen Segmente $s \in S$ nehmen wir analog eine orthogonal verschobene Kopie s' eines der vertikalen Randsegmente von R_s in F''_S . Die so erzeugte Menge $\{s' : s \text{ Segment von } F\}$ von Segmenten erfüllt zwar die Bedingung, dass jedes Segment s' mit $s \in S$ den Punkt $\alpha(R_s)$ überdeckt, jedoch bildet sie noch keinen Floorplan (siehe Abbildung 18 (d)). Dies können wir aber folgendermaßen beheben: Wenn s_1 und s_2 Segmente von F sind, so dass s_1 einen Endpunkt auf s_2 hat und $s_2 \in S$ ist, dann können wir das Segment s'_1 in R_{s_2} hinein verlängern und so den Kontakt zu s'_2 wiederherstellen (siehe Abbildung). Wenn wir dies für alle fraglichen Paare s'_1, s'_2 getan haben, bildet die Menge der Segmente s' einen Floorplan F' (siehe Abbildung 18 (e)). Da dieser offensichtlich schwach äquivalent zu F ist und die Punkte aus P weiterhin in der verlangten Weise überdeckt, schließt dies den Beweis. \square

Es sei nun F ein pseudogenerischer Floorplan mit n inneren Segmenten und P eine generische Punktmenge mit $|P| = n$. Wie in Abbildung 20 zu sehen ist, ist dann die Unterbringung von F auf P nicht eindeutig. Entgegen einer Vermutung in [1, Abschnitt 7]

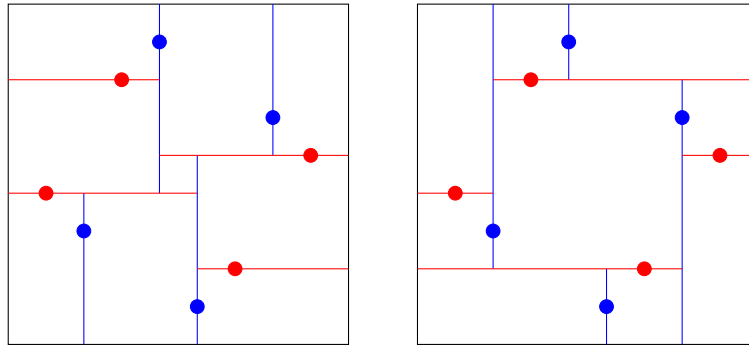


Abbildung 21: Zwei schwach äquivalente Floorplans, die auf der gleichen Punktmenge untergebracht sind, wobei für jeden Punkt festgelegt ist, ob er von einem horizontalen oder einem vertikalen Segment überdeckt wird

ist sie auch dann nicht eindeutig, wenn für jeden Punkt aus P festgelegt wird, ob er von einem horizontalen oder einem vertikalen Segment von F überdeckt werden soll (siehe Abbildung 21).

5 Implementation

Der Beweis von Theorem 2 liefert uns einen Algorithmus, der einen Floorplan auf einer Punktmenge unterbringt. In diesem Abschnitt werden wir uns mit Details der Implementation dieses Algorithmus beschäftigen.

Das Grundgerüst des Algorithmus ist folgendes, wobei wir die Bezeichnungen aus Abschnitt 4 übernehmen:

Algorithmus 1 Unterbringen von Segmenten eines Floorplans auf einer Punktmenge

Input: Floorplan F , Teilmenge S der inneren Segmente von F , generische Punktmenge P mit $|P| = |S|$

Output: Ein Floorplan F' , der schwach äquivalent zu F ist und dessen Segmente aus S auf den Punkten aus P liegen

```

Berechne  $F_S, \mu_P$ 
Initialisiere  $G$ 
while  $\bar{A}$  perfektes Matching in  $G$  do
    Verbessere  $F_S$ 
    Aktualisiere  $G$ 
end while
Wende Stauchungen auf  $F_S$  an, falls notwendig
Konstruiere  $F'$  aus  $F_S$ 
return  $F'$ 

```

Auf einige Schritte dieses Algorithmus werden wir jetzt genauer eingehen.

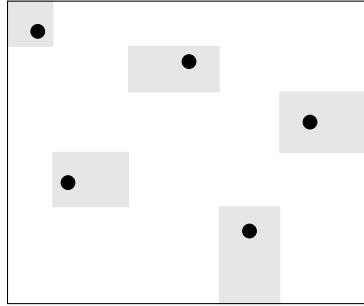


Abbildung 22: Die Umgebungen U'_p der Punkte $p \in P$ für die Definition der Kantenmenge von G

Zunächst geht es um die Dichtefunktion μ_p . Für diese müssen wir einen Radius Δ mit $0 < \Delta < M$ wählen, wobei M von den Koordinaten der Punkte aus P abhängt (siehe Abschnitt 4). Aus numerischen Gründen sollte Δ weder zu nahe bei 0, noch zu nahe bei M liegen. In der Praxis hat sich $\Delta = \frac{2}{3}M$ als gut erwiesen. Außerdem muss die Umgebung U_p des Punktes $p \in P$, in der μ_p einen Wert ungleich Null annimmt, kein Kreis sein. Es ist dabei jedoch zu beachten, dass die Abbildungen g_x, I und g_y, I (siehe Abschnitt 3.2.2) stetig sein müssen. Möglich ist also beispielsweise ein Quadrat, das nicht achsenparallel ist. Hier hat sich in der Praxis ein im Vergleich zu einem achsenparallelen Quadrat um 45° gedrehtes Quadrat als gute Lösung erwiesen. Der Wert, den μ_p in U_p annimmt, muss dann entsprechend auf den Kehrwert des Flächeninhalts von U_p geändert werden.

Jetzt geht es um die Definition der Kantenmenge des Graphen G und dabei insbesondere um die Umgebungen U'_p der Punkte $p \in P$, welche dafür verwendet werden. In Abschnitt 4 wird als U'_p die gleiche Umgebung von p verwendet wie für die Definition der Dichtefunktionen μ_p , also U_p . Bei der späteren Analyse wird jedoch nur benutzt, dass $U_p \subseteq U'_p$ für alle $p \in P$ ist sowie dass die von den einzelnen Umgebungen U'_p abgedeckten Abschnitte der x - bzw. y -Achse disjunkt sind, damit später die Stauchungen funktionieren. Es ist sinnvoll, die Umgebungen U'_p unter diesen Bedingungen maximal zu wählen. Denn dies erhöht die Anzahl der Kanten in G und somit auch die Wahrscheinlichkeit, dass G ein perfektes Matching besitzt. So kann die Anzahl der Iterationen der Hauptschleife des Algorithmus verringert werden, was die Laufzeit des Algorithmus verbessert. Abbildung 22 zeigt, wie die Umgebungen U'_p in diesem Fall aussehen. Dabei ist zu beachten, dass in diesem Fall die Umgebungen U'_p offene Mengen sein müssen, damit die abgedeckten Koordinatenachsenabschnitte tatsächlich disjunkt sind.

Zuletzt möchten wir darauf eingehen, was es bedeutet, den Floorplan F_S zu verbessern. Damit ist gemeint, mindestens ein Segment von F_S , das nicht im Gleichgewicht ist, so zu verschieben, dass es anschließend im Gleichgewicht ist und die Entropie von F_S gewachsen ist. Dies entspricht einer oder mehrerer Iterationen des Algorithmus zur Optimierung der Massen der Teilrechtecke eines Floorplans, der sich aus dem Beweis in Abschnitt 3.2.2 ergibt. Dieser Algorithmus wird in [6] für den Fall einer konstanten Dichtefunktion unter praktischen Gesichtspunkten bereits ausführlich untersucht. Wir möchten daher nur auf

einen Unterschied eingehen, der sich für andere Dichtefunktionen ergibt. Die Abbildung h (siehe Proposition 4 sowie Lemma 9) hat im Falle einer konstanten Dichtefunktion genau eine Nullstelle, die mit dem Bisektionsverfahren ermittelt werden kann. Im Allgemeinen kann die Abbildung h jedoch mehrere Nullstellen besitzen. Gesucht ist eine Nullstelle von h , so dass eine Verschiebung des betrachteten Segments an die entsprechende Position die Entropie des Floorplans wachsen lässt. Falls wir mit dem Bisektionsverfahren eine Nullstelle finden, die dieses Kriterium nicht erfüllt, können wir zumindest den Suchraum für die Nullstelle einschränken, da wir wissen, dass die am nächsten bei der aktuellen Position des Segments liegende Nullstelle das Kriterium erfüllt. In diesem verkleinerten Suchraum können wir dann eine Stelle suchen, an der die Abbildung h einen negativen bzw. einen positiven Funktionswert hat, um erneut das Bisektionsverfahren anwenden zu können.

Dieser Arbeit liegt eine Implementation des beschriebenen Algorithmus bei. Der Zweck dieses Programms war jedoch nur, mit Floorplans und der Anwendung des Luftdruckparadigmas auf diese, insbesondere im Zusammenhang mit einer nichtkonstanten Dichtefunktion wie bei dem Problem der Unterbringung auf einer Punktmenge, zu experimentieren.

6 Anwendung des Luftdruckparadigmas auf Triangulierungen

In Abschnitt 3.2.2 haben wir gezeigt, dass das Optimierungsproblem aus Abschnitt 3, bei dem die Massen der einzelnen Teilrechtecke eines Floorplans optimiert werden, mit Hilfe eines Luftdruckparadigmas gelöst werden kann. Es stellt sich nun die Frage, ob dieses Luftdruckparadigma auch zur Lösung anderer Probleme ähnlicher Natur verwendet werden kann. Ein Problem, das dafür in Frage kommt, ist eine Abwandlung des Optimierungsproblems aus Abschnitt 3, bei der nicht mehr Zerlegungen eines Grundrechtecks in Teilrechtecke betrachtet werden, sondern Zerlegungen eines Grunddreiecks in Teildreiecke. Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, wie das Luftdruckparadigma an das neue Problem angepasst werden kann und welche Resultate aus Abschnitt 3.2.2 erhalten bleiben. Auf der anderen Seite werden wir auf Schwierigkeiten eingehen, die sich ergeben und für die wir bisher keine Lösung haben.

Definition 21. Ein *Dreiecksfloorplan* ist eine Zerlegung eines Dreiecks (im Folgenden Grunddreieck genannt) in eine endliche Menge von Dreiecken (im Folgenden Teildreiecke genannt), deren Inneres paarweise disjunkt ist.

Definition 22. Eine *Ecke* eines Dreiecksfloorplans F ist eine Ecke eines Teildreiecks von F .

Wir können wieder zwischen den drei äußeren Ecken und den inneren Ecken eines Dreiecksfloorplans unterscheiden.

Definition 23. Es sei F ein Dreiecksfloorplan, B die Vereinigung der Ränder der Teildreiecke von F und C die Menge der Ecken von F . Der *Skelettgraph* $G_{\text{skel}}(F)$ von F ist dann der Graph, dessen Knotenmenge C ist und dessen Kanten zu den Zusammenhangskomponenten von $B \setminus C$ korrespondieren.

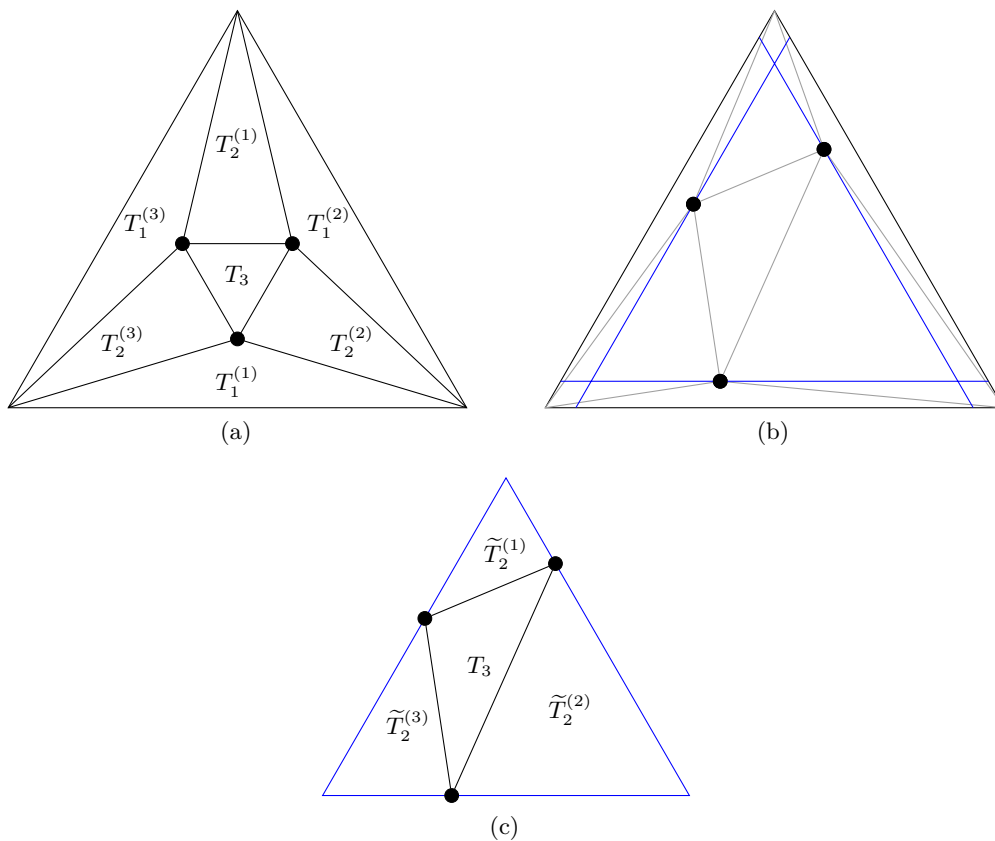


Abbildung 23: Illustrationen für den Beweis von Lemma 10

Definition 24. Zwei Dreieckfloorplans heißen *äquivalent*, wenn sie den gleichen Skelettgraphen besitzen.

Wir werden uns nun mit folgendem Optimierungsproblem befassen: Es sei ein Dreieckfloorplan F mit den Teildreiecken T_1, \dots, T_n , eine Gewichtsfunktion $w : \{T_1, \dots, T_n\} \rightarrow \mathbb{R}_+$ sowie ein Dreieck T gegeben, dessen Flächeninhalt $\sum_{i=1}^n w(T_i)$ ist. Wir suchen dann einen Dreieckfloorplan F' , der äquivalent zu F ist, dessen Grunddreieck T ist und der $m(T_i) = w(T_i)$ für alle Teildreiecke T_i erfüllt, wobei $m(T_i)$ den Flächeninhalt des Teildreiecks T_i bezeichne.

Um eingrenzen zu können, was wir von der Anwendung des Luftdruckparadigmas auf dieses Optimierungsproblem erwarten können, beginnen wir mit zwei Resultaten, die zeigen, dass dieses Problem in gewisser Hinsicht schwieriger ist als das Optimierungsproblem aus Abschnitt 3.

Lemma 10. *Es gibt einen Dreieckfloorplan F und eine Gewichtsfunktion w , so dass es keinen zu F äquivalenten Dreieckfloorplan F' gibt, der w realisiert.*

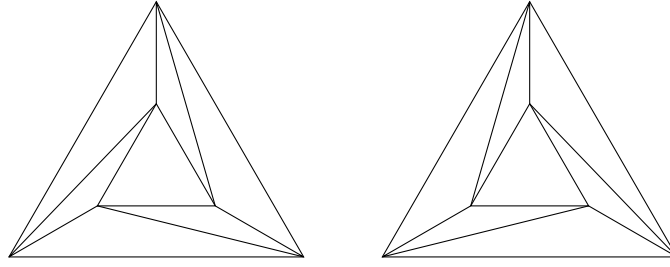


Abbildung 24: Zwei äquivalente Dreiecksfloorplans, deren Teildreiecke die gleichen Flächeninhalte besitzen

Beweis. Wir betrachten den Dreiecksfloorplan F aus Abbildung 23 (a). Weiter definieren wir $w(T_1^{(i)}) := \varepsilon > 0$ für $i = 1, 2, 3$. Durch die Festlegung dieser drei Flächeninhalte wissen wir, dass in F' die drei inneren Ecken auf den blauen Linien in Abbildung 23 (b) liegen müssen.

Wenn wir ε klein wählen, liegen die blauen Linien dicht an den Seitenlinien des Grunddreiecks von F' . In diesem Fall ist für $i = 1, 2, 3$ der Unterschied der Flächeninhalte von $T_2^{(i)}$ und $\tilde{T}_2^{(i)}$ (siehe Abbildung 23 (c)) klein. In [2] wird gezeigt, dass in der Konstellation von Abbildung 23 (c) die Ungleichung

$$m(T_3) \geq \min_{i=1,2,3} \left(m(\tilde{T}_2^{(i)}) \right)$$

erfüllt ist. Wenn wir also $w(T_3) := \varepsilon$ sowie $w(T_2^{(i)}) := \frac{M-4\varepsilon}{3}$ für $i = 1, 2, 3$ definieren, wobei M der Flächeninhalt des Grunddreiecks von F' sei, und ε klein genug wählen, existiert der gesuchte Dreiecksfloorplan F' nicht. \square

Wie Abbildung 24 zeigt, ist die Lösung des Optimierungsproblems, falls sie existiert, außerdem nicht eindeutig.

Jetzt beginnen wir damit, das Luftdruckparadigma für Dreiecksfloorplans einzuführen.

Definition 25. Der *Druck* im Teildreieck T_i ist definiert als $p(T_i) = \frac{w(T_i)}{m(T_i)}$.

Es sei T_i ein Teildreieck von F , v eine Ecke von T_i und s das Randsegment von T_i , das disjunkt zu v ist. Mit $\|s\|$ bezeichnen wir die Länge von s und mit n_s den Normaleneinheitsvektor auf s , der in die Richtung von v zeigt. Die *Kraft, die T_i auf v ausübt*, ist dann definiert als

$$f(v, T_i) := \frac{\|s\|}{2} p(T_i) n_s.$$

Definition 26. Es sei v eine innere Ecke von F und \mathcal{T} die Menge der zu v inzidenten Teildreiecke von F . Dann ist die *Kraft, die auf v ausgeübt wird*, definiert als

$$f(v) := \sum_{T_i \in \mathcal{T}} f(v, T_i).$$

Definition 27. Eine Ecke v ist *im Gleichgewicht*, falls $f(v) = 0$ ist.

Ein Teildreieck T_i ist *im Gleichgewicht*, falls $p(T_i) = 1$ ist.

Lemma 11. *Es sei v eine innere Ecke von F . Wenn es ein $p \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle Teildreiecke T_i , die inzident zu v sind, $p(T_i) = p$ gilt, dann ist $f(v) = 0$.*

Beweis. Mit w^ρ bezeichnen wir im Folgenden den um 90° gegen den Uhrzeigersinn gedrehten Vektor $w \in \mathbb{R}^2$. \mathcal{T} sei die Menge der zu v inzidenten Teildreiecke von F und für alle $T_i \in \mathcal{T}$ sei s_i das Randsegment von T_i , das disjunkt zu v ist.

Dann beschreibt $\sum_{T_i \in \mathcal{T}} \|s_i\| n_{s_i}^\rho$ ein orientiertes Ploygon, das v umgibt. Also ist $\sum_{T_i \in \mathcal{T}} \|s_i\| n_{s_i}^\rho = 0$.

Da die Drehung um 90° gegen den Uhrzeigersinn eine lineare Abbildung ist, folgt damit

$$f(v)^\rho = \sum_{T_i \in \mathcal{T}} \frac{\|s_i\|}{2} p(T_i) n_{s_i}^\rho = \frac{p}{2} \sum_{T_i \in \mathcal{T}} \|s_i\| n_{s_i}^\rho = 0$$

und somit auch $f(v) = 0$. □

Korollar 2. *Wenn alle Teildreiecke im Gleichgewicht sind, dann sind auch alle inneren Ecken im Gleichgewicht.*

Beweis. Es sei v eine innere Ecke von F . Dann ist für alle Teildreiecke T_i von F , die zu v inzident sind, $p(T_i) = 1$. Mit Lemma 11 folgt also $f(v) = 0$ und damit ist v im Gleichgewicht. □

Die Umkehrung von Korollar 2 gilt allerdings nicht.

Lemma 12. *Es gibt einen Dreiecksfloorplan F , dessen innere Ecken alle im Gleichgewicht sind, aber dessen Teildreiecke nicht alle im Gleichgewicht sind.*

Beweis. Wir betrachten den Dreiecksfloorplan F aus Abbildung 25 und werden zeigen, dass es unendlich viele Vektoren $(w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$ gibt, so dass die Abbildung w mit $w(T_1^{(i)}) = w_1$, $w(T_2^{(i)}) = w_2$ und $w(T_3) = w_3$ eine gültige Gewichtsfunktion für F ist und bezüglich dieser Gewichtsfunktion alle inneren Ecken von F im Gleichgewicht sind. Da nur für eine dieser Gewichtsfunktionen alle Teildreiecke von F im Gleichgewicht sein können, ist damit die Aussage bewiesen.

Es seien $m_1 := m(T_1^{(1)}) = m(T_1^{(2)}) = m(T_1^{(3)})$, $m_2 := m(T_2^{(1)}) = m(T_2^{(2)}) = m(T_2^{(3)})$ und $m_3 := m(T_3)$. Wir untersuchen nun, für welche (w_1, w_2, w_3) die Ecke v im Gleichgewicht ist. Aus Symmetriegründen sind genau dann auch alle anderen inneren Ecken im Gleichgewicht. Wir formulieren die Bedingungen dafür als System von linearen Gleichungen und Ungleichungen:

$$\frac{l_1}{2m_1} w_1 - 2 \sin \alpha \frac{l_2}{2m_2} w_2 - \frac{l_3}{2m_3} w_3 = 0, \tag{1}$$

$$3w_1 + 3w_2 + w_3 = 3m_1 + 3m_2 + m_3, \tag{2}$$

$$w_1, w_2, w_3 > 0. \tag{3}$$

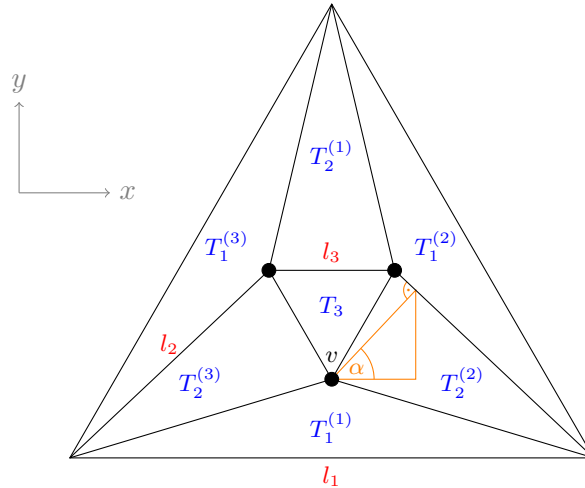


Abbildung 25: Der Dreieckfloorplan für den Beweis von Lemma 12. In blau sind die Teildreiecke beschriftet, in rot die drei verschiedenen vorkommenden Seitenlängen und in orange ein Winkel α .

Die Gleichung (1) besagt, dass die y -Komponente der auf v wirkenden Kraft Null ist. Die x -Komponente dieser Kraft ist aus Symmetriegründen ohnehin Null. Die Gleichung (2) und die Ungleichungen (3) besagen, dass die mit Hilfe von w_1, w_2, w_3 definierte Abbildung w eine gültige Gewichtsfunktion ist.

(1) und (2) definieren ein lineares Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 3 Unbekannten. Die Lösungsmenge dieses Systems ist also ein affiner Unterraum des \mathbb{R}^3 , dessen Dimension mindestens 1 ist. Die Lösungsmenge des gesamten Systems, also inklusive der Ungleichungen (3), ist daher entweder leer oder beinhaltet unendlich viele Vektoren. Da nach Korollar 2 der Vektor (m_1, m_2, m_3) eine Lösung des Systems ist, scheidet die erste Möglichkeit aus und das System hat unendlich viele Lösungen. \square

Dieses negative Resultat bezüglich der Anwendung des Luftdruckparadigmas auf Dreieckfloorplans sowie die Nichtexistenz (siehe Lemma 10) und die Nichteindeutigkeit der Lösung des Optimierungsproblems haben wir alle anhand der gleichen Äquivalenzklasse von Dreieckfloorplans, des Oktaedergraphen, gezeigt. Es ist daher möglich, dass diese Resultate für Dreieckfloorplans, deren Skelettgraph keinen Oktaedergraphen als induzierten Teilgraphen besitzt, oder eine andere Klasse von Dreieckfloorplans nicht gelten. Aus diesem Grund werden wir uns weiterhin mit der Anwendung des Luftdruckparadigmas auf Dreieckfloorplans auseinandersetzen.

Die Entropie sei für Dreieckfloorplans analog zu Definition 18 definiert. Dann gilt für Dreieckfloorplans auch eine analoge Version von Lemma 8.

Wir betrachten nun eine innere Ecke v von F . Wir können v an jeden Punkt innerhalb eines Polygons $P(v)$ verschieben und erhalten so einen zu F äquivalenten Floorplan (siehe Abbildung 26). Es ist zu beachten, dass $P(v)$ offen ist, d. h. den Rand nicht mit einschließt. Jetzt betrachten wir die Entropie von F sowie die auf v wirkende Kraft

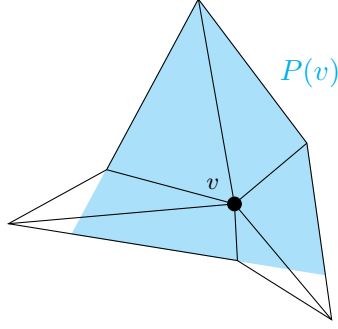


Abbildung 26: Das die innere Ecke v umgebende Polygon $P(v)$, innerhalb dessen v verschoben werden kann

in Abhängigkeit von der Position von v in $P(v)$, bzw. wir betrachten die Abbildungen $E : P(v) \rightarrow \mathbb{R}$ sowie $f : P(v) \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Lemma 13. *Die Abbildung E ist ein Potential des Kraftfeldes f .*

Beweis. Wir betrachten zunächst die Entropie eines der zu v inzidenten Teildreiecke T_i . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass das Randsegment s von T_i , das disjunkt zu v ist, auf der x -Achse liegt und dass v eine positive y -Koordinate besitzt (siehe Abbildung 27). Analog zu dem Beweis von Lemma 9 erhalten wir $\text{grad } E(T_i) = p(T_i) \text{ grad } m(T_i)$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} E(T_i) &= p(T_i) \frac{\partial}{\partial x} m(T_i) = p(T_i) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} \|s\| y \right) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} E(T_i) &= p(T_i) \frac{\partial}{\partial y} m(T_i) = p(T_i) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{2} \|s\| y \right) = \frac{\|s\|}{2} p(T_i). \end{aligned}$$

Zusammen erhalten wir also

$$\text{grad } E(T_i) = \frac{\|s\|}{2} p(T_i) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\|s\|}{2} p(T_i) n_s.$$

Es sei nun \mathcal{T} die Menge der zu v inzidenten Teildreiecke und für alle $T_i \in \mathcal{T}$ sei s_i das Randsegment von T_i , das disjunkt zu v ist. Dann erhalten wir

$$\text{grad } E = \text{grad} \sum_{T_i \in \mathcal{T}} E(T_i) = \sum_{T_i \in \mathcal{T}} \text{grad } E(T_i) = \sum_{T_i \in \mathcal{T}} \frac{\|s_i\|}{2} p(T_i) n_{s_i} = f.$$

E ist also ein Potential von f . □

Der nächste Schritt wäre nun, zu zeigen, dass das Kraftfeld f eine Singularität w besitzt, so dass die Entropie von F wächst, wenn die Ecke v an die Position w verschoben wird. Diesbezüglich fehlen uns konkrete Ergebnisse. Dennoch möchten wir einige Anmerkungen dazu machen.

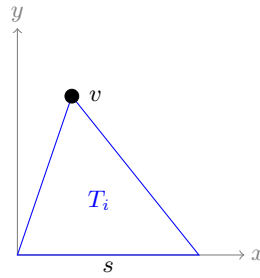


Abbildung 27: Illustration für den Beweis von Lemma 13

Betrachten wir eine Folge w_1, w_2, w_3, \dots von Punkten aus $P(v)$, die gegen einen Punkt auf dem Randsegment s_i konvergiert, das wie oben definiert sei, so konvergiert die Richtung der Vektoren $f(w_1), f(w_2), f(w_3), \dots$ gegen n_{s_i} , da der Druck des Teildreiecks T_i in der Nähe von s_i dominiert. In gewisser Weise zeigt das Kraftfeld f am Rand also nach innen. Da f zudem offensichtlich stetig ist, ist es naheliegend, dass f eine Singularität besitzt.

Wenn es nun einen Weg in $P(v)$ gibt, der an der aktuellen Position von v startet, in einer Singularität w^* von f endet und tangential zu f verläuft, dann wächst die Entropie als Potential von f entlang dieses Weges. In diesem Fall ist w^* also eine Singularität von der Art, wie wir sie suchen.

7 Fazit

Wir haben in dieser Arbeit gezeigt, dass das Problem der Optimierung der Massen der Teilrechtecke eines Floorplans mit Hilfe eines Luftdruckparadigmas gelöst werden kann. Dabei haben wir hervorgehoben, dass der Vorteil dieses Ansatzes nicht in der Knappheit und Eleganz der Beweise liegt, sondern in der effizienten praktischen Umsetzbarkeit der Methoden. Denn der Beweis nach Eppstein u. a. zeigt, dass man das zentrale Resultat der Existenz einer Lösung des Optimierungsproblems auch kürzer und kompakter beweisen kann.

Ein weiterer zentraler Aspekt dieser Arbeit ist die Mächtigkeit der Verallgemeinerung des Problems auf den abstrakteren Massebegriff als Integral einer Dichtefunktion. Das Problem des Unterbringens eines Floorplans auf einer Punktmenge zeigt, dass diese es uns erlaubt, auch zunächst nur entfernt verwandt ausschauende Probleme zu lösen.

Der letzte wichtige Punkt ist der Versuch, das Luftdruckparadigma auf ähnliche Strukturen wie Floorplans anzuwenden. Dabei haben wir uns konkret mit Triangulierungen befasst und gezeigt, dass das Problem der Optimierung der Flächeninhalte der Teildreiecke eines Dreieckfloorplans nicht immer lösbar und die Lösung auch nicht eindeutig ist. Wir konnten nicht zeigen, dass eine innere Ecke immer so verschoben werden kann, dass sie anschließend im Gleichgewicht ist und die Entropie gewachsen ist. Dies bleibt ein offenes Problem. Falls dies geklärt werden kann, ist eine weitere offene Frage, für welche Klasse von Dreieckfloorplans die Anwendung des Luftdruckparadigmas in einem

Dreieckfloorplan resultiert, in dem alle Teildreiecke im Gleichgewicht sind bzw. in dem alle Teildreiecke die gewünschten Flächeninhalte besitzen.

Literatur

- [1] E. Ackerman, G. Barequet und R. Y. Pinter. „On the number of rectangulations of a planar point set“. In: *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 113.6 (2006), S. 1072–1091.
- [2] H. Debrunner. „Problem 260“. In: *Elem. Math* 11 (1956), S. 20.
- [3] D. Eppstein, E. Mumford, B. Speckmann und K. Verbeek. „Area-universal rectangular layouts“. In: *Proceedings of the 25th annual symposium on Computational geometry*. ACM. 2009, S. 267–276.
- [4] D. Eppstein, E. Mumford, B. Speckmann und K. Verbeek. „Area-universal and constrained rectangular layouts“. In: *SIAM Journal on Computing* 41.3 (2012), S. 537–564.
- [5] S. Felsner. „Exploiting Air-Pressure to Map Floorplans on Point Sets“. 2013.
- [6] T. Izumi, A. Takahashi und Y. Kajitani. „Air-pressure model and fast algorithms for zero-wasted-area layout of general floorplan“. In: *IEICE TRANSACTIONS on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences* 81.5 (1998), S. 857–865.