Lineare Algebra WS 2009/10

Kurztest 2

Name: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

- Tragt auf jeder Seite bitte leserlich Euren Namen und Eure Matrikelnummer ein.
- Dieser Kurztest besteht aus zwei Teilen, einem Definitionsteil und einem Ankreuzteil.
- Im Definitionsteil sollen Begriffe exakt definiert werden.
- Im Ankreuzteil soll in die Kästchen entweder $\boxed{\text{w}}$ eingetragen werden, falls die nebenstehende Aussage wahr ist, oder $\boxed{\text{f}}$, falls die nebenstehende Aussage falsch ist.
- Im Ankreuzteil ergibt jede
  - richtige Antwort 1 Punkt,
  - eine falsche Antwort -1 Punkt und
  - leergelassene Kästchen 0 Punkte.
- Falls im Ankreuzteil Verbesserungen vorgenommen werden sollen, dann streicht die zu verbessernde Antwort durch und zeichnet neben das alte Kästchen ein weiteres für die neue Antwort.
- Um den Kurztest zu bestehen, müssen in beiden Teilen mindestens 50% der möglichen Punkte erlangt werden.
- Es sind **keine** Hilfsmittel außer einem Stift zugelassen. Schmierpapier findet Ihr am Platz, falls mehr benötigt wird, meldet Euch.
- Die Bearbeitungsdauer des Kurztests beträgt 45 Minuten.

DEFINITIONSTEIL

Gib zu den folgenden Begriffen die Definition oder eine äquivalente Formulierung an, wie in der Vorlesung präsentiert oder dem Buch von Bosch angegeben. Dabei sollten alle Voraussetzungen formuliert werden, wobei Begriffe wie z. B. Menge, Abbildung, Körper, Vektorraum, Matrix . . . , die zur Definition benötigt werden, als bekannt vorausgesetzt werden dürfen.

Sei K ein Körper und V, W K-Vektorräume. Definiere den Begriff „**K-Homomorphismus von V nach W**“. 3 Punkte

Name: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Seien K ein Körper, V, W K-Vektorräume und $f : V \longrightarrow W$ ein K-Homomorphismus. Definiere die Begriffe „**Kern**“ und „**Bild**“ von f. 2 Punkte

Definiere den Begriff „**transponierte Matrix**“. 3 Punkte

ANKREUZTEIL

Es gelte für den Ankreuzteil: K ist ein Körper und V, W sind K-Vektorräume.

☐ $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto 42$ ist $\mathbb{R}$-linear.

☐ $f : V \longrightarrow W$ ist genau dann ein Epimorphismus, wenn $\ker f = V$.

☐ Sei $f : V \longrightarrow W$ K-linear. Dann gilt $f(0) = 0$ und $f(-v) = -f(v)$ für alle $v \in V$.

Name: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

☐ $f : V \longrightarrow W$ ist genau dann K-linear, wenn für alle $\alpha, \beta \in K$ und alle $u, v \in V$ die Gleichung $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$ gilt.

☐ Ist V endlich-dimensional, so existiert ein $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, sodass V und K^n isomorph sind.

☐ Sei $f : V \longrightarrow V$ ein Endomorphismus. Dann gilt $V = \ker(f) + \operatorname{im}(f)$.

☐ Sei $f : V \longrightarrow W$ K-homomorph. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) f ist ein Monomorphismus.

(ii) f ist ein Epimorphismus.

(iii) f ist ein Isomorphismus.

☐ Sei $f : V \longrightarrow W$ K-linear. Dann gilt $V/\ker f \cong W$.

☐ Jeder affine Unterraum ist auch ein Vektorraum.

☐ Sei $f : V \longrightarrow W$ K-linear. Es bezeichne f^* die zu f duale Abbildung. Dann gilt:

$$f \text{ ist ein Monomorphismus} \quad \Longrightarrow \quad f^* \text{ ist ein Epimorphismus}$$

☐ Im Vektorraum der Polynome in X vom Grad ≤ 2 besitzt $p(X) = X^2 - X + 1$ bezüglich der Basis $(1, X - 1, (X - 1)^2)$ den Koordinatenvektor $(1, 1, 1)$.

☐ Betrachte die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \longmapsto (2x, 4x - y, 2x + 3y - z)$. Die darstellende Matrix von f bezüglich der kanonischen Basen ist

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

☐ Sei V n-dimensional und W m-dimensional, wobei $n, m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Dann gilt

$$\operatorname{Hom}_K(V, W) \cong K^{m \times n}.$$

Name: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

☐ Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und $A, B \in K^{n\times n}$. Dann gilt $A \cdot B = B \cdot A$.

☐ Seien $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Für jede Matrix $A \in K^{m\times n}$ ist der Spaltenrang gleich dem Zeilenrang.

☐ Seien $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\alpha \in K$ und $A, B \in K^{m\times n}$. Dann gilt $(A+B)^t = A^t + B^t$ und $(\alpha A)^t = \alpha A^t$.

☐ Sei $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Alle Matrizen in $\mathrm{Gl}(n, K)$ sind invertierbar.

☐ Sei $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $A \in K^{m\times n}$ und $b \in K^m$. Der Lösungsraum des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ ist ein Untervektorraum von K^n.

☐ Sei $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $A \in K^{m\times n}$ und $b \in K^m$. Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ ist genau dann lösbar, wenn $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A, b)$ gilt.

☐ Seien

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{und} \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Dann besitzen die linearen Gleichungssystem $Ax = b$ und $SAx = Sb$ dieselben Lösungen.