Lineare Algebra WS 2009/10

Wiederholungsklausur

Name: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

- Tragt auf jeder Seite bitte leserlich Euren Namen und Eure Matrikelnummer ein.
- Diese Klausur besteht aus zwei Teilen. Der erste Teil ist ein Ankreuzteil. Dort soll in die Kästchen entweder $\boxed{\text{w}}$ eingetragen werden, falls die nebenstehende Aussage wahr ist, oder $\boxed{\text{f}}$, falls die nebenstehende Aussage falsch ist.
- Im Ankreuzteil ergibt jede
  - richtige Antwort 1 Punkt,
  - eine falsche Antwort -1 Punkt und
  - leer gelassene Kästchen 0 Punkte.
- Falls im Ankreuzteil Verbesserungen vorgenommen werden sollen, dann streicht die zu verbessernde Antwort durch und zeichnet neben das alte Kästchen ein weiteres für die neue Antwort. Undeutliche Bewertungen werden als **nicht korrekt beantwortet** interpretiert und entsprechend mit -1 Punkt gewertet.
- Um diese Klausur zu bestehen, müssen in beiden Teilen mindestens 50% der möglichen Punkte erlangt werden.
- Es sind **keine** Hilfsmittel außer einem Stift zugelassen. Schmierpapier findet Ihr am Platz, falls mehr benötigt wird, meldet Euch.
- Die Bearbeitungsdauer dieser Klausur beträgt 90 Minuten.
- Notizen auf dem Schmierpapier werden **nicht** gewertet.

VIEL ERFOLG!

Name: ____________________

Matrikelnummer: ____________________

ANKREUZTEIL

Sei im Folgenden K ein Körper und V, W seien K-Vektorräume.

☐ Seien a und b Aussagen. Die Negation der Aussage $a \Rightarrow b$ ist $a \wedge \neg b$.

☐ Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und S_n die symmetrische Gruppe zum Index n. Dann sind die Mengen

$$A_n = \{\pi \in S_n \,:\, \operatorname{sgn}(\pi) = 1\} \quad \text{und} \quad S_n - A_n = \{\pi \in S_n \,:\, \operatorname{sgn}(\pi) = -1\}$$

Untergruppen von S_n.

☐ Es gibt einen Körper L mit $\mathbb{Q} \subsetneq L \subsetneq \mathbb{R}$.

☐ Sei X eine endliche Menge. Dann ist der $\mathbb{F}_2$-Vektorraum der Abbildungen $\{f \mid f : X \longrightarrow \mathbb{F}_2\}$ endlich-dimensional.

☐ Sei U ein Untervektorraum von V und $X = (x_1, \ldots, x_n)$ eine Basis von V. Dann gibt es eine Teilfamilie von X, die eine Basis von U darstellt.

☐ Sei $\dim_K(V) = n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Dann lässt sich V als direkte Summe von n 1-dimensionalen Untervektorräumen von V darstellen.

☐ Sei $f : V \longrightarrow W$ ein Isomorphismus. Dann ist f^{-1} eine lineare Abbildung von W nach V.

☐ Betrachte den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathcal{S}$ der reellen stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0, 1]$, d. h.

$$\mathcal{S} = \{f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}.$$

Dann ist die Abbildung

$$f \mapsto \int_0^1 f(x)dx$$

linear.

☐ Für den Quotientenraum $V/\{0\}$ gilt

$$V/\{0\} \cong V.$$

☐ Sei $\dim_K(V) < \infty$. Dann gilt $\dim_K(V) = \dim_K(V^*)$.

Name: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

☐ Es sei $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und es bezeichne $\operatorname{rg}_z(A)$ den Zeilenrang einer Matrix $A \in K^{n\times m}$ und $\operatorname{rg}_s(A)$ analog den Spaltenrang. Dann gilt für jede Matrix $A \in K^{n\times m}$, dass $\operatorname{rg}_z(A) = \operatorname{rg}_s(A)$.

☐ Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und $A, E \in K^{n\times n}$, wobei E die Einheitsmatrix darstelle. Dann gilt

$$A \in \mathrm{GL}(n, K) \quad\Longrightarrow\quad \exists B \in \mathrm{GL}(n, K) : A \cdot B = E.$$

☐ Ein homogenes lineares Gleichungssystem besitzt immer eine Lösung.

☐ Jede multilineare Abbildung ist insbesondere linear.

☐ Für $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ und $A \in K^{n\times n}$ gilt

$$\det(A) \neq 0 \quad\Longleftrightarrow\quad A \text{ invertierbar}.$$

☐ Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und $A \in \mathrm{GL}(n, K)$. Dann gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^{\mathrm{ad}}.$$

Name: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

BEWEIS- UND RECHENTEIL

Aufgabe 1: (10 Punkte) Betrachte $\mathbb{R}^3$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum zusammen mit den Unterräumen

$$U = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle \qquad \text{und} \qquad V = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Untersuche und begründe, ob U und V den $\mathbb{R}^3$ als direkte Summe darstellen.

Name: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Aufgabe 2: (25 Punkte) Betrachte $\mathbb{R}^4$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum zusammen mit den Basen

$$X = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right) \qquad \text{und} \qquad Y = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

(i) Berechne die Matrix des Basiswechsels $A_{id,X,Y}$. **(10 Punkte)**

(ii) Sei $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ eine lineare Abbildung, deren darstellende Matrix **(15 Punkte)**

$$A_{f,X,X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ist. Berechne mit Hilfe von (i) die darstellende Matrix bzgl. Y, d. h. $A_{f,Y,Y}$.

Name: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Name: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Aufgabe 3: (15 Punkte) Sei $A = (\alpha_{ij})_{i,j} \in K^{n \times n}$ mit $\alpha_{ij} = 0$ für $i > j$, A ist also eine obere Dreiecksmatrix. Beweise, dass $\det(A) = \alpha_{11} \cdots \alpha_{nn}$ gilt.