Lineare Algebra WS 2009/10

Klausur

Name: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

- Tragt auf jeder Seite bitte leserlich Euren Namen und Eure Matrikelnummer ein.
- Diese Klausur besteht aus zwei Teilen. Der erste Teil ist ein Ankreuzteil. Dort soll in die Kästchen entweder $\boxed{\text{w}}$ eingetragen werden, falls die nebenstehende Aussage wahr ist, oder $\boxed{\text{f}}$, falls die nebenstehende Aussage falsch ist.
- Im Ankreuzteil ergibt
  - jede richtige Antwort 1 Punkt,
  - eine falsche Antwort -1 Punkt und
  - leer gelassene Kästchen 0 Punkte.
- Falls im Ankreuzteil Verbesserungen vorgenommen werden sollen, dann streicht die zu verbessernde Antwort durch und zeichnet neben das alte Kästchen ein weiteres für die neue Antwort. Undeutliche Bewertungen werden als **nicht korrekt beantwortet** interpretiert und entsprechend mit -1 Punkt gewertet.
- Um die Klausur zu bestehen, müssen in beiden Teilen mindestens 50% der möglichen Punkte erlangt werden.
- Um zur Wiederholungsklausur zugelassen zu werden, müssen in beiden Teilen mindestens 25% der möglichen Punkte erlangt werden.
- Es sind **keine** Hilfsmittel außer einem Stift zugelassen. Schmierpapier findet Ihr am Platz, falls mehr benötigt wird, meldet Euch.
- Die Bearbeitungsdauer der Klausur beträgt 90 Minuten.
- Notizen auf dem Schmierpapier werden **nicht** gewertet.

VIEL ERFOLG!

Name: ______________________

Matrikelnummer: ______________________

ANKREUZTEIL

Sei im Folgenden K ein Körper und V, W seien K-Vektorräume.

☐ Seien a und b Aussagen. Dann gilt $a \vee (b \wedge a) = a$.

☐ Sei X eine Menge und G die Menge aller surjektiven Selbstabbildungen $X \longrightarrow X$. Dann ist G zusammen mit der Hintereinanderausführung $\circ$ von Abbildungen eine Gruppe.

☐ Jeder Vektorraum besitzt eine unendliche Anzahl von Vektoren.

☐ Sei $f : V \longrightarrow W$ eine K-lineare Abbildung. Dann gilt $\dim V = \operatorname{rg} f$.

☐ Man kann jeden Vektor $v \in \mathbb{R}^2$ durch einen weiteren zu einer Basis ergänzen.

☐ Zwei Ebenen (2-dimensionale Unterräume) im $\mathbb{R}^4$ können sich in genau einem Punkt schneiden.

☐ Man kann den K^{276} darstellen als eine direkte Summe der Form

$$K^{276} = \bigoplus_{k=1}^{23} U_k,$$

wobei für $k \in \{1, \ldots, 23\}$ gilt: U_k ist ein Untervektorraum von K^{276} und $\dim(U_k) = k$.

☐ Seien $v_1, \ldots, v_k \in V$ linear unabhängig und sei $f : V \longrightarrow W$ K-linear und surjektiv. Dann sind $f(v_1), \ldots, f(v_k)$ linear unabhängig in W.

☐ Der Kern einer linearen Abbildung f ist die Faser von f über 0.

☐ Sei U ein Untervektorraum von V. Dann gilt $\dim_K(V/U) \leq \dim_K(V)$.

Name: ____________________

Matrikelnummer: ____________________

☐ Sei $X = \left(\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & i \\ i & i \end{bmatrix} \right)$ eine Basis von $\mathbb{C}^{2\times 2}$. Die darstellende Matrix $A_{f,X,X}$ von

$$f : \mathbb{C}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{C}^{2\times 2}, \quad A \longmapsto \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} A$$

ist

$$A_{f,X,X} = \begin{bmatrix} -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}.$$

☐ Sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Dann existiert eine Matrix $S \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{R})$, sodass

$$SA = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ 0 & 1 & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

wobei $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ gilt.

☐ Sei A eine Matrix aus $K^{n\times n}$. Dann gilt:

$Ax = 0$ besitzt genau eine Lösung.

$\Longleftrightarrow A \in \mathrm{GL}(n, K)$.

☐ Es gelte $n := \dim(V) < \infty$ und Δ sei eine Determinantenfunktion auf V. Dann gilt für alle Permutationen $\sigma \in S_n$ und alle $v_1, \ldots, v_n \in V$:

$$\Delta(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}) = \Delta(v_1, \ldots, v_n).$$

☐ Es gelte $n := \dim(V) < \infty$ und M sei die Menge aller Determinantenfunktionen auf V. Dann ist M ein K-Vektorraum der Dimension 1.

☐ Sei $A := \begin{bmatrix} -1 & 3 & 5 & 1 & -7 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 4 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$. Dann gilt $\det(A) = 120$.

Name: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

BEWEIS- UND RECHENTEIL

Aufgabe 1: (16 Punkte) Seien $(G, *)$ und $(H, \circ)$ Gruppen. Für eine Abbildung $f : G \longrightarrow H$ gelte für alle $x, y \in G$

$$f(x * y) = f(x) \circ f(y).$$

(i) Man gebe die Axiome für die Definition eine Gruppe an. **(6 Punkte)**

(ii) Man beweise *nur mit Hilfe dieser Axiome*, dass $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ für alle $x \in G$ gilt, und gebe in jedem Schritt das verwendete Axiom an. **(10 Punkte)**

Name: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Aufgabe 2: (30 Punkte) Sei K ein Körper, in dem $1+1 \neq 0$ gilt, und $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Jede Matrix $A \in K^{n \times n}$ kann als

$$A = \underbrace{\tfrac{1}{2}(A + A^t)}_{B} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(A - A^t)}_{C}$$

dargestellt werden (muss *nicht* bewiesen werden). Zeige:

(i) B ist symmetrisch, d. h. $B = B^t$, und C ist schiefsymmetrisch, d. h. $C = -C^t$. **(10 Punkte)**

(ii) $U := \{M \in K^{n \times n} : M \text{ symmetrisch}\}$ und $V := \{M \in K^{n \times n} : M \text{ schiefsymmetrisch}\}$ sind Untervektorräume von $K^{n \times n}$. **(10 Punkte)**

(iii) $K^{n \times n} = U \oplus V$. **(10 Punkte)**

Name: ______________________________

Matrikelnummer: ______________________________

Name: ____________________

Matrikelnummer: ____________________

Aufgabe 3: (16 Punkte) Betrachte den $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^4$, die lineare Abbildung

$$f : \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}^4, \quad (z_1, z_2, z_3, z_4) \longmapsto (2z_1 + z_4, z_3, z_2, (1+i)z_4),$$

und die Basis

$$X = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ i^2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i^3 \end{bmatrix} \right).$$

(i) Berechne $A_{f,X,X}$. **(10 Punkte)**

(ii) Überprüfe, ob f eine der folgenden Eigenschaften besitzt: **(6 Punkte)**

- Injektivität
- Surjektivität
- Bijektivität