Berlin 21. 7. 34.

Lieber Herr Doktor!

Sie haben ganz recht. Schon für $3 \leq n < 6$ hat nicht jede Lösung der Gleichung $MM' = M'M$ die Form

(1) $M_1 = \sum\limits_{\lambda} f_\lambda C_\lambda$,

wobei die C_λ untereinander vertauschbare konstante Matrizen sind. Man hat noch den Typus

(2) $M_2 = (f_\alpha g_\beta)$ $\quad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots n)$

hervorzuheben, wo $f_1, \dots f_n, g_1, \dots g_n$ beliebige Funktionen sind, die den Bedingungen

$$\sum_\alpha f_\alpha g_\alpha = \sum_\alpha f'_\alpha g_\alpha = 0, \text{ also auch } \sum_\alpha f_\alpha g'_\alpha = 0$$

genügen. In diesem Falle wird $M^2 = MM' = M'M = 0$.

Hierzu kommt dann noch der Typus

(3) $M_3 = \varphi E + M_2$ $\quad$ (M_2 vom Typus (2))

Aus meinen alten Notizen, die ich in der Vorlesung nicht richtig wiedergegeben habe, geht hervor, daß für $n < 6$ jede Lösung von $MM' = M'M$ durch eine konstante Ähnlichkeitstransformation in Matrizen vom Typus (1) oder (3) vollständig zerfällt werden kann. Erst für $n = 6$ gibt es noch andere Fälle.

Dies scheint richtig zu sein. Ich habe aber meine recht mühsamen Rechnungen (für $n = 4$ und $n = 5$) nicht nachgeprüft.

Daß man sich auf den Fall beschränken kann, in dem M nur die eine char. Wurzel 0 besitzt, schloß ich damals einfach so. Besitzt M zwei verschiedene char. Wurzeln, so kann man eine g. rat. Funktion N von M angeben, für die ~~M~~ $N^2 = N$ wird, ohne daß $N = \varphi E$ wird. Auch N ist mit N' vertauschbar. Aus $N^2 = N$ folgt aber $2NN' = N'$, also $2N^2N' = 2NN' = NN'$. Das gibt $2NN = N' = 0$, d. h. N ist konstant. Man kann nun auf M eine konstante Ähnlichkeitstransformation anwenden, sodaß an Stelle von N eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ tritt. Dies zeigt, daß M mit Hilfe einer konst. Ähnlichkeitstransf. ~~..~~ vollständig zerfällt werden kann.

Man wird auf den Typus (2) geführt, indem man den Fall $M^2 = 0$, $Rg\,M = 1$ studiert. Schon für $n = 4$ kommen noch die Fälle $M^2 = 0$, $Rg\,M = 2$, $M^3 = 0$ in betracht.

Der Typus (1) ist vollständig dadurch charakterisiert, daß $M, M', M'', \ldots$ untereinander vertauschbar sind. Dies ist nicht nur notwendig sondern auch hinreichend. Denn sind unter den n^2 Koeffizienten f_{ik} von M genau r im Gebiete der Konstanten linear unabhängig, so kann man

$$M = f_1 C_1 + \cdots + f_r C_r \qquad (C_s \text{ konstante Matrix})$$

schreiben, wobei $f_1, \ldots f_r$ keiner Gleichung $\sum_1 \text{const.} f_\alpha = 0$ genügen. Dann wird

$$M^{(\nu)} = f_1^{(\nu)} C_1 + \cdots + f_r^{(\nu)} C_r \qquad (\nu = 0, 1, \ldots r-1)$$

Da die Wronskische Det. $\begin{vmatrix} f_1 & \cdots & f_r \\ f_1' & \cdots & f_r' \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$ nicht identisch verschwinden darf, erhält man Gleichungen der Form

$$C_s = \sum_{\sigma=0}^{r-1} \varphi_{s\sigma} M^{(\sigma)}.$$

Sind $M, M', \ldots M^{(r-1)}$ untereinander vertauschbar, so gilt dasselbe auch für $C_1, \ldots C_r$, M ist also vom Typus (1).

Hieraus folgt zugleich, daß M dem Typus (1) angehört, wenn M^n die höchste Potenz von M ist die gleich Null wird. Im Falle $n = 3$ hat man daher nur noch den Typus (2) zu berücksichtigen.

Mit vielen Grüßen

Ihr Schur