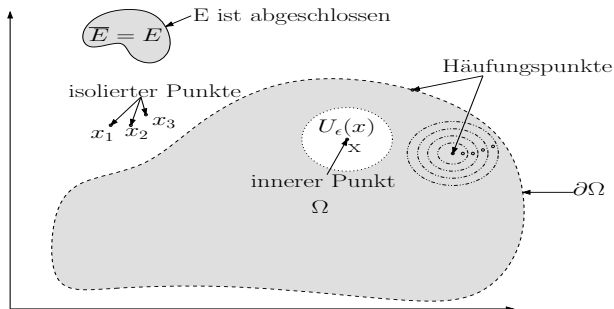


Analysis I - Metrische Räume - eine Einführung in die Topologie

Prof. Dr. Reinhold Schneider



Metrik

Definition

Sei X eine Menge, dann heißt eine Funktion $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ eine **Metrik** auf X falls für alle $x, y, z \in X$ gilt

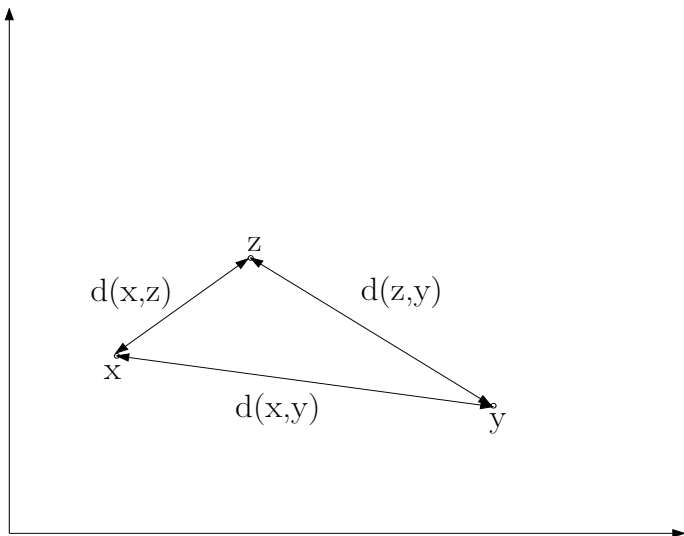
- 1 $d(x, y) \geq 0$ und $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (Definitheit),
- 2 $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie),
- 3 $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung).

Eine Menge X versehen mit einer Metrik $d(\cdot, \cdot)$ nennen wir einen **metrischen Raum** (X, d) .

Eine Metrik d wird mitunter auch als **Distanzfunktion** bezeichnet.

Die Elemente $x \in X$ werden dann manchmal Punkte genannt.

Dreiecksungleichung



Beispiel

- 1 Der Vektorraum \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$, versehen mit der Euklidischen Norm als Metrik

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n,$$

bildet einen metrischen Raum.

- 2 Im \mathbb{R}^n bildet

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}{1 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|}$$

ebenfalls eine Metrik.

- 3 Sei X eine beliebige Menge, dann wird durch

$$d(x, y) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \neq y, \\ 0, & \text{falls } x = y, \end{cases}$$

eine Metrik auf X erklärt.

Normen

Das erste Beispiel legt folgende Verallgemeinerung von $\| \cdot \|$ nahe.

Definition

Eine Funktion $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt eine **Norm** auf \mathbb{R}^n , falls für beliebige $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

- 1 $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ und $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ (Definitheit),
- 2 $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha|\|\mathbf{x}\|$ (Homogenität),
- 3 $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (Dreiecksungleichung).

Normierte Räume

Beispiel

- 1 Der Vektorraum \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$, versehen mit der Euklidischen Norm

$$\|\mathbf{x}\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

bildet einen metrischen Raum.

- 2 In \mathbb{R}^n definieren

$$\|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

und

$$\|\mathbf{x}\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

ebenfalls Normen.

Definition (Intervalle)

Unter einem offenen bzw. abgeschlossenem Intervall $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$, bzw. $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $a < b$, verstehen wir die Menge

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

bzw.

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}.$$

Gelegentlich verwenden wir auch halb offene Intervalle

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\},$$

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\},$$

sowie unbeschränkte Intervalle

$$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a < x\}, \quad [a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}.$$

Umgebungen

Definition

- ① Sei (X, d) ein metrischer Raum und $r > 0$, $x \in X$. Dann heißt eine Menge

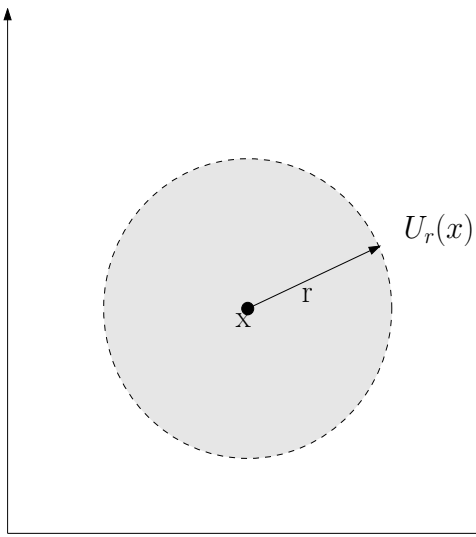
$$U_r(x) := \{y \in X : d(x, y) < r\} \subseteq X$$

eine **r-Umgebung des Punktes** x , auch **offene Kugel mit Radius** r genannt.

- ② In \mathbb{R}^n heißt für $r > 0$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ die Menge $K_r(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < r\}$ eine **offene Kugel** mit Mittelpunkt \mathbf{x} und Radius r .
- ③ Eine Menge $E \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, falls für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ und $0 < \lambda < 1$ stets folgt

$$\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda) \mathbf{y} \in E.$$

r -Umgebung des Punktes x



Kugelförmige Umgebungen

Beispiel

Kugeln $K_r(\mathbf{x})$ sind konvexe Mengen. Denn für $\mathbf{y}, \mathbf{z} \in K_r(\mathbf{x})$ gilt $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < r$ und $\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| < r$. Daraus folgt nun für $\lambda \in (0, 1)$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x} - (\lambda\mathbf{y} + (1 - \lambda)\mathbf{z})\| &= \|\lambda\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{x} - \lambda\mathbf{y} - (1 - \lambda)\mathbf{z}\| \\ &\leq \|\lambda\mathbf{x} - \lambda\mathbf{y}\| + \|(1 - \lambda)(\mathbf{x} - \mathbf{z})\| \\ &= \lambda\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| + (1 - \lambda)\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| \\ &< \lambda r + (1 - \lambda)r = r.\end{aligned}$$

Definition

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $E \subseteq X$.

- Ein Punkt $p \in X$ heißt **Häufungspunkt** der Menge E , falls in jeder r -Umgebung $U_r(p)$ stets ein $q \in E$ existiert mit $p \neq q$, das heißt

$$U_r(p) \cap (E \setminus \{p\}) \neq \emptyset \quad \forall r > 0.$$

- Ist $p \in E$ kein Häufungspunkt von E , dann heißt p ein **isolierter Punkt** von E .
- Die Menge E heißt **abgeschlossen** in X , wenn jeder Häufungspunkt von E selbst in E liegt.
- Die Menge

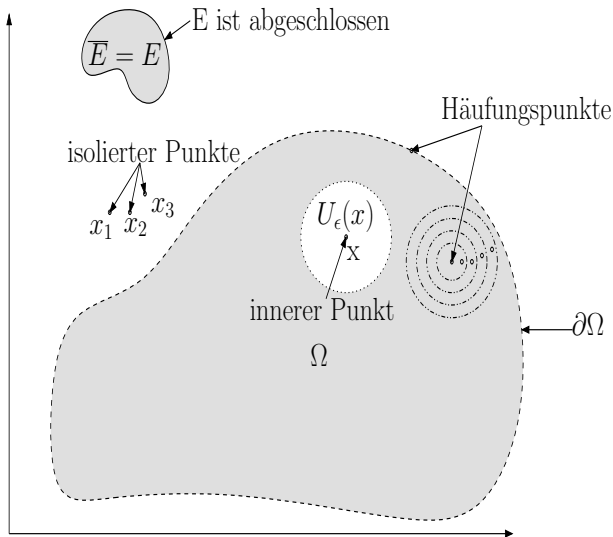
$$\bar{E} := E \cup \{p \in X : p \text{ ist Häufungspunkt von } E\}$$

heißt der **Abschluss** oder die **Abschließung** von E .

Definition

- Ein Punkt $p \in E$ heißt ein **innerer Punkt** von E , falls es eine Umgebung $U_r(p)$, $r > 0$, gibt mit $U_r(p) \subseteq E$.
- Die Menge E heißt **offen** in X , falls jeder Punkt $p \in E$ ein innerer Punkt von E ist.
- Die Menge $E^\circ := \{p \in E : p \text{ ist innerer Punkt von } E\}$ heißt das **Innere** von E .
- Die Menge $\partial E := \bar{E} \cap \overline{X \setminus E}$ heißt der **Rand** von E . Dies bedeutet, jede r -Umgebung $U_r(p) \subseteq X$ enthält sowohl innere Punkte $q \in E^\circ$ als auch "äußere" Punkte $q \in (X \setminus \bar{E})^\circ$.
- Die Menge E heißt **beschränkt**, falls $r > 0$ und $p \in E$ existieren, so dass $E \subseteq U_r(p)$.
- Die Menge E heißt eine in X **dichte Menge**, falls jeder Punkt $p \in X$ ein Häufungspunkt von E ist, das heißt, wenn gilt $\bar{E} = X$.

Offene und abgeschlossene Mengen



Offene Mengen

Theorem

Jede r -Umgebung ist eine offene Menge.

Beweis.

Sei $U_r(p)$, $r > 0$, eine Umgebung um $p \in X$ und $q \in U_r(p)$ ein beliebiger Punkt darin. Dann existiert ein $h = h(q) > 0$ mit $d(p, q) = r - h < r$. Somit gilt für beliebige Punkte x mit $d(q, x) < h$, das heißt $x \in U_h(q)$, dass

$$d(p, x) \leq d(p, q) + d(q, x) < r - h + h = r.$$

Folglich ist q ein innerer Punkt von $U_r(p)$ und somit $U_h(q) \subset U_r(p) \forall q \in U_r(p)$. □

Offene und abgeschlossene Mengen

Theorem

Eine Menge $E \subseteq X$ ist genau dann offen, wenn ihr Komplement $X \setminus E$ abgeschlossen in X ist.

Beweis.

“ \Leftarrow ” Sei $X \setminus E$ abgeschlossen und $x \in E$ beliebig. Dann ist $x \notin X \setminus E$ und somit kein Häufungspunkt dieser Menge. Das heißt, es existiert eine Umgebung $U_r(x)$ mit $U_r(x) \cap (X \setminus E) = \emptyset$. Damit ist $U_r(x) \subseteq E$ und somit $x \in E$ ein innerer Punkt von E .

“ \Rightarrow ” Sei E offen und x ein Häufungspunkt von $X \setminus E$. Dann liegt in jeder Umgebung $U_r(x)$ ein $y \in X \setminus E$ mit $x \neq y$. In diesem Fall ist x kein innerer Punkt von E . Da E offen ist, d.h. nur aus inneren Punkten besteht, gilt $x \in X \setminus E$. □

Offene und abgeschlossene Mengen

Corollary

Das Komplement einer Menge E ist genau dann offen, wenn E abgeschlossen ist.

Theorem

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Falls $x \in X$ ein Häufungspunkt der Menge $E \subseteq X$ ist, so enthält jede Umgebung $U_r(x)$ unendlich viele Elemente von E .

Beweis.

Angenommen es existiert eine Umgebung $U_r(x)$, die endlich viele Elemente $p_1, p_2, \dots, p_n \neq x$ von E enthält. Dann ist $r^* := \min_{1 \leq i \leq n} d(x, p_i) > 0$ und $U_{r^*}(x) \cap E = \{x\}$ im Widerspruch zur Annahme x ist Häufungspunkt von E . □

Offene und abgeschlossene Mengen

Corollary

Jede endliche Menge ist abgeschlossen.

Theorem

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

- 1 *Sei $\{G_i : i \in I\}$ eine Familie in X offener Mengen, dann ist die Vereinigungsmenge $\bigcup_{i \in I} G_i$ ebenfalls offen in X .*
- 2 *Für jede Familie $\{F_i : i \in I\}$ in X abgeschlossener Mengen ist die Schnittmenge $\bigcap_{i \in I} F_i$ wieder abgeschlossen in X .*
- 3 *Für jede **endliche** Familie $\{G_i : i = 1, 2, \dots, N\}$ in X offener Mengen ist $\bigcap_{i=1}^N G_i = G_1 \cap G_2 \cap \dots \cap G_N$ offen in X .*
- 4 *Für jede **endliche** Familie $\{F_i : i = 1, 2, \dots, N\}$ in X abgeschlossener Mengen ist die Vereinigung $\bigcup_{i=1}^N F_i = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_N$ ebenfalls abgeschlossen in X .*

Beweis.

- 1 Sei $G = \bigcup_i G_i$. Zu jedem $x \in G$ existiert ein Index $i \in I$ mit $x \in G_i$. Da $x \in G_i$ ein innerer Punkt in $G_i \subseteq G$ ist, ist x ebenfalls innerer Punkt in G . Somit besteht G nur aus inneren Punkten und ist daher offen.
- 2 Wir wenden die De Morganschen Regeln an. Dazu setzen wir $X \setminus F_i := G_i$. Da für alle $i \in I$ die Menge G_i offen ist, folgt dass $X \setminus \bigcap_{i \in I} F_i = \bigcup_{i \in I} (X \setminus F_i)$ ebenfalls offen ist, d.h. $F = \bigcap_{i \in I} F_i$ ist nach Satz 11 bzw. Korollar 12 abgeschlossen.
- 3 Sei $G = \bigcap_{i=1}^N G_i$ und $x \in G$ beliebig. Da für alle $i = 1, \dots, N$ gilt dass $x \in G_i$, existieren Radien r_i mit $U_{r_i}(x) \subseteq G_i$, $i = 1, 2, \dots, N$. Wir setzen $r = \min\{r_1, r_2, \dots, r_N\} > 0$, dann ist $U_r(x) \subseteq U_{r_i}(x)$ für alle i . Somit folgt schließlich $U_r(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^N U_{r_i}(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^N G_i = G$.
- 4 Folgt durch Komplementbildung aus Punkt 3.

Offene und abgeschlossene Mengen

Die Voraussetzung “die Indexmenge ist endlich” ist für die dritte und vierte Aussage **wesentlich**. In den ersten beiden Aussagen kann dagegen die Indexmenge I beliebig gewählt werden, insbesondere darf I überabzählbar unendlich sein.

Beispiel

Für $k \in \mathbb{N}$ sei G_k das offene Intervall $(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k})$. Offensichtlich ist jedes G_k eine offene Menge in \mathbb{R} und $G = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} G_k = (-1, 1)$ ist offen in \mathbb{R} . Aber die Menge $F = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_k = \{0\}$ ist nicht offen sondern abgeschlossen in \mathbb{R} .

Offene und abgeschlossene Mengen

Theorem

Ist (X, d) ein metrischer und $E, F, G \subseteq X$, dann gelten die folgenden Aussagen.

- 1 *Aus $E \subseteq F$ folgt $\bar{E} \subseteq \bar{F}$.*
- 2 *Ist F eine in X abgeschlossene Menge und $E \subseteq F$, so gilt auch $\bar{E} \subseteq F$.*
- 3 *Die Menge \bar{E} ist abgeschlossen in X .*
- 4 *Es ist $E = \bar{E}$ genau dann, wenn E abgeschlossen ist.*
- 5 *\bar{E} ist die kleinste abgeschlossene Menge aus X , die E enthält.*

Beweis.

- 1 Es sei $x \in \bar{E}$ beliebig, aber fest. Dann ist entweder $x \in E$ oder x ist ein Häufungspunkt von E . Im ersten Fall gilt $x \in F$, also auch $x \in \bar{E}$. Sei nun also x ein Häufungspunkt von E . Dann ist für alle r -Umgebungen von x der Schnitt $U_r(x) \cap (E \setminus \{x\})$ nicht leer. Wegen $E \subseteq G$ ist aber auch der Schnitt $U_r(x) \cap (F \setminus \{x\})$ nicht leer. Folglich ist x ein Häufungspunkt von F und damit $x \in \bar{F}$.
- 2 Die Behauptung folgt aus der ersten Aussage mit $F = \bar{F}$.
- 3 Eine Menge ist genau dann abgeschlossen, wenn ihr Komplement offen ist. Also genügt es zu zeigen, dass $X \setminus \bar{E}$ eine in X offene Menge ist. Sei hierzu $x \in X \setminus \bar{E}$ beliebig gewählt. Zuerst bemerken wir, dass $x \notin \bar{E}$ und somit kein Häufungspunkt von E ist. Es existiert also eine r -Umgebung von x mit $U_r(x) \cap E = \emptyset$, d.h. $E \subseteq X \setminus U_r(x)$. Da $U_r(x)$ in X offen ist, ist $X \setminus U_r(x)$ in X abgeschlossen, woraus mit der zweiten Aussage folgt, dass $\bar{E} \subseteq X \setminus U_r(x)$, also auch $U_r(x) \subseteq X \setminus \bar{E}$. Demnach ist x ein innerer Punkt von $X \setminus \bar{E}$ und folglich ist $X \setminus \bar{E}$ offen.
- 4 Für $x \notin \bar{E}$ ist $x \notin E$ und somit ist x auch kein Häufungspunkt von E . Damit existiert eine Umgebung $U_r(x)$ mit $U_r(x) \cap \bar{E} = \emptyset$. Daher ist x für alle $x \in X \setminus \bar{E}$ ein innerer Punkt von $X \setminus \bar{E}$. Also ist die Menge $X \setminus \bar{E}$ offen und daher \bar{E} abgeschlossen.
- 5 Die Behauptung folgt mittelbar aus der zweiten und dritten Aussage.



Kompakte Mengen

Definition

1) Unter einer **offenen Überdeckung** einer Menge E in einem metrischen Raum X verstehen wir eine Familie offener Mengen $\{G_i : i \in I, G_i \subseteq X \text{ offen}\}$, so dass

$$E \subseteq \bigcup_{i \in I} G_i.$$

2) Eine Teilmenge K eines metrischen Raumes heißt **kompakt**, falls jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilmenge besitzt, die selbst wieder eine offene Überdeckung von K ist. D.h. zu jeder offenen Überdeckung $\{G_\alpha : \alpha \in I\}$ existieren Indizes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N \in I$ mit

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^N G_{\alpha_i}.$$

Kompakte Mengen

Beispiel

Jede endliche Teilmenge ist kompakt.

Theorem

Sei $K \subseteq X$ eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes (X, d) . Dann ist K beschränkt und abgeschlossen.

Beweis: Wir zeigen zuerst, dass K beschränkt ist.
Zu jedem $x \in K$ definieren wir eine Umgebung $U_x := U_1(x) = \{y \in Y : d(x, y) < 1\}$.
Dann wird K von den Mengen U_x , $x \in K$, überdeckt,

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} U_x.$$

Aufgrund der Kompaktheit von K existiert eine endliche Teilüberdeckung
 $\{U_{x_i} : i = 1, \dots, n\}$ mit $K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}$.
Wir wählen $y \in K$ und definieren

$$\rho := \max\{d(x_i, y) : i = 1, \dots, n\} < \infty.$$

Dann ist $U_{x_i} \subseteq U_{\rho+1}(y)$ für jedes x_i , $i = 1, \dots, n$. Hieraus folgt wegen

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{x_i} \subseteq U_{\rho+1}(y)$$

die Behauptung.

Als nächstes zeigen wir die Abgeschlossenheit von K , indem wir beweisen, dass $X \setminus K$ eine in X offene Menge ist.

Sei $y \in X \setminus K$ ein beliebiges Element im Komplement von K .

Zu jedem $x \in X$ definieren wir zwei Umgebungen, mit $V_x = U_r(y)$ und $W_x = U_r(x)$ mit $r = r_x := \frac{1}{2}d(x, y)$.

Dann gilt $y \in V_x$ und $x \in W_x$ und $W_x \cap V_x = \emptyset$. Somit wird K von den Mengen W_x , $x \in K$, überdeckt

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} W_x.$$

Die Kompaktheit sichert die Existenz endlich vieler x_i , $i = 1, \dots, n$ mit

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^n W_{x_i}.$$

Wir definieren nun $\varepsilon := \min\{r_i = \frac{1}{2}d(x_i, y) : 1 \leq i \leq n\}$ und $V := U_\varepsilon(y)$.

Dann gilt $V \cap W_{x_i} = \emptyset$ für alle $i = 1, \dots, n$.

Wegen $V \cap K \subseteq V \cap \bigcup_{i=1}^n W_{x_i} = \emptyset$ ist y ein innerer Punkt von $X \setminus K$.

Kompakte Mengen

Theorem

Jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq K$ einer kompakten Menge ist selbst kompakt.

Kompakte Mengen

Beweis.

Sei $\{V_\alpha, \alpha \in I\}$ eine beliebige offene Überdeckung von A , d.h. $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$. Wegen der Abgeschlossenheit von A ist mit Satz 11 die Komplementärmenge $X \setminus A$ offen in X . Dann liefern $X = (X \setminus A) \cup \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (V_\alpha \cup (X \setminus A))$ offene Überdeckungen der kompakten Menge K . Die Menge K kann wegen ihrer Kompaktheit mit endlich vielen $G_{\alpha_i} := (V_{\alpha_i} \cup (X \setminus A))$, $i = 1, \dots, n$ überdeckt werden,

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i} = \bigcup_{i=1}^n (V_{\alpha_i} \cup (X \setminus A)).$$

Wegen $A \subseteq K$ gilt

$$\begin{aligned} A &= A \cap K \subseteq A \cap \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i} = A \cap \bigcup_{i=1}^n ((V_{\alpha_i} \cup (X \setminus A))) \\ &= \bigcup_{i=1}^n (A \cap V_{\alpha_i}) = A \cap \bigcup_{i=1}^n V_{\alpha_i} \end{aligned}$$

und damit ist $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{\alpha_i}$. Folglich haben wir eine endliche Teilüberdeckung von A gefunden. □

Kompakte Mengen

Corollary

Sei $K \subseteq X$ eine kompakte und $A \subseteq X$ eine in X abgeschlossene Menge. Dann ist $A \cap K$ kompakt.

Beweis.

Wegen Satz 20 ist K und damit nach Satz 15 auch $A \cap K$ abgeschlossen. Da $A \cap K \subseteq K$ ist diese Menge nach Satz 21 ebenfalls kompakt. □

Kompakte Mengen

Theorem (Zentriertes System kompakter Mengen)

Sei $\{K_\alpha : \alpha \in I\}$ eine Familie kompakter Mengen derart, dass zu jeder endlichen Teilfamilie $\{K_{\alpha_i} : i = 1, \dots, n\}$ der Durchschnitt $\bigcap_{i=1}^n K_{\alpha_i} \neq \emptyset$. Dann ist ebenfalls $\bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha \neq \emptyset$.

[Beweis] Sei $K_1 \in \{K_\alpha : \alpha \in I\}$ beliebig gewählt. Dann sind $G_\alpha := X \setminus K_\alpha$ für alle $\alpha \in I' := I \setminus \{1\}$ nach Satz 11 offene Mengen. Wir nehmen nun an, dass

$$\bigcap_{\alpha \in I} K_\alpha = K_1 \cap \bigcap_{\alpha \in I'} K_\alpha = \emptyset.$$

Dann gilt

$$K_1 \subseteq X \setminus \bigcap_{\alpha \in I'} K_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I'} (X \setminus K_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in I'} G_\alpha$$

d.h. $\{G_\alpha : \alpha \in I'\}$ ist eine offene Überdeckung von K_1 . Da K_1 kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung $\{G_{\alpha_i} : i = 1, \dots, n\}$ mit $K_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$.
Wir wenden jetzt die de Morganschen Regeln an und erhalten

$$\begin{aligned} \emptyset &= K_1 \cap \left(X \setminus \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i} \right) \\ &= K_1 \cap \bigcap_{i=1}^n (X \setminus G_{\alpha_i}) \\ &= K_1 \cap \bigcap_{i=1}^n K_{\alpha_i}. \end{aligned}$$

Dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung, dass jeder endliche Durchschnitt nichtleer ist.

Kompakte Mengen

Corollary

Seien $\emptyset \neq K_n \subseteq X$ kompakte Mengen mit $K_{n+1} \subseteq K_n$, $n \in \mathbb{N}$, dann ist $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$.

Theorem (Cantor)

Sei $E \subseteq K$ eine unendliche Teilmenge einer kompakten Menge K , dann besitzt E mindestens einen Häufungspunkt in K .

Kompakte Mengen

Beweis.

Angenommen es existiert kein Häufungspunkt $x \in K$ von E . Dann existiert zu jedem Punkt $x \in E$ eine Umgebung $U_x = U_r(x)$, $r = r_x > 0$, derart, dass $U_x \cap E = \{x\}$. Ferner existiert zu jedem Punkt $x \in K \setminus E$ eine Umgebung $U_x = U_r(x)$, $r = r_x > 0$, derart, dass $U_x \cap E = \emptyset$. Dann bildet wegen $K \subseteq \bigcup_{x \in K} U_x$ die Familie $\mathcal{U} := \{U_x, x \in K\}$ eine Überdeckung von K . Jeder Punkt $x \in E$ liegt in genau einer Umgebung $U_x \in \mathcal{U}$. Daher kann \mathcal{U} keine endliche Teilüberdeckung besitzen, da E unendlich ist. Dies widerspricht natürlich der Kompaktheit von K . □

Kompakte Mengen

Definition

Seien $-\infty < a_i < b_i < \infty$, $i = 1, \dots, k$, dann heißen die Produktmengen

$$\begin{aligned} I &= \prod_{i=1}^k [a_i, b_i] := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_k, b_k] \\ &= \{ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k) : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, \dots, k \} \subseteq \mathbb{R}^k \end{aligned}$$

k-Zellen.

Kompakte Mengen

Lemma

- 1 Seien $\emptyset \neq I_l := [a_l, b_l] \subseteq \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{N}$, *abgeschlossene Intervalle* mit $I_{l+1} \subseteq I_l$. *Dann ist $\bigcap_{l=1}^{\infty} I_l \neq \emptyset$ nichtleer.*
- 2 Seien $I_l = \prod_{i=1}^k [a_{i,l}, b_{i,l}] \subseteq \mathbb{R}^k$, $l \in \mathbb{N}$, *abgeschlossene k -Zellen* mit $I_{l+1} \subseteq I_l$. *Dann ist $\bigcap_{l=1}^{\infty} I_l \neq \emptyset$.*

Kompakte Mengen

Beweis.

- 1 Sei $M := \{a_l, l \in \mathbb{N}\}$, dann ist M nach oben beschränkt durch alle $b_l, l \in \mathbb{N}$. Somit ist $a_l \leq a := \sup M \leq b_l$ für alle $l \in \mathbb{N}$. Dies impliziert $a \in \bigcap_{l \in \mathbb{N}} [a_k, b_k]$.
- 2 Analog definieren wir zu jedem $i = 1, \dots, k$ $a_i := \sup\{a_{i,l}, l \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_k) \in I_l$ für alle $l \in \mathbb{N}$ auch im Schnitt $\mathbf{a} \in \bigcap_{l=1}^{\infty} I_l$.



Kompakte Mengen

Lemma

- 1 *Jedes abgeschlossene und beschränkte Intervall $[a, b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$ ist kompakt.*
- 2 *Jede nichtleere, beschränkte k -Zelle ist kompakt.*

Beweis:

- ① Sei $\delta := b - a$ die Länge des Intervalls. Dann gilt für alle $x, y \in I = [a, b]$ dass $|x - y| \leq \delta$. Wir nehmen nun an, dass $I = I_0 = [a, b]$ nicht kompakt sei. Dann gibt es eine Überdeckung $\{G_\alpha, \alpha \in J\}$ von I_0 , die keine endliche Teilüberdeckung enthält. Wir zerlegen I_0 in zwei gleichgroße Teilintervalle

$$I_0 = [a, b] = \left[a, \frac{a+b}{2} \right] \cup \left[\frac{a+b}{2}, b \right] =: I_{1,l} \cup I_{1,r}.$$

Nun existiert, sagen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit, zu $I_1 := I_{1,l}$ keine endliche Teilüberdeckung. Wir teilen nun I_1 wiederum in zwei gleichgroße Teilintervalle $I_1 = I_{2,l} \cup I_{2,r}$ und finden unter diesen ein $I_2 \subseteq I_1$, zu dem ebenfalls keine endliche Teilüberdeckung existiert.

Diese Vorgehensweise setzen wir fort und erhalten damit

eine Familie abgeschlossener Teilintervalle I_l , $l \in \mathbb{N}_0$, mit den folgenden Eigenschaften:

- $I_{l+1} \subseteq I_l \subseteq I_0$ für alle $l \in \mathbb{N}_0$.
- Es gilt $|x - y| \leq 2^{-l}\delta$ für alle $x, y \in I_l$.
- Die Intervalle I_l besitzen alle keine endliche Teilüberdeckung.

Aufgrund von Lemma 27 existiert ein $x^* \in I$ mit $x^* \in \bigcap_{l=0}^{\infty} I_l$. In der Überdeckung $\{G_\alpha : \alpha \in J\}$ existiert eine offene Menge G_α mit $x^* \in G_\alpha$. Nun ist G_α offen und somit ist x^* ein innerer Punkt von G_α , das heißt, es existiert ein $r > 0$ mit $U_r(x^*) \subseteq G_\alpha$.

Wir wählen $n \in \mathbb{N}$, so dass $2^{-n}\delta < r$ ist. Da aufgrund unserer Konstruktion die Intervalle I_l die Länge $2^{-l} \cdot \delta$ haben, gilt für alle $x, y \in I_n$

$$|x - y| \leq 2^{-n}\delta < r.$$

Wegen $x^* \in I_n$ ist $I_n \subseteq G_\alpha$. Dies bedeutet I_n wird von einer einzigen offenen Menge überdeckt. Dies steht aber im

Widerspruch zur Konstruktion der Intervalle I_n , da diese alle keine endliche Teilüberdeckung besitzen.

- ② Im k -dimensionalen Fall führen wir den Beweis analog. Dazu benötigen wir nur die folgende Modifikation. Wir setzen

$$\delta := \left(\sum_{i=1}^k |b_i - a_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

so dass $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \leq \delta$ für beliebige Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in I$ gilt. Wir zerteilen I in 2^k Teilzellen, wie zum Beispiel $I_{1,1} = \prod_{i=1}^k \left[a_i, \frac{a_i+b_i}{2} \right]$. Dann folgt die Behauptung mittels der gleichen Argumentation wie in oben.

Kompakte Mengen

Theorem (Heine–Borel)

Sei $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{R}^k$ und $d(\cdot, \cdot)$ die kanonische Metrik in \mathbb{R}^k ,

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Dann sind die drei folgenden Eigenschaften alle äquivalent:

- 1 E ist abgeschlossen und beschränkt.
- 2 E ist kompakt.
- 3 Jede unendliche Teilmenge $A \subseteq E$ von E hat einen Häufungspunkt in E .

[Beweis]

1. \implies 2.: Zu E existiert aufgrund der Beschränktheit eine Kugel $U_R(\mathbf{x})$ mit $E \subseteq U_R(\mathbf{x})$ und somit wiederum eine Zelle I mit $E \subseteq U_R(\mathbf{x}) \subseteq I$. Lemma 28 besagt, dass I kompakt ist. Da $E \subseteq I$ abgeschlossen in \mathbb{R}^k ist, ist wegen Satz 21 E kompakt.
2. \implies 3.: Dies ist die Aussage von Satz 25.
3. \implies 1.:
 - Wir nehmen an, dass E nicht beschränkt sei. In diesem Fall existieren $\mathbf{x}_n \in E$ mit $\|\mathbf{x}_n\| > n$, $n \in \mathbb{N}$. Die Mengen $M = \{\mathbf{x}_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist unendlich und besitzt keinen Häufungspunkt. Denn in keiner endlichen Umgebung liegen unendlich viele Punkte von M .
 - Angenommen, es sei E nicht abgeschlossen. Dann existiert ein Häufungspunkt $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k \setminus E$. Damit gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $\mathbf{x}_n \in E$ mit $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_n\| < \frac{1}{n}$. Die Menge $M := \{\mathbf{x}_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq E$ ist o.B.d.A. eine unendliche Teilmenge von E , die wegen der Voraussetzung einen

Häufungspunkt $\mathbf{x}^* \in E$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$ besitzt. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $\frac{1}{n} < \frac{1}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|$ gilt. Hieraus folgt für alle $l \geq n$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}_l - \mathbf{x}^*\| &\geq \left| \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_l\| \right| \\ &\geq \left| \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| - \frac{1}{n} \right| \\ &\geq \frac{1}{2}\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| > 0\end{aligned}$$

im Widerspruch zur Definition \mathbf{x}^* ist Häufungspunkt von M .

Kompakte Mengen

Die Voraussetzung, dass die Dimension des Raumes $X = \mathbb{R}^k$ endlich ist, ist wesentlich für die Äquivalenz “ K abgeschlossen und beschränkt $\iff K$ ist kompakt”. In allgemeinen metrischen Räumen (X, d) folgt nicht, dass jede abgeschlossene und beschränkte Menge auch kompakt ist. Der Nachweis der Kompaktheit ist dann i.a. schwieriger. Als Korollar können wir jetzt den Satz von Bolzano–Weierstraß formulieren.

Kompakte Mengen

Theorem (Bolzano–Weierstraß)

Jede beschränkte und unendliche Teilmenge E des (\mathbb{R}^k, d) besitzt mindestens einen Häufungspunkt in \mathbb{R}^k .

Beweis.

Zu E existiert eine hinreichend große k -Zelle I mit $E \subseteq I$. Da I kompakt ist, folgt die Aussage unmittelbar aus Satz 29. \square