

Analysis I - Stetige Funktionen

Prof. Dr. Reinhold Schneider



Funktionsgrenzwert

Definition

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Desweiteren seien E eine Teilmenge von X , $f : E \rightarrow Y$ eine Funktion und p ein Häufungspunkt der Menge E .

Wir sagen f hat den **Funktionsgrenzwert** y an der Stelle p , kurz $f(x) \rightarrow y$ für $x \rightarrow p$ bzw. $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = y$, falls ein $y \in Y$ existiert, so dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt derart, dass

$$d_Y(f(x), y) < \varepsilon$$

für alle $x \in \{x \in E : 0 < d_X(x, p) < \delta\} = (U_\delta(p) \setminus \{p\}) \cap E$.

Funktionsgrenzwert

Theorem

Es gilt $f(x) \rightarrow y$ für $x \rightarrow p$ genau dann, wenn für jede Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ aus $E \setminus \{p\}$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = p$ gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = y$.

Beweis.

“ $\Rightarrow$ ”: Falls $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = y$, so folgt nach Definition für beliebiges $\varepsilon > 0$, dass ein $\delta > 0$ existiert mit $d_Y(f(x), y) < \varepsilon$ für alle $x \in (U_\delta(p) \setminus \{p\}) \cap E$. Falls die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ für $k \rightarrow \infty$ gegen p konvergiert, gibt es ein $N_\delta \in \mathbb{N}$ mit $0 < d_X(x_k, p) < \delta$ für alle $k > N_\delta$. Das bedeutet $x_k \in (U_\delta(p) \setminus \{p\}) \cap E$ und folglich gilt $d_Y(f(x_k), y) < \varepsilon$ für alle $k > N_\delta$. □

Funktionsgrenzwert

Beweis.

“ $\Leftarrow$ ”: Angenommen, es gilt $f(x) \not\rightarrow y$ für $x \rightarrow p$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für jedes $\delta > 0$ ein $x \in E \setminus \{p\}$ existiert mit $d_Y(f(x), y) \geq \varepsilon$, aber $0 < d_X(x, p) < \delta$. Wir setzen $\delta = \delta_n = \frac{1}{n}$ und nehmen einen zugehörigen Punkt $x_n = x$. Dann gilt $x_n \rightarrow p$ für $n \rightarrow \infty$, aber $d_Y(f(x_n), y) \geq \varepsilon > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung $f(x_n) \rightarrow y$. $\square$

Corollary

Hat eine Funktion f an der Stelle p einen Funktionsgrenzwert, so ist dieser eindeutig.

Die Limesregeln übertragen sich analog auf die Funktionsgrenzwerte.

Funktionsgrenzwert

Theorem

Sei $\mathbb{R}^m$ und $\mathbb{R}^n$, $m, n \in \mathbb{N}$, versehen mit der Euklidischen Norm. Desweiteren seien $E \subseteq \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{p}$ ein Häufungspunkt der Menge E . Dann gilt für die Funktionen $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ und beliebigen $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, dass

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} (f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} f(\mathbf{x}) + \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} g(\mathbf{x}),$$

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} (f(\mathbf{x}) + \mathbf{a}) = \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} f(\mathbf{x}) + \mathbf{a},$$

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} (\alpha f(\mathbf{x})) = \alpha \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} f(\mathbf{x}),$$

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} \langle f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x}) \rangle = \langle \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} f(\mathbf{x}), \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{p}} g(\mathbf{x}) \rangle.$$

Stetigkeit

Definition

Sei $E \subseteq X$ und $f : E \rightarrow Y$ eine Funktion sowie $x_0 \in E$. Die Funktion f heißt **stetig an der Stelle** $x_0 \in E$, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt derart, dass $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ für alle $d_X(x, x_0) < \delta$ gilt. Die Funktion f heißt **stetig in** E , falls f in jedem Punkt $x \in E$ stetig ist.

In einem isolierten Punkt $x_0 \in E$ ist jede Funktion stetig, wie man leicht sieht.

Stetige Funktionen

Theorem

Unter der Voraussetzung des vorigen Satzes gilt in einem Häufungspunkt x_0 von E , dass f dort genau dann stetig ist, falls

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \text{ ist.}$$

Theorem

Es seien (X, d_X) , (Y, d_Y) und (Z, d_Z) metrische Räume. Für $E \subseteq X$ seien durch $f : E \rightarrow f(E) \subseteq Y$ und $g : f(E) \rightarrow Z$ Abbildungen gegeben und $h = g \circ f : E \rightarrow Z$ bezeichne ihre Komposition. Falls f in $x_0 \in E$ und g in $f(x_0)$ beide stetig sind, so ist h an der Stelle x_0 ebenfalls stetig.

Stetige Funktionen

Proof.

Da g an der Stelle $y_0 := f(x_0) \in Y$ stetig ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\gamma > 0$ mit $d_Z(g(y), g(f(x_0))) < \varepsilon$ für alle $y \in Y$ mit $d_Y(y, f(x_0)) < \gamma$. Aufgrund der Stetigkeit von f in $x_0 \in E$ existiert zu diesem $\gamma > 0$ ein $\delta > 0$ mit $d_Y(f(x), f(x_0)) < \gamma$ für alle $x \in E$ mit $d_X(x, x_0) < \delta$. Dies bedeutet, es gilt

$$d_Z(g(f(x)), g(f(x_0))) = d_Z(h(x), h(x_0)) < \varepsilon$$

für alle $x \in E$ mit $d_X(x, x_0) < \delta$.



Stetige Funktionen und offene Mengen

Theorem

Die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist genau stetig auf X , falls für jede offene Menge $W \subseteq Y$ das Urbild $f^{-1}(W)$ eine offene Teilmenge in X ist.

Proof.

“ $\Rightarrow$ ”: Sei f stetig auf X und $W \subseteq Y$ eine offene Teilmenge von Y . Wir zeigen, dass jeder Punkt $p \in f^{-1}(W)$ ein innerer Punkt der Menge $f^{-1}(W)$ ist. Sei $p \in X$ mit $f(p) \in W$. Dann ist $f(p)$ ein innerer Punkt in W , d.h. es existiert $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(f(p)) \subseteq W$. Aufgrund der Stetigkeit existiert ein $\delta > 0$ mit $f(x) \in U_\varepsilon(f(p))$ für alle x mit $d_X(x, p) < \delta$. Damit gilt für alle $x \in U_\delta(p)$ dass $f(x) \in U_\varepsilon(f(p)) \subseteq W$, d.h. $x \in f^{-1}(W)$ bzw. $U_\delta(p) \subseteq f^{-1}(W)$. Da dies zeigt dass p innerer Punkt von $f^{-1}(W)$ ist, Teil des Satzes bewiesen. □

Stetige Funktionen und offene Mengen

Proof.

“ $\Leftarrow$ ”: Sei $f^{-1}(W)$ eine offene Menge in X für jede offene Menge $W \subseteq Y$. Zu $x_0 \in X$ und beliebigem $\varepsilon > 0$ sei $W := \{y \in Y : d_Y(y, f(x_0)) < \varepsilon\}$. Da W eine offene Teilmenge in Y , ist $U = f^{-1}(W) \subseteq X$ ebenfalls offen und $x_0 \in U$ ist ein innerer Punkt von U . Das heißt, es existiert eine offene Umgebung

$$U_\delta(x_0) = \{x \in X : d_X(x, x_0) < \delta\} \subseteq W.$$

Somit gilt für alle $x \in U_\delta(x_0)$, das heißt $d_X(x, x_0) < \delta$, dass $d_X(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ ist. □

Stetige Funktionen

Theorem

Seien f und $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ (bzw. $\mathbb{R}$) stetige Funktionen, dann sind ebenfalls $f + g$ und $f \cdot g$ stetig. Falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in X$, dann ist sogar f/g eine stetig Funktion.

Proof.

Der Beweis ist eine einfache Anwendung der Limesregeln für Folgen. □

Stetige Funktionen

Theorem

Seien $f_1, f_2, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen, dann ist $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n) : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig. Sei $\mathbf{g} : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ ebenfalls stetig, so gilt dies auch für die Funktionen $\mathbf{f} + \mathbf{g} : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Proof.

Der erste Teil des Beweises folgt aus der Ungleichung

$$|f_i(x) - f_i(x_0)| \leq \|\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}(x_0)\|.$$

Der Rest verbleibt dem Leser als Übung.



Example (Beispiel)

1 Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ein Polynom, so ist f stetig.

2 Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

so ist f in $x = 0$ nicht stetig, aber in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ stetig.

3 Sei

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

so ist f in $x = 0$ nicht stetig, aber in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

4 Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

ist in $x = 0$ nicht stetig, aber in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

5 Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

ist in $\mathbb{R}$ stetig.

Einseitiger Grenzwert und Stetigkeit

Sei $E \subseteq \mathbb{R}$ und $f : E \rightarrow Y$ eine Funktion. Häufig treten Grenzwerte auf, bei denen x von rechts oder von links gegen x_0 strebt, bei denen also E ein Intervall $(x_0, x_0 + a)$ bzw. $(x_0, x_0 - a)$ mit $a > 0$ ist. Man spricht dann von einem *rechtsseitigen* bzw. *linksseitigen Grenzwert* und verwendet zu seiner Kennzeichnung das Symbol $x \rightarrow x_0 +$ bzw. $x \rightarrow x_0 -$ (gelegentlich auch $x \rightarrow x_0 + 0$ bzw. $x \rightarrow x_0 - 0$).

Es existiert also zum Beispiel $y = \lim_{x \rightarrow x_0 +} f(x)$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x_0 < x < x_0 + \delta$ stets die Ungleichung $|f(x) - y| < \varepsilon$ besteht.

Diese Begriffe werden auch dann benutzt, wenn f in einer vollen Umgebung von x_0 definiert ist, aber der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ nicht existiert. Man überzeugt sich leicht, dass genau dann $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$ existiert, wenn $\lim_{x \rightarrow x_0 -} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 +} f(x) = y$ ist.

Analog ist die *einseitige Stetigkeit* definiert. Eine Funktion ist *linksseitig stetig*, wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0 -} f(x) = f(x_0),$$

bzw. *rechtsseitig stetig*, wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0 +} f(x) = f(x_0).$$

Wenn f in einer vollen Umgebung von x_0 definiert ist, so gilt “rechtsseitig stetig und linksseitig stetig $\Leftrightarrow$ stetig”.

Example

Für die Signumfunktion aus Beispiel 11 gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0 -} \operatorname{sgn}(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0 +} \operatorname{sgn}(x) = +1.$$

Insbesondere ist sie rechtseitig stetig im Nullpunkt aber nicht linkseitig stetig.

Zusammenhängende Mengen und Stetigkeit

Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A, B \subseteq X$. Die beiden Mengen A und B heißen **getrennt**, falls

$$\overline{A} \cap B = \emptyset \quad \text{und} \quad A \cap \overline{B} = \emptyset.$$

Insbesondere ist somit die leere Menge von jeder anderen Menge getrennt. Eine Menge $M \subseteq X$ heißt **zusammenhängend**, wenn sie nicht als Vereinigung zweier nichtleerer getrennter Mengen geschrieben werden kann.

Example

- 1 Die beiden Mengen $A = (0, 1)$ und $B = (1, 2)$ sind getrennt.
- 2 Die beiden Mengen $A = [0, 1]$ und $B = (1, 2)$ sind zwar disjunkt, aber nicht getrennt.

Theorem

Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, falls für alle $x, y \in M$ mit $x < y$ jedes $z \in (x, y)$ auch $z \in M$ ist.

Proof.

“ $\Rightarrow$ ”: Seien $x, y \in M$ mit $x < y$ und $z \in (x, y)$ mit $z \notin M$. Wir setzen

$$A := (-\infty, z) \cap M, \quad B := (z, \infty) \cap M.$$

Dann gilt $M = A \cup B$ und $\bar{A} \cap B = \emptyset$ sowie $A \cap \bar{B} = \emptyset$, das heißt M ist nicht zusammenhängend. Dies steht aber im Widerspruch zur Voraussetzung. “ $\Leftarrow$ ”: Sei M nicht zusammenhängend. Dann existieren zwei getrennte Mengen A und B mit $M = A \cup B$. Sei $x \in A$ und $y \in B$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $x < y$. Wir setzen

$$z := \sup(A \cap (x, y)).$$

Dann ist $z \in \bar{A}$, aber wegen der Getrenntheit $z \notin B$. Falls $z \notin A$, so gilt $x < z < y$ und $z \notin M$. Falls $z \in A$, so existiert wegen $z \notin \bar{B}$ ein weiteres $z' \notin B$ mit $z < z' < y$. Das heißt $z' \notin A$ und somit $z' \notin M$. □

Theorem

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine auf X stetige Funktion. Zu jeder zusammenhängenden Menge $M \subseteq X$ ist auch $f(M) \subseteq Y$ eine zusammenhängende Teilmenge von Y .

Proof.

Angenommen, $f(M)$ sei nicht zusammenhängend, d.h. $f(M) = A \cup B$ mit geeigneten, getrennten Mengen $A, B \subseteq Y$. Wir definieren

$$G := f^{-1}(A) \cap M \neq \emptyset \quad \text{und} \quad H := f^{-1}(B) \cap M \neq \emptyset.$$

Dann gilt $M = G \cup H$, da $M \subseteq f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Aufgrund der Stetigkeit von f ist $f^{-1}(\overline{A})$ in X abgeschlossen und es gilt $\overline{G} \subseteq f^{-1}(\overline{A})$, somit $f(\overline{G}) \subseteq \overline{A}$. Da $f(H) = B$, folgt aus $\overline{A} \cap B = \emptyset$ auch $\overline{G} \cap H = \emptyset$. Analog zeigt man $G \cap \overline{H} = \emptyset$, d.h. die Menge M ist nicht zusammenhängend. □

Zwischenwertsatz

Example

Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Dann ist f in $x_0 = 0$ nicht stetig. Dennoch wird jede zusammenhängende Menge M wieder auf eine zusammenhängende Menge abgebildet.

Theorem (Zwischenwertsatz)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < f(b)$. Dann existiert zu jedem $c \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < c < f(b)$ ein $x \in (a, b)$ mit $f(x) = c$.

Zwischenwertsatz

Proof.

Da das Intervall $[a, b]$ nach Satz 15 zusammenhängend ist, ist auch $f([a, b])$ eine zusammenhängende Menge, d.h. $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$. □

Definition

Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **monoton wachsend** bzw. **monoton fallend** falls $f(x) \leq f(y)$ bzw. $f(x) \geq f(y)$ für alle $x < y$ gilt. Wir sprechen von **strenger Monotonie** falls die strenge Ungleichung gilt.

Corollary

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und stetig, dann ist

$$f : [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)] \text{ bijektiv .}$$

Stetigkeit und Kompaktheit

Theorem

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und die Menge $K \subseteq X$ kompakt. Ist $f : K \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung, dann ist $f(K) \subseteq Y$ kompakt.

Beweis.

Wir betrachten eine beliebige offene Überdeckung $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ von $f(K)$. Aufgrund von Satz 8 sind die Mengen $f^{-1}(V_\alpha)$ für alle $\alpha \in I$ offen in X . Wegen $f(K) \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$ gilt $K \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} f^{-1}(V_\alpha)$, d.h. $\{f^{-1}(V_\alpha) : \alpha \in I\}$ bildet eine offene Überdeckung von X . Infolge der Kompaktheit von K existiert eine endliche Teilüberdeckung $K \subseteq \bigcup_{i=1}^N f^{-1}(V_{\alpha_i})$. Damit gilt

$$f(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^N f(f^{-1}(V_{\alpha_i})) = \bigcup_{i=1}^N V_{\alpha_i}.$$

Das bedeutet, dass $\{V_{\alpha_i}, i = 1, \dots, N\}$ eine endliche Teilüberdeckung von $f(K)$ bildet.



Stetigkeit und Kompaktheit

Definition

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $E \subseteq X$. Die Abbildung $f : E \rightarrow Y$ heißt **beschränkt**, falls $R > 0$ und $y_0 \in Y$ existieren mit $d_Y(f(x), y_0) < R$ für alle $x \in E$.

Theorem

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und die Menge $K \subseteq X$ kompakt. Sei ferner $f : K \rightarrow Y$ eine stetige Funktion, dann ist $f(K) \subseteq Y$ eine abgeschlossene und beschränkte Menge, d.h. f ist eine beschränkte Funktion.

Stetigkeit und Kompaktheit

Beweis.

Wegen Satz 21 ist $f(K) \subseteq Y$ kompakt. Folglich ist $f(K)$ auch beschränkt und abgeschlossen. $\square$

Theorem

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $K \subseteq X$ eine kompakte Menge und $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Ferner seien $m := \inf_{x \in K} f(x)$ und $M := \sup_{x \in K} f(x)$. Dann existieren $p, q \in K$ mit $f(p) = m$ und $f(q) = M$.

Beweis.

Nach Satz 23 ist $f(K) \subseteq \mathbb{R}$ eine abgeschlossene und beschränkte Menge. Somit gilt $m, M \in f(K)$, d.h. es existieren $p, q \in X$ mit $f(p) = m$ und $f(q) = M$. $\square$

Theorem

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und die Menge $K \subseteq X$ kompakt. Die Funktion $f : K \rightarrow Y$ sei stetig und bijektiv. Dann ist die inverse Abbildung $f^{-1} : Y \rightarrow K$ ebenfalls stetig auf Y .

Beweis.

Wegen Satz 8 genügt es zu zeigen, dass die Bildmenge $f(V)$ einer offenen Menge $V \subseteq K$ in Y offen ist. Nun ist das Komplement von V in K , d.h. $K \setminus V$, abgeschlossen in X . Eine abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist wieder kompakt und infolge Satz 21 ist daher $f(K \setminus V) \subseteq Y$ kompakt und somit abgeschlossen in Y . Wegen der Bijektivität gilt

$$Y \setminus f(K \setminus V) = f(V)$$

und daher ist die Menge $f(V)$ offen.



Stetigkeit und Kompaktheit

Definition

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Funktion $f : X \rightarrow Y$ heißt **gleichmäßig stetig**, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert derart, dass für alle $x, y \in X$ mit $d_X(x, y) < \delta$ gilt

$$d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Die gleichmäßige Stetigkeit ist eine globale Eigenschaft. Die Funktion $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{1}{x}$ ist in allen Punkten $x \in (0, \infty)$ stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.

Stetigkeit und Kompaktheit

Theorem

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und die Menge $K \subseteq X$ kompakt. Ist die Funktion $f : K \rightarrow Y$ stetig, so ist f auch gleichmäßig stetig auf K .

Beweis.

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest gewählt. Wegen der Stetigkeit gibt es zu jedem $x_0 \in X$ eine Zahl $\delta_{x_0} > 0$ mit $d_Y(f(x), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $x \in K$ mit $d_X(x, x_0) < \delta_{x_0}$. Wir betrachten die Mengen V_{x_0} , $x_0 \in K$, definiert durch

$$V_{x_0} = \left\{ x \in X : d_X(x, x_0) < \frac{\delta_{x_0}}{2} \right\}.$$

Dann ist $\{V_{x_0} : x_0 \in K\}$ eine offene Überdeckung von K . Wegen der Kompaktheit von K existiert eine endliche Teilüberdeckung $\{V_{x_i} : i = 1, \dots, N\}$. Sei nun $2\delta := \min\{\delta_{x_i} : i = 1, \dots, N\}$, dann gibt es zu jedem $x, y \in K$ mit $d_X(x, y) < \delta$ einen Index $m \in \{1, \dots, N\}$ mit

$$d_X(x, x_m) < \delta_{x_m}$$

und

$$d_X(y, x_m) < \delta_{x_m}.$$

Somit gilt

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq d_Y(f(x), f(x_m)) + d_Y(f(x_m), f(y)) < \varepsilon.$$

