Analysis II - Elementare Integrationstheorie

Prof. Dr. Reinhold Schneider

Wir behandeln die Integration von (reellen) Funktionen einer reellen Variablen über einem Intervall $I = [a, b]$. Die Behandlung der Integration über Mengen werden wir erst später in einem allgemeineren Zusammenhang kennenlernen.

Zerlegungen

Definition (Zerlegungen)

Gegeben sei das Intervall $\bar{I} = [a, b]$. Unter einer **Zerlegung** bzw. **Partition** von I ($\bar{I}$) verstehen wir eine endliche Folge von (geordneten) Punkten

$$x_0 = a \leq x_1 \leq \cdots \leq x_i \leq \cdots \leq x_m = b$$

Eine Zerlegung $Z' : x'_0 < \ldots < x'_m$ heißt eine Verfeinerung von Z falls $\{x_0 < \cdots \leq x_m\} \subset \{a = x'_0 \leq \cdots \leq x'_m = b\}$.

Es gilt $\bar{I} \subset \bigcup_{i=1}^m \bar{I}_i = \bigcup_{i=1}^m [x_{i-1}, x_i]$, und das halboffene Intervall $I := [a, b) = \bigcup_{i=1}^m [x_{i-1}, x_i) = \bigcup_{i=1}^m I_i$ ist eine disjunkte Vereinigung halboffener Teilintervalle.

Lemma

Zwei Zerlegungen Z_1, Z_2 von $\bar{I}$ besitzen eine gemeinsame Verfeinerung Z'.

Maße halb-offener Mengen und Nullmengen

Definition (Maße halb-offener Intervalle)

Zu einem halb-offenen Intervall z.B. $I := [a, b)$ $(a \leq b)$ definieren wir das Maß oder Inhalt von I

$$\mu(I) = |I| := b - a \,.$$

Definition (Nullmengen)

Eine Teilmenge $N \subset \mathbb{R}$ heißt eine Nullmenge, falls zu jedem $\epsilon > 0$ eine Folge halb-offener Intervalle I_k, $k \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$N \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k) < \epsilon \,.$$

Maße halb-offener Mengen und Nullmengen

Definition (Maße halb-offener Intervalle)

Zu einem halb-offenen Intervall z.B. $I := [a, b)$ $(a \leq b)$ definieren wir das Maß oder Inhalt von I

$$\mu(I) = |I| := b - a \,.$$

Definition (Nullmengen)

Eine Teilmenge $N \subset \mathbb{R}$ heißt eine Nullmenge, falls zu jedem $\epsilon > 0$ eine Folge halb-offener Intervalle I_k, $k \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$N \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k) < \epsilon \,.$$

Nullmengen

Theorem

Jede abzählbare Teilmenge $N = \{x_1, x_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ *ist eine Nullmenge.*

Beweis.

Wird wählen $I_k := [x_k - 2^{-k-1}\epsilon, x_k + 2^{-k-1}\epsilon)$.
Für jedes n gilt $x_n \in I_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ und somit $N \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$.
Darüber hinaus gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \cdot 2^{-k-1}\epsilon = \epsilon \ .$$

□

Insbesondere sind alle endlichen Mengen als auch z.B. $\mathbb{Q}$ alles Nullmengen.

Treppenfunktionen

Definition

Sei $E \subset \Omega$, z.B. $\Omega := \mathbb{R}$, so heißt die Funktion $\chi_E : \Omega \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \chi_E(x) := \begin{cases} 1 & , \quad x \in E \\ 0 & , \quad x \in \Omega \backslash E \end{cases}$$

die charakteristische Funktion von E.
Eine Funktion $f : \bar{\mathrm{I}} \to \mathrm{V}$, V ein Vektorraum z.B. $V = \mathbb{R}$, heißt eine *Treppenfunktion*, oder *einfache Funktion*, falls eine Zerlegung Z und $\alpha_i \in V$, $i = 1, \ldots, m$ existieren mit

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{I_i}(x) \ , \ x \in I \ , \ f(b) = \alpha_m \ , \ \text{kurz } f(x) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_i(x)$$

Lemma

Die Treppenfunktionen $f : \bar{\mathrm{I}} \to \mathbb{R}$, $\bar{\mathrm{I}} = [\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ *bilden eine linearen Raum, den wir mit* $T([a, b])$ *bezeichnen.*

Beweis: Übung

Regelfunktionen

Definition

Eine Funktion $f : \bar{I} \to \mathbb{R}$ heißt beschränkt auf $\bar{I}$, kurz $f \in B(\bar{I})$ falls $\|f\|_\infty := \sup_{x \in \bar{I}} |f(x)| < \infty$.
Eine *Regelfunktion auf* $[a, b]$ ist eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, zu der eine Folge von Treppenfunktionen t_k, $k \in \mathbb{N}$ existiert, die gleichmäßig gegen f konvergiert, d.h.

$$\lim_{k \to \infty} \|f - t_k\|_\infty = 0 ,$$

kurz $f \in R([a, b])$.

Theorem

$R([a, b])$ ist ein linearer Teilraum von $B([a, b])$.

Beweis.

Seien $f, g \in R([a,b])$ Regelfunktionen und $f_k, g_k \in T([a,b])$ Treppenfunktionen mit

$$\|f - f_k\|_\infty \to 0\ ,\ \|g - g_k\|_\infty \to 0$$

für $k \to \infty$ und $a \in \mathbb{R}$. Dann folgt wegen

$$\begin{aligned}
\|(f+g) - (f_k + g_k)\|_\infty &= \|(f - f_k) + (g - g_k)\|_\infty \\
&\leq \|f - f_k\|_\infty + \|g - g_k\|_\infty \to 0 \\
\|af - af_k\|_\infty &= |a|\|f - f_k\|_\infty \to 0
\end{aligned}$$

für $k \to \infty$, dass $f + g, af \in R([a,b])$ ebenfalls Regelfunktionen sind. □

Regelfunktionen

Theorem

Seien $f_k \in R([a,b])$*,* $k \in \mathbb{N}$ *und* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$*. Falls* $\lim_{k\to\infty} \|f - f_n\|_\infty \to 0$ *dann ist* $f \in R([a,b])$*.*

Beweis.

Zu jedem $f_k \in R([a,b])$ existiert eine Treppenfunktion $t_k \in T([a,b])$ mit $\|f_k - t_k\|_\infty < \frac{1}{k}$ Daraus folgt

$$\begin{aligned} \|f - t_k\|_\infty &= \|(f - f_k) + (f_k - t_k)\|_\infty \\ &\leq \|f - f_k\|_\infty + \|f_k - t_k\|_\infty \leq \|f - f_k\|_\infty + \frac{1}{k} \to 0 \,, \end{aligned}$$

für $k \to \infty$, und somit ist $f \in R([a,b])$. □

Corollary

Die Räume $B([a,b])$, $R([a,b])$ versehen mit der $\|.\|_\infty$-Norm sind vollständig.

Beweis.

Sei (f_k) eine Cauchy-Folge in $B([a,b])$. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist konvergiert $f_k(x) \to f(x)$ für jedes $x \in [a,b]$.

$$\begin{aligned} \|f - f_n\|_\infty &= \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - f_n(x)| \\ &\leq \sup_{x\in[a,b]} \sup_{k\geq n} |f_k(x) - f_n(x)| \\ &= \sup_{k\geq n} \|f_n - f_k\|_\infty \to 0 \,, \end{aligned}$$

für $n \to \infty$. Somit ist $(B([a,b]), \|.\|_\infty)$ ein Banachraum, d.h. ein vollständiger normierter Raum.
Da $R([a,b]) \subset B([a,b])$ abgeschlossen ist, ist er ebenfalls vollständig. $\square$

Theorem

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann eine Regelfunktion, falls in jedem Punkt $x \in [a,b]$ ein rechts- sowie linksseitiger Grenzwert $f^-(x_0) := \lim_{x \to x_0 -} f(x)$, bzw. $f^+(x_0) := \lim_{x \to x_0 +} f(x)$, existiert und einer dieser Werte angenommen wird.

Beweis.

$\Rightarrow$: Wir zeigen,dass in jedem Punkt $x_0 \in (a, B]$ der linksseitige Grenzwert existiert:

$$\forall \epsilon > 0 \text{ ex.} \delta > 0 \text{ mit } |f(s) - f(t)| < \epsilon \, \forall x_0 - \delta < s, t, < x_0 \, .$$

Sei $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben, und $g \in T([a,b])$ mit $\|f - g\|_\infty < \frac{\epsilon}{2}$. Sei $\delta > 0$ so dass für alle $s, t \in (x_0 - \delta, x_0) \subset [a, b)$ gilt $g(s) = g(t)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |f(s) - f(t)| &\leq |f(s) - g(s)| + |g(s) - g(t)| + |g(t) - f(t)| \\ &\leq \|f - g\|_\infty + 0 + \|f - g\|_\infty < \epsilon \, . \end{aligned}$$

Für den rechtsseitigen Grenzwert verfährt man analog. $\square$

Regelfunktionen

Beweis-Fortsetzung.

Angenommen f sei keine Regelfunktion, dann existiert $\epsilon > 0$, aber keine Treppenfunktion g auf $[a, b]$ mit $\|f - g\|_\infty < \epsilon$. Wir führen den indirekten Beweis mit Hilfe einer Intervallschachtelung.
Sei $c := \frac{a+b}{2}$, so existiert in mindestens einem Teilintervall $[a, c], [c, b] \subset [a, b]$ keine solche Treppenfunktion. Diesen Prozess führen wir rekursiv fort, und finden Teilintervalle $[a_k, b_k] \subset [a_{k-1}, b_{k-1}] \subset [a, b]$ der Länge $\frac{b-a}{2^k}$, für die keine Treppenfunktion mit

$$\sup_{x \in [a_k, b_k]} |f(x) - g(x)| < \epsilon$$

existiert. Die Intervallgrenzen a_k, b_k bilden Cauchyfolgen $(a_k), (b_k)$, die beiden gegen ein und denselben Grenzwert $x_0 \in [a, b]$ konvergieren. □

Beweis-Fortsetzung.

Nach Voraussetzung existieren die links-und rechtsseitigen Funktionsgrenzwerte f_-, f_+ im Punkt x_0, d.h. es existiert $\delta > 0$ mit

$$|f(x) - f_-| < \epsilon \, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \, , \; |f(x) - f_+| < \epsilon \, \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \, .$$

Sei k so dass $[a_k, b_k] \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, dann definiert

$$g(x) := \begin{cases} f_- & a \leq x \leq x_0 \\ f_+ & x_0 \leq x \leq b \end{cases}$$

eine Treppenfunktion auf $[a, b]$, mit $\sup_{x \in [a_k, b_k]} |f(x) - g(x)| < \epsilon$ im Widerspruch zur Definition von $[a_k, b_k]$. □

Regelfunktionen

Theorem

i) Alle auf $[a, b]$ *stetigen Funktionen sind Regelfunktionen, d.h.* $C^0([a, b]) \subset R([a, b])$
ii) Alle monotonen beschränkte Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *sind Regelfunktionen.*

Proof.

i) Für stetige Funktionen existiert in jedem Punkt $x_0 \in (a, b)$ der Funktionsgrenzwert $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$, und somit auch der links- und rechtsseitige Funktionsgrenzwert. $\square$

Beweis - Fortsetzung.

ii) Wir zeigen, dass für jede monoton wachsende Funktion der rechtsseitige Funktionsgrenzwert existiert. (Die restlichen Fälle zeigt man analog).
Sei (z_k) eine streng monoton wachsende Folge mit $\lim_{k\to\infty} z_k = x_0$, $z_k \in (a,b)$. Dann ist die Folge $(f(z_k))$ monoton wachsend und beschränkt, und daher konvergent $f(z_k) \to c$, $k \to \infty$.
Sei $\epsilon > 0$ und n_0, so dass $|f(z_k) - c| < \epsilon \; \forall k > n_0$, gilt für alle $z_k \le x \le x_0$. Wegen $f(z_k) \le f(x) \le c$ folgt hieraus dass $|f(x) - c| < \epsilon$. $\square$

Das Regelintegral

Definition

Sei $Z : a = x_0 < \ldots < x_m = b$ ein Zerlegung von $[a, b]$, dann definieren wir für $f : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$I(Z, f) := \sum_{i=1}^{m} (x_i - x_{i-1}) f(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}) .$$

Lemma

Sei $f \in T([a, b])$ eine Treppenfunktion zu den Zerlegungen Z_1 sowie Z_2, dann gilt

$$I(Z_1, f) = I(Z_2, f) .$$

Beweis.

Sei Z' eine gemeinsame Verfeinerung von Z_1 und Z_2, dann gilt $I(Z_1, f) = I(Z', f)$ sowie $I(Z_2, f) = I(Z', f)$. $\square$

Definition

Für eine Treppenfunktion $f \in T([a, b])$ zur Zerlegung Z definieren wir das Integral

$$\int_a^b f(x)dx = I(f) := I(Z, f) \ .$$

Lemma

Dss Integral $f \mapsto I(f) = \int_a^b f(x)dx$ *definiert ein lineares Funktional auf dem Raum der Treppenfunktionen, d.h. für* $f, g \in T([a,b])$ *gilt*

$$\begin{aligned} I(f+g) &= \int_a^b (f(x)+g(x))dx \\ &= I(f)+I(g) = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \\ I(\alpha f) = \int_a^b \alpha f(x)dx &= \alpha I(f) = \alpha \int_a^b f(x)dx|, \ \alpha \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

Falls für alle $x \in [a,b]$ $f(x) \leq g(x)$ *dann gilt*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx .$$

Das Regelintegral

Lemma

Für $f \in T([a,b])$ gilt

$$\int_a^b |f(x)|dx \leq (b-a)\|f\|_\infty \, .$$

Beweis.

Sei $f \in T([a,b])$ eine Treppenfunktion zur Zerlegung $Z : x_0 < \ldots < x_m$ dann gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)|dx &= \sum_{i=1}^m |f(\frac{x_{i-1}+x_i}{2})|(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \sum_{i=1}^m (x_i - x_{i-1}) = \|f\|_\infty (b-a) \, . \end{aligned}$$

$\square$

Theorem

Seien $f \in R([a,b])$, $f_n, g_n \in T([a,b])$, $n \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, $\|g_n - f\|_\infty \to 0$, $n \to \infty$, so konvergieren die Integrale und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)dx \ .$$

Beweis.

Es gilt für $n > m \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
& \left| \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx - \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_m(x)dx \right| \\
= \; & \left| \lim_{n\to\infty} \int_a^b (f_n(x) - f_m(x))dx \right| \\
\leq \; & \|f_n - f_m\|_\infty (b-a) \\
\leq \; & (b-a)(\|f_n - f\|_\infty + \|f - f_m\|_\infty) \to 0 \; n, m \to \infty \; .
\end{aligned}
$$

D.h. $\int_a^b f_n(x)dx \in \mathbb{R}$ ist eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$, und ist damit konvergent. Ebenso gilt dies analog für (g_n) und $n \to \infty$, und

$$
\left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b g_n(x)dx \right| \leq (b-a)(\|f_n - f\|_\infty + \|g_n - f\|_\infty) \to 0 \; .
$$

$\square$

Das Regelintegral

Definition

Sei $f_n \in T([a,b])$ eine gegen $f \in R([a,b])$ gleichmäßig konvergente Folge, dann definieren wir das bestimmte Integral von f über $[a,b]$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx \ .$$

Wie wir gesehen haben, ist dieses Integral für jede Regelfunktion f wohldefiniert, d.h. das Integral hängt nicht von der f approximierende Folge von Treppenfunktionen ab.

Theorem

Die Abb. $I : R([a,b]) \to \mathbb{R}; f \mapsto I(f) = \int_a^b f(x)dx$ *ist linear.*

Beweis.

Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $f, g \in R([a,b])$ und $f_n, g_n \in T([a,b])$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, $\lim_{n\to\infty} g_n = g$ bzgl. der $\|.\|_\infty$-Norm.

$$\begin{aligned} & \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx \\ = \quad & \lim_{n\to\infty} \int_a^b (\alpha f_n(x) + \beta g_n(x))dx \\ = \quad & \lim_{n\to\infty} \alpha \int_a^b f_n(x)dx + \lim_{n\to\infty} \beta \int_a^b g_n(x)dx \\ = \quad & \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx \,. \end{aligned}$$

$\square$

Das Regelintegral

Theorem

Sind $f, g \in R[a,b]$ *mit* $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a,b]$*, so ist*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \quad \textit{(Monotonie)}\ .$$

Sei $c \in (a,b)$*, so ist*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad \textit{(Additivität)}$$

Das Regelintegral

Beweis.

Wir approximieren $g - f$ durch Treppenfunktionen $g_n - f_n$,

$$\int_a^b (g(x) - f(x))dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b (g_n(x) - f_n(x))dx \geq 0 \ .$$

da $g_n(x) - f_n(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$.
Seien f_n Treppenfunktionen zu Zerlegungen Z_n, dann wählen wir eine Verfeinerung Z_n', die auch den Punkt $c \in (a, b)$ enthält.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx \quad = \quad \lim_{n\to\infty} I(f_n, Z_n') =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^c f_n(x)dx + \int_c^b f_n(x)dx \right) \quad = \quad \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \ .$$

$\square$

Das Regelintegral

Theorem (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Für alle $f \in R([a,b])$ gilt

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq (b-a)\|f\|_\infty \ .$$

Beweis.

Für $f_n \in T([a,b])$ gilt $\int_a^b f_n(x)dx \leq (b-a)\|f_n\|_\infty$ und für $n \to \infty$, mit $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$, folgern wir

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx \leq \lim_{n\to\infty} (b-a)\|f_n\|_\infty = (b-a)\|f\|_\infty \ .$$

$\square$

Theorem

Seien $f, f_n \in R([a,b])$ mit $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, $n \to \infty$, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx \ .$$

Beweis.

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert $g_n \in T([a,b])$ mit $\|f_n - g_n\|_\infty < \frac{1}{n}$,
Daher ist

$$\|f-g_n\|_\infty \leq \|f-f_n\|_\infty + \|f_n-g_n\|_\infty < \|f-f_n\|_\infty + \frac{1}{n} \to 0 \ , \ n \to \infty \ .$$

Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\|f - f_n\|_\infty < \frac{\epsilon}{2}$ und $n < \frac{\epsilon}{2}$, und $\|f - g_n\|_\infty < \epsilon$. Somit ist $f \in R([a,b])$, und nach Definition gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx \ .$$

Beweis-Fortsetzung.

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b g_n(x)dx\right| &= \left|\int_a^b (f_n(x) - g_n(x))dx\right| \\ \leq (b-a)\|f_n - g_n\|_\infty &< \frac{b-a}{n} \to 0\ ,\ n \to \infty\ . \end{aligned}$$

Daher folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)dx\ .$$

$\square$

Wir definieren

$$\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx \text{ und es gilt } \int_a^a f(x)dx = 0\ .$$

Theorem (Hauptsatz der Integralrechnung)

Ist $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f \in C^0([a,b])$, d.h. $F'(x) = f(x)$, dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) := F(x)|_{x=a}^b$$

Beweis.

Sei $\epsilon > 0$, und $g \in T[a,b]$ eine Treppenfunktion zur Zerlegung $Z : a = x_0 < \ldots < x_m = b$ mit $\|f - g\|_\infty < \epsilon$. Nach dem Mittelwertsatz existieren $\eta_i \in (x_{i-1}, x_i)$ mit

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \sum_{i=1}^m (F(x_i) - F(x_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^m (x_i - x_{i-1}) F'(\eta_i) = \sum_{i=1}^m (x_i - x_{i-1}) f(\eta_i) \,. \end{aligned}$$

Beweis-Fortsetzung.

Andererseits gilt $\int_a^b g(x)dx = \sum_{i=1}^m (x_i - x_{i-1})g(\eta_i)$. Daraus folgern wir

$$
\begin{aligned}
|\int_a^b g(x)dx - (F(a) - F(b))| &= |\sum_{i=1}^m (x_i - x_{i-1})(g(\eta_i) - f(\eta_i))| \\
\leq \|g - f\|_\infty \sum_{i=1}^m (x_i - x_{i-1}) &= (b-a)\|g - f\|_\infty = (b-a)\epsilon \ .
\end{aligned}
$$

Zudem ist

$$
|\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx| \leq (b-a)\|g - f\|_\infty = (b-a)\epsilon \ .
$$

□

Proof.

Fassen wir nun zusammen

$$
\begin{aligned}
& |\int_a^b f(x)dx - (F(a) - F(b))| \\
\leq \quad & |\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx| + |\int_a^b g(x)dx - (F(a) - F(b))| \\
< \quad & 2(b-a)\epsilon, \forall \epsilon > 0 \ .
\end{aligned}
$$

Da dies für alle $\epsilon > 0$ gelten muss, folgt die Behauptung. $\square$

Theorem (Integral-Darstellung des Restgliedes)

Sei $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ *und* $f \in C^{m+1}([a, b])$, *dann gilt beliebiges für* $x_0 \in (a, b)$

$$f(x) = T_m(x, x_0) + R_m(x, x_0)$$

mit dem Taylorpolynom

$$T_m(x, x_0) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

und dem Lagrangeschen Restglied

$$R_m(x, x_0) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(m+1)}(t)}{m!}(x - t)^m dt.$$

Beweis.

Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion.
Für $m = 0$ erhalten wir die Aussage

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)dt,$$

die äquivalent ist zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.
Wir nehmen nun an, dass die Behauptung für $m \in \mathbb{N}$ gilt, und zeigen, dass sie dann auch für $m + 1$ folgt. Es gelte also

$$f(x) = T_m(x, x_0) + R_m(x, x_0).$$

□

Beweis-Fortsetzung.

Definieren wir

$$\mathrm{F(t) := \frac{f^{(m+1)}(t)}{(m+1)!}(x-t)^{m+1}}$$

dann folgt

$$\mathrm{F'(t) = \frac{dF}{dt}(t) = \frac{f^{(m+2)}(t)}{(m+1)!}(x-t)^{m+1} - \frac{f^{(m+1)}(t)}{m!}(x-t)^{m}}$$

und daher ist

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_0) &= \int_{x_0}^{x} F'(t)dt \\ &= \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(m+2)}(t)}{(m+1)!}(x-t)^{m+1}dt - \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(m+1)}(t)}{m!}(x-t)^{m}dt \\ &= R_{m+1}(x,x_0) - R_m(x,x_0). \end{aligned}$$

$\square$

Beweis-Fortsetzung.

Es ergibt sich demnach die Beziehung

$$\mathrm{R_m(x, x_0) = R_{m+1}(x, x_0) + F(x_0)}.$$

Diese eingesetzt in die Induktionsvoraussetzung liefert

$$\begin{aligned} f(x) &= T_m(x, x_0) + \frac{f^{(m+1)}(x_0)}{(m+1)!}(x - x_0)^{m+1} + R_{m+1}(x, x_0) \\ &= T_{m+1}(x, x_0) + R_{m+1}(x, x_0). \end{aligned}$$

$\square$

Corollary (Partielle Integration)

Seien F *und* G *auf* $[a,b]$ *stetig differenzierbare Funktionen mit* $F' = f$ *und* $G' = g$ *dann sind* $f, g \in R([a,b])$, *und es gilt*

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)dx.$$

Proof.

Da f, g stetig sind sind sie auch Regelfunktionen. Setzen wir $H(x) = F(x)G(x)$, dann folgt die Behauptung direkt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$F(b)G(b) - F(a)G(a) = H(b) - H(a) = \int_a^b H'(x)dx$$
$$= \int_a^b F(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)G(x)dx.$$

Corollary (Partielle Integration)

Seien F *und* G *auf* $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ *stetig differenzierbare Funktionen mit* $\mathrm{F}' = \mathrm{f}$ *und* $\mathrm{G}' = \mathrm{g}$ *dann sind* $\mathrm{f}, \mathrm{g} \in \mathrm{R}([\mathrm{a}, \mathrm{b}])$*, und es gilt*

$$\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathrm{F}(\mathrm{x})\mathrm{g}(\mathrm{x})\mathrm{dx} = \mathrm{F}(\mathrm{b})\mathrm{G}(\mathrm{b}) - \mathrm{F}(\mathrm{a})\mathrm{G}(\mathrm{a}) - \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{G}(\mathrm{x})\mathrm{dx}.$$

Proof.

Da f, g stetig sind sind sie auch Regelfunktionen. Setzen wir $H(x) = F(x)G(x)$, dann folgt die Behauptung direkt aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{aligned} F(b)G(b) - F(a)G(a) = H(b) - H(a) &= \int_a^b H'(x)dx \\ &= \int_a^b F(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)G(x)dx. \end{aligned}$$

Theorem (Substitutionsregel)

Sei $\gamma : [a,b] \to [A,B]$ *eine monoton wachsende stetig differenzierbare Funktion. Ferner sei* $f \in C^0([A,B])$ $(R([A,B]))$*. Setzen wir*

$$g(y) := f \circ \gamma(y) = f\big(\gamma(y)\big),$$

dann ist $g \in C^0([a,b])$ $(R([a,b]))$ *und es gilt*

$$\int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\gamma(y))\gamma'(y)dy.$$

Beweis.

Nach Voraussetzungen sind $f \in R([A,B])$, $f \circ \gamma$ und γ' stetig und somit ist $y \mapsto f \circ \gamma(y)\gamma'(y) \in R[a,b]$. □

Theorem (Substitutionsregel)

Sei $\gamma : [a,b] \to [A,B]$ *eine monoton wachsende stetig differenzierbare Funktion. Ferner sei* $f \in C^0([A,B])$ $(R([A,B]))$. *Setzen wir*

$$g(y) := f \circ \gamma(y) = f\big(\gamma(y)\big),$$

dann ist $g \in C^0([a,b])$ $(R([a,b]))$ *und es gilt*

$$\int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\gamma(y))\gamma'(y)dy.$$

Beweis.

Nach Voraussetzungen sind $f \in R([A,B])$, $f \circ \gamma$ und γ' stetig und somit ist $y \mapsto f \circ \gamma(y)\gamma'(y) \in R[a,b]$. □

Beweis - Fortsetzung.

Sei $F : [A, B] \to \mathbb{R}$ eine Stammfuntkion von f, dann ist

$$\int_A^B f(x)dx = F(B) - F(A) = F(\gamma(b)) - F((\gamma(a)) \ .$$

Nach der Kettenregel gilt

$$\frac{d}{dy}F(\gamma(y)) \quad = \quad F'(\gamma(y))\gamma'(y) = f(\gamma(y))\gamma'(y) \ , \ y \in [a, b] \ .$$

$\square$

Corollary (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Sei $\mathrm{f} \in \mathrm{R}([\mathrm{a}, \mathrm{b}])$ *stetig, so gibt es ein* $\xi \in (\mathrm{a}, \mathrm{b})$ *mit*

$$\int_a^b f(x)dx = (b - a)f(\xi).$$

Das Regel-Integral $\int_a^b f(x)dx$ wurde entwickelt unter der doppelten Voraussetzung, dass sowohl die zu integrierende Funktion f als auch das Integrationsintervall $[a, b]$ beschränkt sind. Lässt man eine dieser beiden Voraussetzung fallen, verliert das Integral zunächst seinen Sinn. Es liegt jedoch auf der Hand, auch für unendliche Intervalle das Integral durch einen entsprechenden Grenzübergang zu definieren, etwa für beschränktes f, aber einem unbeschränkten Intervall

$$\int_a^{\infty} f(x)d\varphi(x) = \lim_{y\to\infty} \int_a^y f(x)d\varphi(x).$$

Integration über nichtkompakte Intervalle

Das Regel-Integral $\int_a^b f(x)dx$ wurde entwickelt unter der doppelten Voraussetzung, dass sowohl die zu integrierende Funktion f als auch das Integrationsintervall $[a, b]$ beschränkt sind. Lässt man eine dieser beiden Voraussetzung fallen, verliert das Integral zunächst seinen Sinn. Es liegt jedoch auf der Hand, auch für unendliche Intervalle das Integral durch einen entsprechenden Grenzübergang zu definieren, etwa für beschränktes f, aber einem unbeschränkten Intervall

$$\int_a^\infty f(x)d\varphi(x) = \lim_{y\to\infty} \int_a^y f(x)d\varphi(x).$$

Entsprechend wird verfahren, wenn das Intervall $I = [a, b]$ zwar beschränkt ist, die Funktion f jedoch unbeschränkt ist auf $[a, b]$. Nehmen wir an, dass f im Punkt $c \in [a, b]$ unbeschränkt ist, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)d\varphi(x) &= \int_a^c f(x)d\varphi(x) + \int_c^b f(x)d\varphi(x)\\ &= \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)d\varphi(x) + \lim_{\varepsilon' \to 0+} \int_{c+\varepsilon'}^b f(x)d\varphi(x).\end{aligned}$$

Integration über nichtkompakte Intervalle

Definition

Eine Funktion $f : (a, b] \to \mathbb{R}$,$a \in \mathbb{R}$ oder $a = -\infty$, ($f : [a, b) \to \mathbb{R}$ analog,) heißt uneigentlich integrierbar, falls der linkseitige Grenzwert

$$\lim_{\alpha \to a, a < \alpha} \int_\alpha^b f(x)dx =: \int_a^b f(x)dx$$

existiert. $x \mapsto f(x)$ heißt absolut uneigentlich integrierbar, falls $x \mapsto |f(x)|$ uneigentlich integrierbar ist.

Integration über nichtkompakte Intervalle

Theorem

Seien $f, g : [a, b) \to \mathbb{R}$. Falls $|g(x)| \leq f(x), \forall x \in (a, b]$ gilt, und f uneigentlich integrierbar ist, so ist auch g uneigentlich integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b |g(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \; .$$

Proof.

Seien $G(\alpha) := \int_\alpha^b |g(x)|dx$, $F(\alpha) := \int_\alpha^b f(x)dx$, $\alpha < b$, dann gilt auf Grund der Monotonie $0 \leq G(\alpha) \leq F(\alpha) \leq F(a)$, und $\alpha \mapsto G(\alpha)$ ist monoton und beschränkt. Somit existiert $\lim_{\alpha \to a} G(\alpha)$, und es folgt d daraus auch die restliche Behauptung. $\square$

Integration über nichtkompakte Intervalle

Theorem

Sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ eine monoton fallende Funktion, seen $|\delta_n| :\leq \int_n^{n+1} f(x)dx, \forall x \in [n, n+1], n \in \mathbb{N}$. Falls das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x)dx$ existiert. Dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \delta_n$ absolut, und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\delta_n| \leq \int_1^\infty f(x)dx \ .$$

Proof.

Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} |\delta_n| &= \sum_{n=1}^{\infty} |\delta_n|(n+1-n) = \int_1^\infty \delta_n \chi_{[n,n+1]}(x)dx \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)dx = \int_1^\infty f(x)dx \ .
\end{aligned}$$

Example

Wir betrachten das Integral $\int_0^a x^\alpha dx$ für beliebiges $a > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir finden

$$\begin{aligned}
\int_0^a x^\alpha dx &= \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^a x^\alpha dx \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0+} \begin{cases} (\alpha+1)^{-1}(a^{\alpha+1} - \varepsilon^{\alpha+1}), & \alpha \neq -1 \\ \ln a - \ln \varepsilon, & \alpha = -1, \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1}, & \alpha > -1, \\ \infty, & \alpha \leq -1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Integration über nichtkompakte Intervalle

Example

Hingegen kehrt sich die Situation für das Integral $\int_a^\infty x^\alpha dx$ um

$$\int_a^\infty x^\alpha dx = \lim_{y\to\infty} \int_a^y x^\alpha dx$$

$$= \lim_{y\to\infty} \begin{cases} (\alpha+1)^{-1}(y^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}), & \alpha \neq -1 \\ \ln y - \ln a, & \alpha = -1, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1}, & \alpha < -1, \\ \infty, & ,\alpha \geq -1. \end{cases}$$

Theorem (Approximationssatz von Weierstraß)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *bzw.* $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ *stetig. Dann existiert eine Folge von Polynomen* p_n*, die auf* $[a, b]$ *gleichmäßig gegen* f *konvergiert. Falls* f *reellwertig ist, können auch die* p_n *reell gewählt werden.*

Beweis.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $[a, b] = [0, 1]$. Wir können annehmen, dass $f(0) = f(1) = 0$. Ist nämlich der Satz in diesem Fall bewiesen, so betrachten wir die Funktion

$$g(x) := f(x) - f(0) - x\big(f(1) - f(0)\big), \qquad 0 \leq x \leq 1.$$

Hierfür gilt $g(0) = 0 = g(1)$ und wenn g sich als Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge von Polynomen darstellen lässt, so gilt offensichtlich dasselbe auch für *f*, da $f - g$ ein Polynom ist.
Wir definieren ferner $f(x) = 0$ außerhalb $[0, 1]$, d.h. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bzw. $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$\square$

Beweis-Fortsetzung.

Wir definieren für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$q_n(x) = c_n(1 - x^2)^n$$

mit

$$c_n = \left(\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n dx \right)^{-1},$$

d.h. es gilt

$$\int_{-1}^{1} q_n(x) dx = 1.$$

$\square$

Beweis-Fortsetzung.

Mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung

$$(1 - x^2)^n \geq 1 - nx^2, \qquad |x| \leq 1,$$

können wir c_n abschätzen

$$\frac{1}{c_n} = \int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n dx = 2 \int_0^1 (1 - x^2)^n dx \geq 2 \int_0^{1/\sqrt{n}} (1 - x^2)^n dx$$

$$\geq 2 \int_0^{1/\sqrt{n}} (1 - nx^2) dx = \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{2n}{3(\sqrt{n})^3} = \frac{4}{3\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

dies bedeutet

$$c_n \leq \sqrt{n}. \tag{1}$$

$\square$

Beweis-Fortsetzung.

Für $0 < \delta \leq |x| \leq 1$ gilt somit

$$q_n(x) \leq c_n(1-\delta^2)^n \leq \sqrt{n}(1-\delta^2)^n \ \rightarrow 0\,, n \rightarrow \infty\,,$$

dies bedeutet, q_n konvergiert gleichmäßig gegen 0 auf $\{x : \delta \leq |x| \leq 1\}$.
Wir betrachten nun für $x \in [0,1]$,

$$p_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x+t)q_n(t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(x+t)q_n(t)dt = \int_0^1 f(t)q_n(t-x)dt.$$

Offensichtlich ist p_n ein Polynom vom Grade $2n$, insbesondere ist $p_n(x)$ reell, falls f reellwertig ist.
Wir setzen $M := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| < \infty$ und sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Da $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ kompakt ist, ist $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. □

Beweis-Fortsetzung.

Daher existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|\mathrm{f(x)} - \mathrm{f(y)}| < \varepsilon/2$$

sogar für alle $|\mathrm{x} - \mathrm{y}| < \delta$, da $f(x) = 0$ für alle $x \notin (0,1)$. Wegen $\mathrm{q_n(x)} \geq 0$ auf $[0,1]$ folgt für jedes $\mathrm{x} \in [0,1]$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|\mathrm{p_n(x)} - \mathrm{f(x)}| &= \left| \int_{-1}^{1} \big(f(x+t) - f(x)\big) q_n(t)dt \right| \\
&\leq \int_{-1}^{1} |f(x+t) - f(x)| q_n(t)dt \\
&\leq 2M \int_{-1}^{-\delta} q_n(t)dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} q_n(t)dt + 2M \int_{\delta}^{1} q_n(t)dt \\
&\leq 4M\sqrt{n}(1-\delta^2)^n + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

für hinreichend großes n. q.e.d. □