

Analysis I - Grundlagen

Prof. Dr. Reinhold Schneider



Elementare Aussagenlogik

Definition

Eine Aussage im Sinne der Aussagenlogik ist eine sprachliche Aussage, bei der klar entschieden werden kann, ob sie **wahr** oder **falsch** ist.

Für die Aussagenlogik spielt der Inhalt keine Rolle, sondern lediglich der **Wahrheitswert** *wahr* oder *falsch*.

Beispiel

- 1 1 plus 1 ist 2.
- 2 1 plus 1 ist 1.
- 3 1 plus 1 ist nicht gleich 0.

Keine Aussagen sind dagegen Sätze wie z.B.

- morgen regnet es
- Gehen Sie bitte zur Seite!
- Wie spät ist es?

oder auch widersprüchliche Sätze, sogenannte **Antinomien**

Logische Operationen - Negation

Definition

Negation: Sei A eine Aussage, so heißt $\neg A$ ("nicht" A) die Negation von A .

Der Sachverhalt wird durch eine Wahrheitstafel dargestellt:

A	$\neg A$
w ("wahr")	f
f ("falsch")	w

Verknüpfung *und*

Definition

Verknüpfung *und*: Sind A und B Aussagen, so ist “ A und B ” (mathematisch $A \wedge B$) ebenfalls eine Aussage. Wir definieren: $A \wedge B$, gelesen A und B , ist genau dann wahr, falls die Aussagen A und B beide wahr sind.

Wahrheitstafel:

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Verknüpfung *oder*

Definition

Verknüpfung *oder*: Sind A und B Aussagen, so ist $A \vee B$, gelesen “A oder B”, ebenfalls eine Aussage. Diese ist genau dann wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen A oder B wahr ist.

Wahrheitstafel:

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Äquivalenz

Definition

Äquivalenz: Zwei Aussagen A und B heißen äquivalent, wenn der Wahrheitswert übereinstimmt. Wir schreiben in diesem Fall $A \Leftrightarrow B$.

Wahrheitstafel:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Theorem

Seien A , B und C Aussagen. Dann gelten die folgenden Äquivalenzen:

1. *Doppelte Negation*

$$\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$$

2. *Kommutativgesetz*

$$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$$

$$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$$

3. *Assoziativgesetz*

$$A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$$

$$A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$$

4. *Distributivgesetz*

$$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

5. *De Morgansche*

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A) \vee (\neg B)$$

Regeln

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A) \wedge (\neg B)$$

Beweis.

Man beweist alle Aussagen mittels Wahrheitstafeln, z.B. gilt bzgl. der Negation

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$
w	f	w
f	w	f

Rest als Übung.



Man vergleiche die Regeln (2) bis (4) mit analogen Regeln der Arithmetik (+, ·).

Implikation

Definition

Implikation: Sind A und B Aussagen, so ist $A \Rightarrow B$, gelesen “ A impliziert B ”, äquivalent zur Aussage $B \vee (\neg A)$.

Wahrheitstafel:

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Theorem

Seien A , B und C Aussagen. Dann gilt:

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B)$$

Beweis.

Übung. □

Merke!

- 1 Eine Aussage $A \Leftrightarrow B$ beweist man mit Hilfe von Satz 9:
Man zeigt zuerst A impliziert B und dann B impliziert A .
- 2 Falls A falsch ist, so ist $A \Rightarrow B$ immer wahr
(*e falso quod libet*).

Regel vom Indirekten Beweis

Theorem

Für beliebige Aussagen A und B gilt:

1. $(A \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ *bejahende
Abtrennungsregel*
2. $(\neg B \wedge (A \Rightarrow B)) \Rightarrow \neg A$ *verneinende
Abtrennungsregel*
3. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ *Regel vom
indirekten Beweis*
4. $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ *Regel vom
Kettenschluss*

Beweis.

Die erste Formel folgt aus

$$\begin{aligned}(A \wedge (A \Rightarrow B)) &\Leftrightarrow A \wedge (\neg A \vee B) \\ &\Leftrightarrow ((A \wedge \neg A) \vee (A \wedge B)) \\ &\Leftrightarrow (f \vee (A \wedge B)) \\ &\Leftrightarrow A \wedge B \Rightarrow B.\end{aligned}$$

Rest als Übung.



Quantoren – Allquantor

Definition

Sei $A_j, j \in J$, eine Menge von Aussagen, z.B. A_1, A_2, \dots
Dann definieren wir $\forall_{j \in J} A_j$, gelesen “für alle A_j mit j aus J ”;
als genau dann wahr, falls jede Aussage $A_j, j \in J$, wahr ist.
“ \forall ” heißt der *Allquantor*.

Falls $J = \{1, \dots, N\}$ endlich ist, dann können wir diese
Aussage durch endlich viele “und”-Verknüpfungen ausdrücken

$$\forall_{j \in J} A_j \Leftrightarrow \forall_{j=1}^N A_j \Leftrightarrow (A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_N).$$

Existenzquantor

Definition

Demgegenüber definieren wir $\exists_{j \in J} A_j$, gelesen “es existiert ein A_j mit j aus J ”, als genau dann wahr, falls eine wahre Aussage A_j für mindestens ein $j \in J$ existiert.

“ \exists ” heißt der *Existenzquantor*.

Für endlich viele A_j , d.h. $J = \{1, \dots, N\}$, gilt

$$\exists_{j \in J} A_j \Leftrightarrow \exists_{j=1}^N A_j \Leftrightarrow A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_N.$$

Achtung!

Beachte: Die Reihenfolge der Quantoren darf im allgemeinen nicht vertauscht werden, d.h.

$$(\forall j \in J \exists i \in I A_{i,j}) \not\equiv (\exists i \in I \forall j \in J A_{i,j}).$$

Die erste Aussage heißt “für alle $j \in J$ gibt es ein $i \in I$ mit $A_{i,j}$ ” während die zweite Aussage lautet “es existiert ein $i \in I$ für das für alle $j \in J$ gilt $A_{i,j}$ ”.

Beispiel

Man vergleiche die Aussagen “für alle Studenten gibt es einen Studentenausweis” und “es gibt ein Einwohnermeldeamt für alle Bewohner der Stadt”.

De Morgansche Regeln

Theorem

Seien $A_j, j \in J$, Aussagen. Dann gelten die de Morganschen Regeln

$$\neg(\forall_{j \in J} A_j) \iff (\exists_{j \in J} \neg A_j),$$

$$\neg(\exists_{j \in J} A_j) \iff (\forall_{j \in J} \neg A_j).$$

Mengenlehre

Neben der Methodik der Logik ist die Sprache der Mengenlehre für die moderne Mathematik unerlässlich. Den Begriff einer Menge werden wir uns ganz naiv gegenüberstellen.

Definition

Eine Menge ist eine Zusammenfassung von Objekten unserer Anschauung

Diese Objekte nennen wir die *Elemente* der Menge.

Dies bedeutet, dass wir eine Menge genau dann kennen, wenn uns gesagt wird, welche Elemente sie enthält.

Beispiel

Zum Beispiel sind $M = \{a, b, 10\}$ oder auch $A = \{1, 2, -1\}$ Mengen.

Dabei ist zu beachten, dass die Reihenfolge, in welcher die Elemente aufgezählt werden, unerheblich ist.

Beispiel

Zumeist sind Mengen über Aussageformen $A(x)$ definiert, wie z.B. $A(x)$: “ x ist grün”.

Wir schreiben kurz

$$M = \{x : A(x)\}$$

für die Menge aller x für die die Aussage $A(x)$ wahr ist.

Definition

Gleichheit von Mengen: Wir schreiben $x \in M$ falls x ein Element von M ist.

Für $\neg(x \in M)$ schreiben wir $x \notin M$.

Zwei Mengen M und N sind genau dann gleich, wenn sie die gleichen Elemente haben.

Teilmengen

Definition

Teilmengen: Eine Menge N heißt eine *Teilmenge* von einer Menge M ,
kurz $N \subseteq M$,
falls aus $x \in N$ stets folgt $x \in M$, kurz

$$N \subseteq M \iff \forall_{x \in N} x \in M.$$

Wir schreiben für $\neg(A \subseteq B)$ abkürzend $A \not\subseteq B$.

Theorem (Transitivität von " \subseteq ")

Seien A , B und C Mengen mit $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$, so gilt auch $A \subseteq C$.

Beweis.

Sei $x \in A$ beliebig, dann ist $x \in B$ wegen $A \subseteq B$. Wegen $x \in B$ und $B \subseteq C$ gilt auch $x \in C$. □

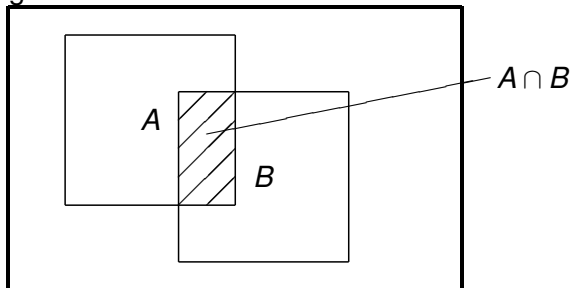
Definition

Durchschnitt von Mengen: Die Menge

$$A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

heißt die *Schnittmenge* von A und B oder einfach “ A geschnitten B ”.

Venn–Diagramm:



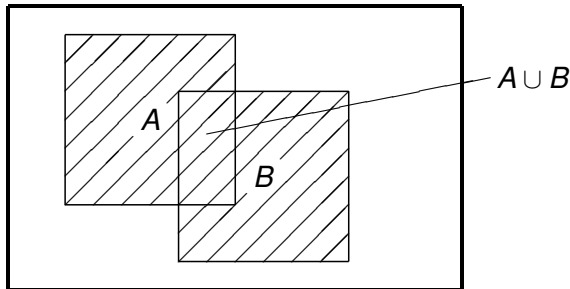
Vereinigungsmenge

Definition

Vereinigung von Mengen: Seien A und B Mengen. Dann ist

$$A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

die *Vereinigungsmenge* von A und B , oder kurz “ A vereinigt B ”.

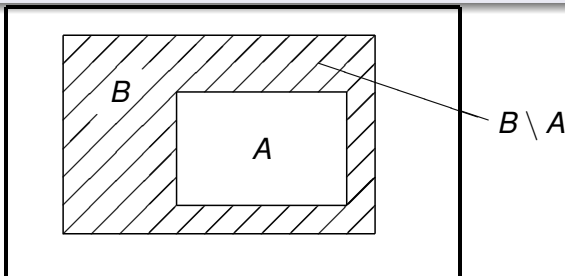


Komplementärmenge

Definition

Komplementär Mengen: Sei A und B Mengen, so ist die Menge $\{x \in B : x \notin A\}$ ebenfalls eine Menge, die wir mit $B \setminus A$, gelesen "B ohne A" oder auch "B minus A", bezeichnen.

Falls $A \subseteq B$, so heißt $B \setminus A$ das *Komplement* von A in der Menge B .



Leere Menge

Definition

Leere Menge: Sei $F(x)$ eine Aussageform, die für jedes $x \in A$ falsch ist. Dann enthält die Menge $M := \{x \in A : F(x)\}$ kein einziges Element. Eine solche Menge, die keine Elemente enthält, heißt *leer*.

Lemma

Sei \emptyset eine leere Menge.

- 1 Die Aussage $x \in \emptyset$ ist immer falsch.
- 2 Es gilt $\emptyset \subseteq A$ für jede Menge A .

Theorem

Sind A und B beides leere Mengen, so ist $A = B$. Folglich ist die leere Menge eindeutig. Sie wird mit \emptyset bezeichnet.

Beweis.

Wir zeigen $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$. $A \subseteq B$ ist äquivalent zur Aussage $\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B$. Da die Aussage $x \in A$ immer falsch ist, ist die obige Implikation richtig. Analog zeigt man $B \subseteq A$. \square

Definition

Disjunkte Menge: Zwei Mengen A und B heißen *disjunkt*, falls der Durchschnitt $A \cap B = \emptyset$.

Theorem

Seien A , B und C Teilmengen einer Menge X . Dann gelten:

1. *Doppel-Komplement* $X \setminus (X \setminus A) = A$
2. *Kommutativgesetze* $A \cup B = B \cup A$
 $A \cap B = B \cap A$
3. *Assoziativgesetze* $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
4. *Distributivgesetze* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5. *Dominanzgesetze* $A \cup \emptyset = A$
 $A \cap \emptyset = \emptyset$
6. *De Morgansche Regeln* $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$
 $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$

Beweis.

Die erste Behauptung beweist man wie folgt:

Per Definition ist $X \setminus (X \setminus A) = \{x \in X : x \notin (X \setminus A)\}$.

Für $x \in X$ gilt nun $x \in X \setminus A$ genau dann, wenn $x \notin A$. Durch Negation folgt hieraus $x \in A$.

Da $A \subseteq X$ ist $X \setminus (X \setminus A) = A$.

Der Beweis der restlichen Behauptungen sei als Übung überlassen. □

Definition

Beliebige Vereinigungen und Durchschnitte: Sei $\{A_j : j \in J\}$ eine Familie von Mengen, dann ist

$$\bigcup_{j \in J} A_j := \{x : \exists j \in J \ x \in A_j\}$$

die Vereinigung der Mengen A_j , $j \in J$, bzw.

$$\bigcap_{j \in J} A_j := \{x : \forall j \in J \ x \in A_j\}$$

die *Schnittmenge* aller Mengen A_j , $j \in J$.

Produktmenge und Potenzmenge

Definition

Produktmenge: Seien $a \in A$ und $b \in B$, so heißt (a, b) ein *geordnetes Paar*. Dabei beachte man, dass $(a, b) \neq (b, a)$. Die Menge

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ und } b \in B\}$$

heißt die *Paarmenge* von A und B bzw. das *kartesische Produkt* von A und B . Wir sagen hierfür auch “ A kreuz B ”.

Definition

Potenzmenge: Sei A eine Menge, so heißt die Menge aller Teilmengen von A

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$$

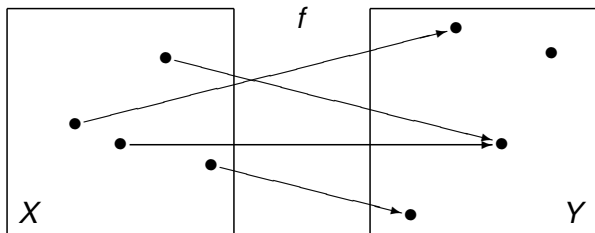
die *Potenzmenge* von A .

Es gelten die in der nachstehenden Tabelle aufgeführten Analogien zwischen der Aussagenlogik und der Mengenlehre.

Aussagenalgebra	Mengenalgebra
Aussagen A, B	Mengen A, B
Verknüpfung \wedge	Durchschnitt \cap
Verknüpfung \vee	Vereinigung \cup
Negation \neg	Komplement $X \setminus A$
Kontradiktion	Leere Menge \emptyset
Tautologie	Grundmenge X
Implikation $A \Rightarrow B$	Teilmenge $A \subseteq B$
Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$	Gleichheit $A = B$

Funktionen

Eine Funktion $f : X \rightarrow Y$ ist eine Vorschrift, die jedem Element $x \in X$ einer Menge X ein und auch nur ein Element $f(x) \in Y$ zuordnet.



Relationen und Funktionen

Definition

Seien $X, Y \neq \emptyset$ beliebige Mengen und $G \subseteq X \times Y$.

- 1 Das Tripel (G, X, Y) heißt eine **Relation** zwischen den Mengen X und Y .
- 2 Eine Relation (G, X, Y) zwischen den Mengen X und Y heißt **Funktion** $f : X \rightarrow Y$, falls
 - 1 für alle $x \in X$ ein $y = f(x)$ existiert mit $(x, y) \in G$, kurz

$$\forall x \in X \exists y \in Y : (x, y) \in G;$$

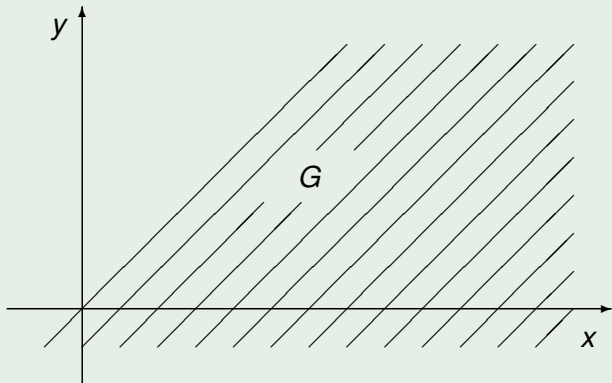
- 2 für alle $x \in X$ und $y, y' \in Y$ aus $(x, y), (x, y') \in G$ folgt, dass $y = y'$ eindeutig ist, kurz

$$\forall x \in X, y, y' \in Y ((x, y) \in G \wedge (x, y') \in G) \implies y = y'.$$

Funktionen nennt man auch oftmals **Abbildungen**.

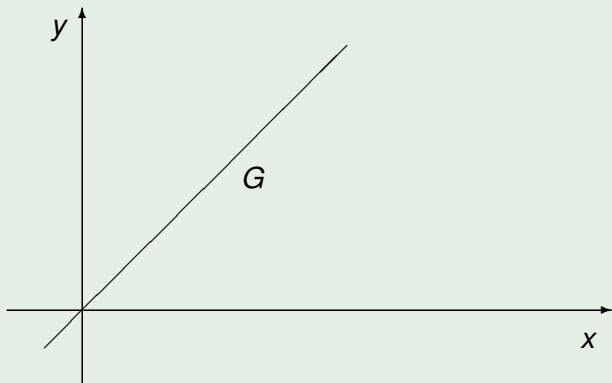
Beispiel (Relation)

- Wählen wir $X = Y = \mathbb{R}$, so ist durch $G = \{(x, y) \in X \times Y : x \geq y\}$ eine Relation gegeben.



Beispiel (Funktion)

- Für $X = Y \neq \emptyset$ ist durch $G = \{(x, y) \in X \times Y : x = y\}$ eine Funktion definiert.



Definitionsbereich, Bild und Graph einer Funktion

Definition

Ist $f = (G, X, Y)$ so schreiben wir $f : X \rightarrow Y$ und nennen X den *Definitionsbereich* und Y den *Bildbereich* von f .

Die Menge $G = \{(x, y) : y = f(x), x \in X\}$ heißt der *Graph* von f und es gilt $y = f(x) \Leftrightarrow (x, y) \in G$.

Zwei Funktionen $f : X \rightarrow Y$ und $g : A \rightarrow B$ sind genau dann gleich, falls $A = X$ und $B = Y$ ist und $f(x) = g(x)$ für alle $x \in X$ gilt.

Merke: Zur präzisen Angabe einer Funktion gehört immer auch die Angabe des Definitionsbereiches und des Bildbereiches!

Bild und Urbild

Definition

Sei A eine Teilmenge des Definitionsbereiches $A \subseteq X$. Dann heißt die Menge $f(A) = \{y \in Y : y = f(x), x \in A\} \subseteq Y$ das *Bild* von A unter der Funktion f . Sei $B \subseteq Y$, so heißt die Menge

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) = y, y \in B\} \subseteq X$$

das *Urbild* der Menge B unter f .

Injektiv, surjektiv und bijektiv

Definition

Eine Funktion $f : X \rightarrow Y$ heißt

- 1 **injektiv**, falls für alle $y \in f(X)$ und $x, x' \in X$ mit $f(x) = f(x') = y$ folgt $x = x'$;
- 2 **surjektiv**, falls $f(X) = Y$ ist;
- 3 **bijektiv**, falls f injektiv und surjektiv ist.

Definition

Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ zwei Funktionen so heißt die Funktion $h = g \circ f : X \rightarrow Z$ definiert durch

$$x \mapsto h(x) = g \circ f(x) := g(f(x))$$

die *Komposition* von f und g .

Inverse Funktion

Definition

$id : X \rightarrow X$ definiert durch $id(x) := x$ heißt die identische Abbildung.

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine bijektive Funktion. Dann existiert zu jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$ mit $y = f(x)$.

Definition

Die Funktion $g : Y \rightarrow X$ mit $g(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$ heißt *Umkehrfunktion* oder auch *inverse Funktion*.

Wir schreiben hierfür $f^{-1} := g : Y \rightarrow X$. In diesem Fall gilt $f^{-1} \circ f = id : X \rightarrow X$ (linksinvers) und $f \circ f^{-1} = id : Y \rightarrow Y$ (rechtsinvers).

Kardinalität

Definition

Zwei Mengen X und Y haben die gleiche *Kardinalität*, wir schreiben $\text{card}(X) = \text{card}(Y)$, falls eine **bijektive** Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen beiden Mengen existiert.

Theorem

Sei $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen. Die Produktmenge $\mathbb{N}^2 := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ hat die gleiche Kardinalität wie \mathbb{N} .

Beweis: Seien $p, q \in \mathbb{N}$ und somit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ beliebig. Wir definieren das “Cantorsches Diagonalverfahren” mittels der Funktion

$$f(p, q) := \frac{(p + q - 1)(p + q - 2)}{2} + p.$$

Die Namensgebung dieser Funktion ist motiviert durch folgendes Rechteckschema:

	1	2	3	4
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	
3	(3,1)	(3,2)		
4	(4,1)			...

	1	2	3	4
1	1	2	4	7
2	3	5	8	
3	6	9		
4	10			⋮

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $M_n = \{(1, n), (2, n-1), \dots, (n-1, 2), (n, 1)\}$,
Teilmengen in \mathbb{N}^2 . Wir sehen aus dem obigen Schema, dass
die Mengen M_n paarweise disjunkt sind und dass

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n = \mathbb{N}^2$. Seien ferner

$N_n := \left\{ \frac{(n-1)n}{2} + 1, \frac{(n-1)n}{2} + 2, \dots, \frac{(n-1)n}{2} + n \right\}$ Teilmengen in \mathbb{N} .

Aufgrund der Beziehung $\frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ersehen wir, dass
die Mengen N_n ebenfalls paarweise disjunkt sind und dass gilt

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n = \mathbb{N}$. Wie man unschwer sieht bildet $f : M_n \rightarrow N_n$ die
beiden Mengen M_n und N_n bijektiv aufeinander ab. q.e.d.

Definition

Eine Menge A heißt (höchstens) **abzählbar**, falls A endlich ist, d.h. aus endlich viele Elementen besteht, oder aber falls $\text{card}(A) = \text{card}(\mathbb{N})$ gilt.

Corollary

- ① *Die Menge der ganzen Zahlen*

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

ist abzählbar.

- ② *Die Menge aller positiven Brüche hat die gleiche Mächtigkeit wie \mathbb{N} .*
- ③ *Die Menge der rationalen Zahlen ist abzählbar*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}.$$

Mengen A und B mit **endlich** vielen Elementen haben gleiche Kardinalität genau dann, wenn sie gleichviele Elemente enthalten, d.h. $\text{card}(A) = \text{card}(B)$.

Theorem (Cantor und Russell)

Sei X eine beliebige Menge. Dann existiert

- 1 **keine** surjektive Funktion

$$f : X \rightarrow \mathcal{P}(X);$$

- 2 **keine** injektive Funktion

$$g : \mathcal{P}(X) \rightarrow X.$$

Beweis: 1) Sei $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ eine beliebige Funktion.

Wir zeigen, dass es immer ein Element $Y \in \mathcal{P}(X)$ gibt mit $Y \notin f(X)$, d.h. das nicht im Bild von f liegt.

Wir bemerken, dass für jedes $x \in X$ das Bild $f(x) \in \mathcal{P}(X)$ eine Teilmenge von X ist, $f(x) \subseteq X$, und definieren die Menge

$$A := \{x \in X : x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(X).$$

Wir führen den Beweis indirekt und dazu nehmen folgendes wir an,

$$\text{es existiert ein } x \in X \text{ mit } f(x) = A.$$

Dann gibt es gibt nur zwei Möglichkeiten für beliebiges $x \in X$:

- 1 $x \in f(x)$, dann ist aber $x \notin A$. Somit ist $f(x) \not\subseteq A$, d.h. keine Teilmenge von A , und damit $f(x) \neq A$.
- 2 Oder aber $x \notin f(x)$ und somit ist $x \in A$. Aufgrund von $x \notin f(x)$ ist $A \not\subseteq f(x)$ keine Teilmenge von $f(x)$. In diesem Fall ist ebenfalls $f(x) \neq A$.

Somit haben wir die obige Annahme zu einem Widerspruch geführt.

Wir beweisen den zweiten Teil ähnlich wie Teil eins:
2) Angenommen, es gebe eine injektive Abbildung
 $g : \mathcal{P}(X) \rightarrow X$.

Wir definieren die Menge

$$B := \{g(Y) : Y \in \mathcal{P}(X) \text{ und } g(Y) \notin Y\} \subseteq X.$$

Dann gibt es gibt nur zwei Möglichkeiten:

- 1 $g(B) \in B$, dann existiert $Y \subseteq X$ mit $g(B) = g(Y)$.
Andererseits ist aber $g(B) \in B$ und aufgrund der Definition von B auch $B \neq Y$. In diesem Fall liegt ein Widerspruch zur Annahme der Injektivität vor.
- 2 $g(B) \notin B$, aus $g(B) \notin B \in \mathcal{P}(X)$ folgt $g(B) \in B$.

q.e.d.

Corollary

Die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ der natürlichen Zahlen ist überabzählbar.

Theorem (Bernsteinscher Äquivalenzsatz)

*Falls die Funktionen $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow X$ beide **injektiv** sind, so gilt $\text{card}(X) = \text{card}(Y)$, d.h. es existiert eine bijektive Funktion*

$$F : X \rightarrow Y.$$

Beweis: Wir nennen ein $u \in f^{-1}(Y) \subseteq X$ (bzw. $v \in g^{-1}(X) \subseteq Y$) einen *Vorgänger* von $y \in Y$ (bzw. von $x \in X$), falls $f(u) = y$ (bzw. $g(v) = x$). Ein Element $a \in X \cup Y$ heißt ein *Vorfahre* von $x \in X \cup Y$, falls es endlich viele Vorgänger a_i , $i = 0, 1, \dots, n$ gibt mit $a_0 = a$, $a_n = x$ und a_i Vorgänger von a_{i+1} ist.

$X_0 \subseteq X$ sei die Menge der Elemente in X mit einer geraden oder unendlichen Anzahl von Vorfahren.

Weiter sei $X_1 \subseteq X$ die Menge aller $x \in X$ mit einer ungeraden Anzahl von Vorfahren und $Y_2 \subseteq Y$ bestehe aus allen $y \in Y$ mit einer geraden Anzahl von Vorfahren.

Dann gilt erstens $X_1 \cap X_0 = \emptyset$ und zweitens ist $g : Y_2 \rightarrow X_1$ eine bijektive Funktion, d.h. es existiert $\gamma : X_1 \rightarrow Y_2$ mit $\gamma(g(y)) = y$, $y \in Y_2$, und $g(\gamma(x)) = x$, $x \in X_1$.

Wir setzen

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in X_0, \\ \gamma(x), & x \in X_1. \end{cases}$$

Die Funktion F ist injektiv und $F(X_0) \subseteq Y$ ist die Menge der Elemente $y \in Y$ mit einer ungeraden Anzahl oder unendlichen Anzahl von Vorfahren.

Somit ist Y die disjunkte Vereinigung $Y = Y_2 \cup F(X_0)$. Hierbei beachte man, dass jedes Element $a \in X \cup Y$ mindestens einen Vorfahren hat.

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine injektive Funktion, dann existiert $g : Y \rightarrow X$ mit $g(f(x)) = g \circ f(x) = x$ für jedes $x \in X$ (Linksinverse).

Somit ist die Funktion $f : X \rightarrow f(X)$ bijektiv, d.h. es existiert $g : f(X) \rightarrow X$ mit $g(f(x)) = g \circ f(x) = x$. Falls $Y \setminus f(X) = \emptyset$ haben wir g konstruiert.

Falls $Y \setminus f(X) \neq \emptyset$, wählen wir ein beliebiges $a \in X$ und setzen

$$g(y) = \begin{cases} g(y), & y \in f(X), \\ a, & y \in Y \setminus f(X). \end{cases}$$

q.ed.

Es stellt sich die Frage, ob sich nun für jede surjektive Funktion $f : X \rightarrow Y$ ebenfalls eine Funktion $g : Y \rightarrow X$ mit $f(g(y)) = f \circ g(y) = y$, $y \in Y$, konstruieren lässt? Da $Y = f(X)$, muss man dazu zu jedem $y \in Y$ in der Urbildmenge der Funktion $f^{-1}(\{y\}) \subseteq X$ ein Element $g(y)$ auswählen.
Die Frage, ob dies auch für unendliche Mengen $f^{-1}(\{y\})$ immer möglich ist, kann leider *nicht* direkt beantwortet werden.

Wir werden diese Möglichkeit in dem sogenannten *Auswahlaxiom* postulieren.

Definition (Auswahlaxiom)

Zu jeder surjektiven Funktion $f : X \rightarrow Y$ existiert eine Funktion $g : Y \rightarrow X$ mit $f(g(y)) = f \circ g(y) = y$ für alle $y \in Y$ (Rechtsinverse).

Das Auswahlaxiom ist ein wichtiges, aber auch umstrittenes, Hilfsmittel, z.B. in der *Funktionalanalysis* etc. Im Rahmen der Analysis-Grundvorlesungen werden wir es kaum verwenden müssen.

Grenzen der naiven Mengenlehre

Die *naive Mengenlehre* hat ihre Grenzen. Wir betrachten die sogenannte *universelle Menge*:

$$\mathcal{U} = \{X : X \text{ ist eine Menge}\}.$$

Dann ist $\mathcal{P}(\mathcal{U})$ ebenfalls eine Menge. Aber $\mathcal{P}(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{U}$, da \mathcal{U} ja alle Mengen enthält.

Es gibt aber immer eine injektive Abbildung $p : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{U})$, nämlich $p(U) := \{U\}$ für alle $U \in \mathcal{U}$.

Und es gibt eine ebenfalls injektive Funktion $g : \mathcal{P}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{U}$, nämlich $g(U) = U$ für alle $U \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$.

Somit ist $\text{card } \mathcal{P}(\mathcal{U}) = \text{card } \mathcal{U}$. Dies steht im Widerspruch zum Satz von Cantor und Russell.

Russellsche Antinomie

Damit sehen wir, dass man den naiv eingeführten Begriff einer Menge, insbesondere Mengen von Mengen, i.a. etwas vorsichtig behandeln muß.

Ein ähnliches Beispiel ist die *Russellsche Antinomie*: Sei B die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten. Eine solche Formulierung ist natürlich in sich widersprüchlich.

Die Entdeckung dieser Widersprüche führte zur Entwicklung der *Axiomatischen Mengenlehre*, deren eingehende Behandlung in einer einführenden Veranstaltung allerdings zu weit gehen würde.