

Lineare Algebra

Kurztest

Name: _____

Matrikelnummer: _____

- Tragt auf jeder Seite bitte leserlich Euren Namen und Eure Matrikelnummer ein.
- Dieser Kurztest besteht aus zwei Teilen. Der erste Teil ist ein Bewertungsteil. Dort soll in die Kästchen entweder w eingetragen werden, falls die nebenstehende Aussage wahr ist, oder f, falls die nebenstehende Aussage falsch ist.
- Im Bewertungsteil ergibt
 - jede richtige Antwort 1 Punkt,
 - eine falsche Antwort -1 Punkt und
 - leer gelassene Kästchen 0 Punkte.
- Falls im Bewertungsteil Verbesserungen vorgenommen werden sollen, dann streicht die zu verbessernde Antwort durch und zeichnet neben das alte Kästchen ein weiteres für die neue Antwort. Undeutliche Bewertungen werden als **nicht korrekt beantwortet** interpretiert und entsprechend mit -1 Punkt gewertet.
- Der zweite Teil ist ein Rechen- und Beweisteil. Um den Kurztest zu bestehen, müssen in beiden Teilen mindestens 50% der möglichen Punkte erlangt werden.
- Es sind **keine** Hilfsmittel außer einem Stift zugelassen. Schmierpapier findet Ihr am Platz, falls mehr benötigt wird, meldet Euch. Sollte Euch der Platz ausgehen, benutzt die Rückseiten des Kurztests und kennzeichnet dies bitte deutlich.
- Die Bearbeitungsdauer des Kurztests beträgt 60 Minuten.
- Notizen auf dem Schmierpapier werden **nicht** gewertet.

VIEL ERFOLG!

Name: _____

Matrikelnummer: _____

BEWERTUNGSTEIL

Sei im Folgenden K ein Körper und V, W seien K -Vektorräume.

Sei $i \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit der komplexen Zahlen. Dann gilt $i + i^{-1} = 0$.

Jede Gerade L in \mathbb{R}^2 ist ein Untervektorraum von \mathbb{R}^2 .

Seien $v_1, \dots, v_k \in V$ linear abhängig. Dann kann man jeden Vektor v_i , $i = 1, \dots, k$, als Linearkombination der übrigen Vektoren $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k$ darstellen.

Angenommen es gelte $\dim_K(V) = 3$ und $\dim_K(W) = 2$. Dann existiert keine K -lineare injektive Abbildung $\varphi : V \rightarrow W$.

Sei V endlich-dimensional und $f : V \rightarrow V$ eine K -lineare Abbildung. Dann gilt $V = \ker(f) + \operatorname{im}(f)$, wobei $\ker(f)$ den Kern von f und $\operatorname{im}(f)$ das Bild von f bezeichne.

Sei $A \in K^{m \times n}$. Wendet man das Gaußsche Eliminationsverfahren auf A an, um die Matrix auf Zeilenstufenform A' zu transformieren, so gilt im Allgemeinen $\operatorname{rg}(A) \neq \operatorname{rg}(A')$.

Sei $A \in K^{m \times n}$ und $b \in K^m$. Der Lösungsraum des Gleichungssystems $Ax = b$ ist im Allgemeinen kein linearer Unterraum.

Fasst man K als Vektorraum über sich selbst auf, so ist die Abbildung $\det : K^{n \times n} \rightarrow K$ linear, wobei \det die übliche Determinantenabbildung bezeichne.

Fasst man \mathbb{C}^n wie üblich als \mathbb{C} -Vektorraum auf, so wird durch

$$\langle u, v \rangle = z_1 w_1 + \dots + z_n w_n$$

mit $u = (z_1, \dots, z_n)$ und $v = (w_1, \dots, w_n)$ ein Skalarprodukt auf \mathbb{C}^n definiert.

Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Für eine beliebige Teilmenge $M \subseteq V$ ist M^\perp ein linearer Unterraum von V .

Name: _____

Matrikelnummer: _____

BEWEIS- UND RECHENTEIL

Aufgabe 1: (15 Punkte)

Betrachte \mathbb{R}^4 als \mathbb{R} -Vektorraum zusammen mit den Basen

$$X = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \quad \text{und} \quad Y = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

- (i) Berechne die darstellende Matrix von $id : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, wobei im Urbildraum X und im Bildraum Y als Basis verwendet werden soll.
- (ii) Gib *ohne Rechnung* die Matrix des Basiswechsels von X nach Y an.

Name: _____

Matrikelnummer: _____

Aufgabe 2: (10 Punkte)

Sei V ein unitärer Vektorraum und $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ die induzierte Norm, d. h. $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Beweise die Gleichung

$$\frac{1}{2}\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - \frac{1}{2}\|u - v\|^2$$

für alle $u, v \in V$.