

Lösung von Aufgabe 4

Übungsblatt 9

Aufgabe 4: Sei $0 \longrightarrow V' \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} V'' \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von K -Vektorräumen. Zeige, dass eine solche Sequenz stets *spaltet*, d. h. dass es eine K -lineare Abbildung $\hat{g} : V'' \longrightarrow V$ mit $g \circ \hat{g} = id_{V''}$ gibt. Mit einer solchen Abbildung \hat{g} gilt Folgendes:

- (i) \hat{g} ist injektiv, und es gilt $V = \ker g \oplus \text{im } \hat{g}$ bzw. $V = V' \oplus V''$, wenn wir V' unter f mit $\ker g = \text{im } f$ identifizieren und entsprechend V'' unter \hat{g} mit $\text{im } \hat{g}$.
- (ii) Es existiert eine eindeutig bestimmte K -lineare Abbildung $\hat{f} : V \longrightarrow V'$ mit $\hat{f} \circ f = id_{V'}$ und $\hat{f} \circ \hat{g} = 0$.
- (iii) Die Sequenz $0 \longleftarrow V' \xleftarrow{\hat{f}} V \xleftarrow{\hat{g}} V'' \longleftarrow 0$ ist exakt.

Lösung. Wir beginnen damit, die Existenz der Abbildung $\hat{g} : V'' \longrightarrow V$ zu beweisen. Wähle hierfür ein Komplement U zu $\ker g$ in V , d. h. $V = \ker g \oplus U$. Die Einschränkung $g|_U$ von g auf U ist injektiv, da für alle $u_1, u_2 \in U$ aus $g|_U(u_1) = g|_U(u_2)$ direkt $g|_U(u_1 - u_2) = 0$, also $u_1 - u_2 \in \ker g \cap U = \{0\}$, folgt. Aus der Exaktheit der Sequenz folgt die Surjektivität von $g|_U$, insgesamt ist $g|_U$ also isomorph. Die Umkehrfunktion

$$\hat{g} := g|_U^{-1} : V'' \longrightarrow U \subseteq V$$

ist deshalb K -linear (Bem. 2.1/2) und es gilt für alle $a \in V''$:

$$(g \circ \hat{g})(a) = g(\hat{g}(a)) = g(g|_U^{-1}(a)) = a,$$

also $g \circ \hat{g} = id_{V''}$.

(i) Es reicht nicht, die Eigenschaften nur für die konstruierte Funktion \hat{g} zu beweisen, da wir lediglich Existenz, aber nicht Eindeutigkeit nachgewiesen haben. Sei also $\hat{g} : V'' \longrightarrow V$ eine beliebige Abbildung, die obige Eigenschaften besitzt. Dann folgt aus $\hat{g}(v''_1) = \hat{g}(v''_2)$ die Gleichung $g(\hat{g}(v''_1)) = g(\hat{g}(v''_2))$, also $v''_1 = v''_2$. Um die Zerlegung von V zu beweisen, wähle $v \in V$. Dann gilt $v = (v - \hat{g}(g(v))) + \hat{g}(g(v))$, wobei

$$v - \hat{g}(g(v)) \in \ker g$$

gilt, und weshalb $V = \ker g + \text{im } \hat{g}$ folgt. Dass diese Summe direkt ist, sieht man ebenfalls schnell ein: Für $v \in \ker g \cap \text{im } \hat{g}$ existiert ein $v'' \in V''$ mit $v = \hat{g}(v'')$. Wendet man g auf beide Seiten an, erhält man wie gewünscht $0 = v''$.

(ii) Aus der Exaktheit der Sequenz folgt $\text{im } f = \ker g$, also gilt mit obigem Komplement $V = \text{im } f \oplus U$. Weiterhin gilt aufgrund der Exaktheit, dass f injektiv ist, die Abbildung $f : V' \longrightarrow \text{im } f$ also bijektiv. Wir können jedes $v \in V$ entsprechend der direkten

Summenzerlegung von V als $v = a + u$ schreiben, wobei $a \in \text{im } f$ und $u \in U$. Wir definieren

$$\hat{f}: V \longrightarrow V', \quad a + u \mapsto f^{-1}(a).$$

Da jede Zerlegung der Form $v = a + u$ eindeutig bestimmt ist, folgt die Wohldefiniertheit von \hat{f} . Die Linearität von \hat{f} folgt ebenfalls aus Bemerkung 2.1/2 zusammen mit der Eindeutigkeit der Vektorzerlegung. Sind nämlich $v = a + u_1$ und $w = b + u_2$ Zerlegungen bzgl. der direkten Summe, so muss $v + w = (a + b) + (u_1 + u_2)$ die Zerlegung von $v + w$ sein.

Es gilt dann also $\hat{f}(v + w) = \hat{f}((a + b) + (u_1 + u_2)) = f^{-1}(a + b) \stackrel{2.1/2}{=} f^{-1}(a) + f^{-1}(b) = \hat{f}(a + u_1) + \hat{f}(b + u_2) = \hat{f}(v) + \hat{f}(w)$. Für $\alpha \in K$ und obiges $v = a + u$ gilt weiter $\hat{f}(\alpha v) = \hat{f}(\alpha a + \alpha u) = f^{-1}(\alpha a) \stackrel{2.1/2}{=} \alpha f^{-1}(a) = \alpha \hat{f}(a)$. Die Gleichungen $\hat{f} \circ f = \text{id}_{V'}$ und $\hat{f} \circ \hat{g} = 0$ sind klar.

(iii) Nach (i) ist \hat{g} injektiv. Aus der Konstruktion in (ii) folgt die Surjektivität von \hat{f} . Weiterhin folgt aus der Gleichung $\hat{f} \circ \hat{g} = 0$ in (ii), dass $\text{im } \hat{g} \subseteq \ker \hat{f}$. Da $\ker \hat{f} = U$, gilt aber auch $\ker \hat{f} \subseteq \text{im } \hat{g}$. Die Sequenz $0 \longleftarrow V' \xleftarrow{\hat{f}} V \xleftarrow{\hat{g}} V'' \longleftarrow 0$ ist also kurz und exakt.