



Eine Verallgemeinerung der Funk–Radon–Transformation

Michael Quellmalz

Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik

27. Rhein–Ruhr–Workshop
28. Januar 2017

Inhalt

1. Funk–Radon Transformation

Einleitung

Eigenschaften

Bekannte Resultate

2. Funk–Radon–Transformation für Schnitte durch festen Punkt

Definition

Zerlegung

Geometrische Interpretation

Eigenschaften

Inhalt

1. Funk–Radon Transformation

Einleitung

Eigenschaften

Bekannte Resultate

2. Funk–Radon–Transformation für Schnitte durch festen Punkt

Definition

Zerlegung

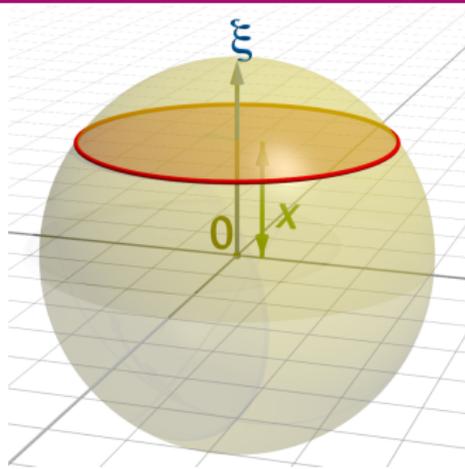
Geometrische Interpretation

Eigenschaften

- ▶ **Sphäre** $\mathbb{S}^2 = \{\xi \in \mathbb{R}^3 : \|\xi\| = 1\}$
- ▶ **Funktion** $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}$
- ▶ Kreis auf der Sphäre ist Schnittmenge der Sphäre mit einer Ebene:

$$\{\eta \in \mathbb{S}^2 : \langle \xi, \eta \rangle = x\},$$

$$\xi \in \mathbb{S}^2, x \in [-1, 1]$$



Sphärischer Mittelwertoperator

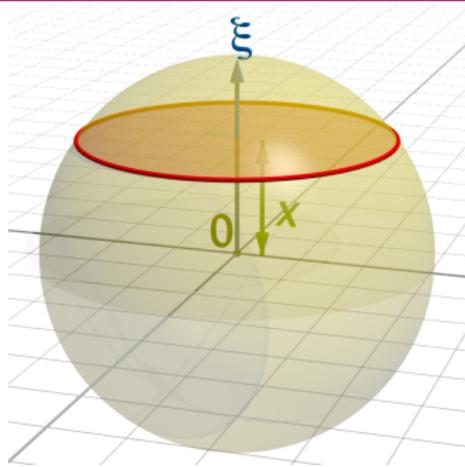
$$\mathcal{S}: C(\mathbb{S}^2) \rightarrow C(\mathbb{S}^2 \times [-1, 1]),$$

$$\mathcal{S}f(\xi, x) = \int_{\langle \xi, \eta \rangle = x} f(\eta) d\lambda(\eta)$$

- ▶ Sphäre $\mathbb{S}^2 = \{\xi \in \mathbb{R}^3 : \|\xi\| = 1\}$
- ▶ Funktion $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}$
- ▶ Kreis auf der Sphäre ist Schnittmenge der Sphäre mit einer Ebene:

$$\{\eta \in \mathbb{S}^2 : \langle \xi, \eta \rangle = x\},$$

$$\xi \in \mathbb{S}^2, x \in [-1, 1]$$



Sphärischer Mittelwertoperator

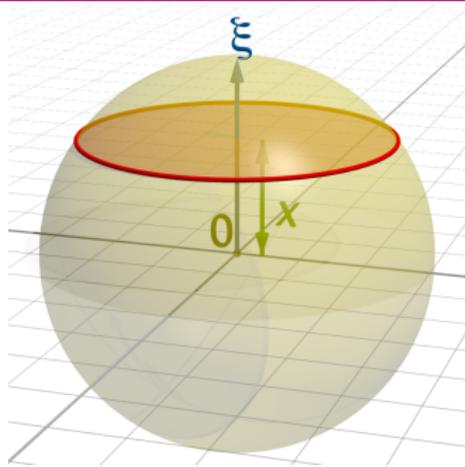
$$\mathcal{S}: C(\mathbb{S}^2) \rightarrow C(\mathbb{S}^2 \times [-1, 1]),$$

$$\mathcal{S}f(\xi, x) = \int_{\langle \xi, \eta \rangle = x} f(\eta) d\lambda(\eta)$$

- ▶ Sphäre $\mathbb{S}^2 = \{\xi \in \mathbb{R}^3 : \|\xi\| = 1\}$
- ▶ Funktion $f: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}$
- ▶ Kreis auf der Sphäre ist Schnittmenge der Sphäre mit einer Ebene:

$$\{\eta \in \mathbb{S}^2 : \langle \xi, \eta \rangle = x\},$$

$$\xi \in \mathbb{S}^2, x \in [-1, 1]$$



Sphärischer Mittelwertoperator

$$\mathcal{S}: C(\mathbb{S}^2) \rightarrow C(\mathbb{S}^2 \times [-1, 1]),$$

$$\mathcal{S}f(\xi, x) = \int_{\langle \xi, \eta \rangle = x} f(\eta) d\lambda(\eta)$$

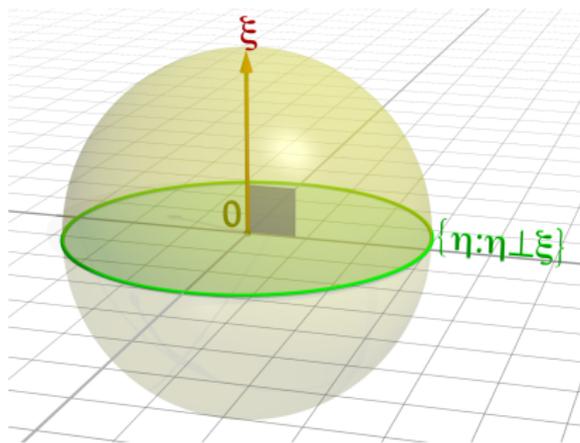
Funk-Radon Transformation

- ▶ Einschränkung auf Großkreise
- ▶ **Funk-Radon Transformation** (auch Funk-Transformation oder sphärische Radon-Transformation)

$$\mathcal{F}: C(\mathbb{S}^2) \rightarrow C(\mathbb{S}^2),$$

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\langle \xi, \eta \rangle = 0} f(\eta) d\lambda(\eta)$$

[Funk, 1913]



Fragen

1. Injektivität
(Ist f anhand deren Mittelwerte entlang aller Großkreise rekonstruierbar?)
2. Bild

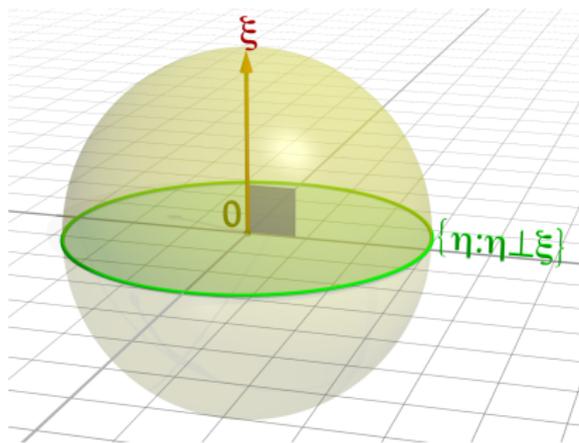
Funk–Radon Transformation

[Funk, 1913]

- ▶ Einschränkung auf Großkreise
- ▶ **Funk–Radon Transformation** (auch Funk–Transformation oder sphärische Radon–Transformation)

$$\mathcal{F}: C(\mathbb{S}^2) \rightarrow C(\mathbb{S}^2),$$

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\langle \xi, \eta \rangle = 0} f(\eta) \, d\lambda(\eta)$$



Fragen

1. Injektivität
(Ist f anhand deren Mittelwerte entlang aller Großkreise rekonstruierbar?)
2. Bild

Fourier-Reihe

Schreiben $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$ bezüglich **Kugelflächenfunktionen (Spherical Harmonics)** Y_n^k vom Grad n

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^n \hat{f}(n, k) Y_n^k.$$

Eigenwert-Zerlegung

[Minkowski, 1904]

Die Funk–Radon Transformation erfüllt

$$\mathcal{F}Y_n^k(\xi) = P_n(0)Y_n^k(\xi), \quad P_n(0) = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ gerade,} \\ 0, & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

P_n – Legendre-Polynom vom Grad n

Funk–Radon Transformation ist injektiv für gerade Funktionen $f(\xi) = f(-\xi)$.

Fourier-Reihe

Schreiben $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$ bezüglich **Kugelflächenfunktionen (Spherical Harmonics)** Y_n^k vom Grad n

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^n \hat{f}(n, k) Y_n^k.$$

Eigenwert-Zerlegung

[Minkowski, 1904]

Die Funk-Radon Transformation erfüllt

$$\mathcal{F}Y_n^k(\xi) = P_n(0)Y_n^k(\xi), \quad P_n(0) = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ gerade,} \\ 0, & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

P_n – Legendre-Polynom vom Grad n

Funk-Radon Transformation ist injektiv für gerade Funktionen $f(\xi) = f(-\xi)$.

Fourier-Reihe

Schreiben $f \in L^2(\mathbb{S}^2)$ bezüglich **Kugelflächenfunktionen (Spherical Harmonics)** Y_n^k vom Grad n

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^n \hat{f}(n, k) Y_n^k.$$

Eigenwert-Zerlegung

[Minkowski, 1904]

Die Funk-Radon Transformation erfüllt

$$\mathcal{F}Y_n^k(\xi) = P_n(0)Y_n^k(\xi), \quad P_n(0) = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ gerade,} \\ 0, & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

P_n – Legendre-Polynom vom Grad n

Funk-Radon Transformation ist injektiv für gerade Funktionen $f(\xi) = f(-\xi)$.

Sobolev-Räume

Sei $s \geq 0$. Der **Sobolev-Raum** $H^s(\mathbb{S}^2)$ ist der Raum der Funktionen $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Norm

$$\|f\|_s^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^n \left| \hat{f}(n, k) \right|^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)^{2s}.$$

Theorem

[Strichartz, 1981]

Die Funk–Radon Transformation ist stetig und bijektiv

$$\mathcal{F} : L_{\text{even}}^2(\mathbb{S}^2) \rightarrow H_{\text{even}}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{S}^2).$$

Sobolev-Räume

Sei $s \geq 0$. Der **Sobolev-Raum** $H^s(\mathbb{S}^2)$ ist der Raum der Funktionen $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Norm

$$\|f\|_s^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-n}^n \left| \hat{f}(n, k) \right|^2 \left(n + \frac{1}{2} \right)^{2s}.$$

Theorem

[Strichartz, 1981]

Die Funk-Radon Transformation ist stetig und bijektiv

$$\mathcal{F} : L_{\text{even}}^2(\mathbb{S}^2) \rightarrow H_{\text{even}}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{S}^2).$$

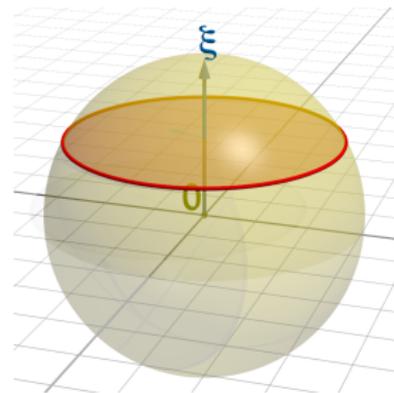
Kreise mit festem Radius

- ▶ Für festes $x_0 \in [-1, 1]$ setzen wir

$$\mathcal{S}_{x_0} f(\xi) = \int_{\langle \xi, \eta \rangle = x_0} f(\eta) \, d\eta$$

- ▶ Eigenwert-Zerlegung

$$\mathcal{S}_{x_0} Y_n^k = P_n(x_0) Y_n^k$$



“Freak theorem”

[Schneider, 1969]

Die Menge der Werte x_0 , für welche \mathcal{S}_{x_0} **nicht** injektiv ist, ist abzählbar und dicht in $[-1, 1]$.

$\mathcal{S}_{x_0} : L^2(\mathbb{S}^2) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{S}^2)$ ist stetig

[Rubin, 2000]

Expliziter Algorithmus zur Bestimmung, ob \mathcal{S}_{x_0} zu gegebenem x_0 injektiv ist

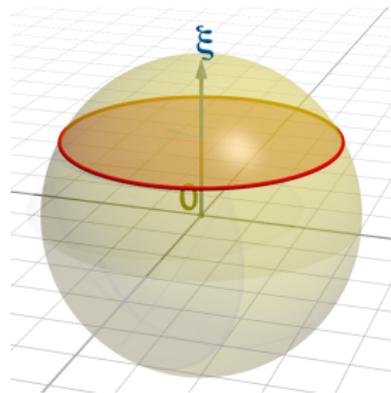
Kreise mit festem Radius

- Für festes $x_0 \in [-1, 1]$ setzen wir

$$\mathcal{S}_{x_0} f(\xi) = \int_{\langle \xi, \eta \rangle = x_0} f(\eta) d\eta$$

- Eigenwert-Zerlegung

$$\mathcal{S}_{x_0} Y_n^k = P_n(x_0) Y_n^k$$



“Freak theorem”

[Schneider, 1969]

Die Menge der Werte x_0 , für welche \mathcal{S}_{x_0} **nicht** injektiv ist, ist abzählbar und dicht in $[-1, 1]$.

$\mathcal{S}_{x_0} : L^2(\mathbb{S}^2) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{S}^2)$ ist stetig

[Rubin, 2000]

Expliziter Algorithmus zur Bestimmung, ob \mathcal{S}_{x_0} zu gegebenem x_0 injektiv ist

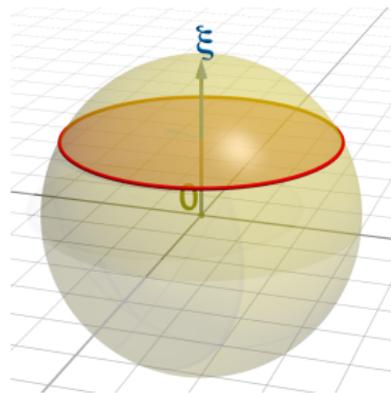
Kreise mit festem Radius

- Für festes $x_0 \in [-1, 1]$ setzen wir

$$\mathcal{S}_{x_0} f(\xi) = \int_{\langle \xi, \eta \rangle = x_0} f(\eta) \, d\eta$$

- Eigenwert-Zerlegung

$$\mathcal{S}_{x_0} Y_n^k = P_n(x_0) Y_n^k$$



“Freak theorem”

[Schneider, 1969]

Die Menge der Werte x_0 , für welche \mathcal{S}_{x_0} **nicht** injektiv ist, ist abzählbar und dicht in $[-1, 1]$.

$\mathcal{S}_{x_0} : L^2(\mathbb{S}^2) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{S}^2)$ ist stetig

[Rubin, 2000]

Expliziter Algorithmus zur Bestimmung, ob \mathcal{S}_{x_0} zu gegebenem x_0 injektiv ist

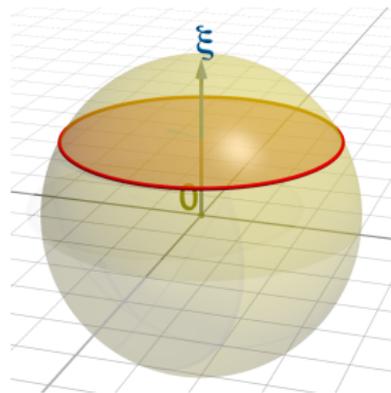
Kreise mit festem Radius

- Für festes $x_0 \in [-1, 1]$ setzen wir

$$\mathcal{S}_{x_0} f(\xi) = \int_{\langle \xi, \eta \rangle = x_0} f(\eta) d\eta$$

- Eigenwert-Zerlegung

$$\mathcal{S}_{x_0} Y_n^k = P_n(x_0) Y_n^k$$



“Freak theorem”

[Schneider, 1969]

Die Menge der Werte x_0 , für welche \mathcal{S}_{x_0} **nicht** injektiv ist, ist abzählbar und dicht in $[-1, 1]$.

$\mathcal{S}_{x_0} : L^2(\mathbb{S}^2) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{S}^2)$ ist stetig

[Rubin, 2000]

Expliziter Algorithmus zur Bestimmung, ob \mathcal{S}_{x_0} zu gegebenem x_0 injektiv ist

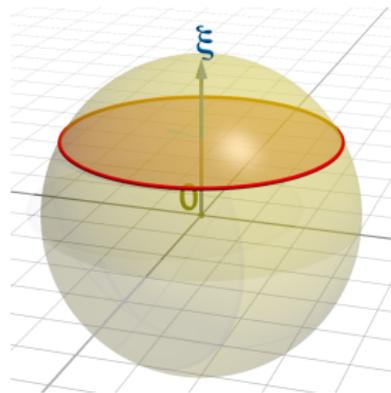
Kreise mit festem Radius

- Für festes $x_0 \in [-1, 1]$ setzen wir

$$\mathcal{S}_{x_0} f(\xi) = \int_{\langle \xi, \eta \rangle = x_0} f(\eta) d\eta$$

- Eigenwert-Zerlegung

$$\mathcal{S}_{x_0} Y_n^k = P_n(x_0) Y_n^k$$



“Freak theorem”

[Schneider, 1969]

Die Menge der Werte x_0 , für welche \mathcal{S}_{x_0} **nicht** injektiv ist, ist abzählbar und dicht in $[-1, 1]$.

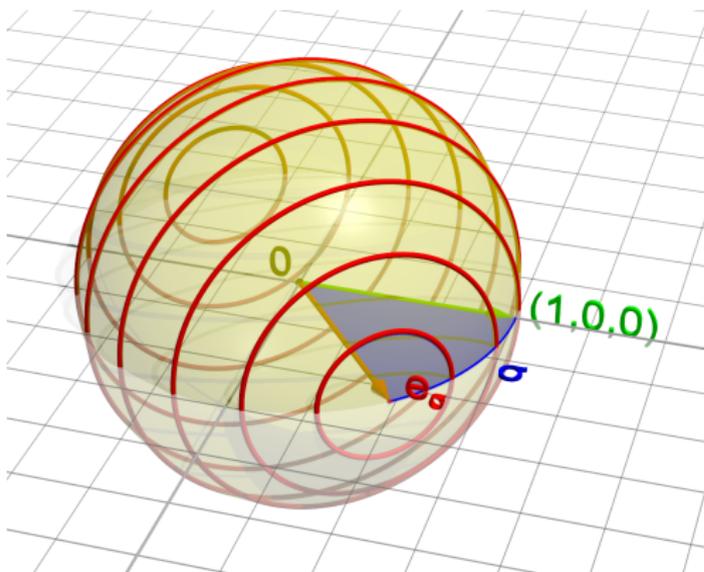
$\mathcal{S}_{x_0} : L^2(\mathbb{S}^2) \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{S}^2)$ ist stetig

[Rubin, 2000]

Expliziter Algorithmus zur Bestimmung, ob \mathcal{S}_{x_0} zu gegebenem x_0 injektiv ist

Vertikale Schnitte

$$S(\xi, x) = \int_{\langle \xi, \eta \rangle = x} f(\eta) \, ds(\eta), \quad \xi_3 = 0$$



- ▶ **Kreise stehen senkrecht auf dem Äquator**

- ▶ Injektiv für symmetrische Funktionen

$$f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = f(\xi_1, \xi_2, -\xi_3)$$

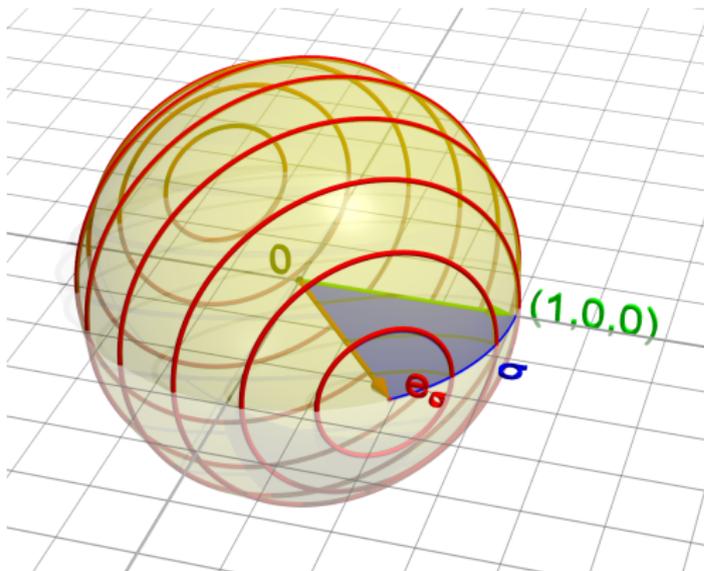
- ▶ Beweis1: Orthogonale Projektion auf die Äquatorialebene

[Gindikin, Reeds & Shepp, 1994]

- ▶ Beweis2: Spherical Harmonics
- [Hielscher & Q., 2016]

Vertikale Schnitte

$$S(\xi, x) = \int_{\langle \xi, \eta \rangle = x} f(\eta) \, ds(\eta), \quad \xi_3 = 0$$



► **Kreise stehen senkrecht auf dem Äquator**

► **Injektiv für symmetrische Funktionen**

$$f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = f(\xi_1, \xi_2, -\xi_3)$$

► **Beweis1: Orthogonale Projektion auf die Äquatorialebene**

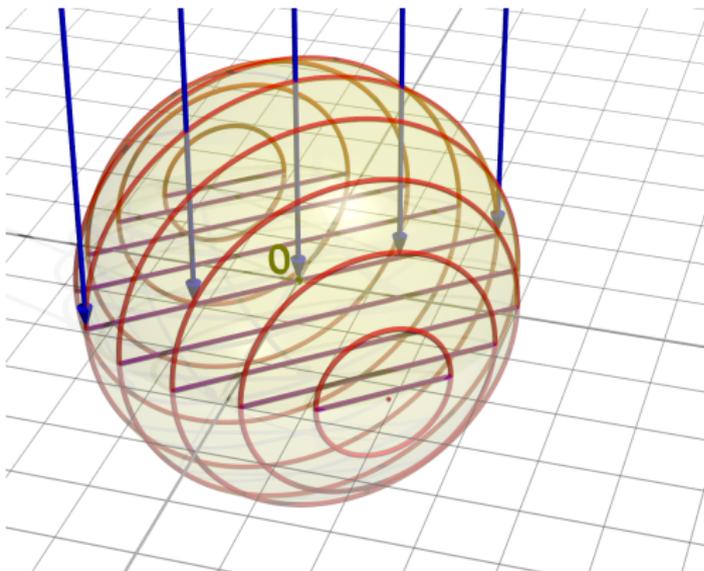
[Gindikin, Reeds & Shepp, 1994]

► **Beweis2: Spherical Harmonics**

[Hielscher & Q., 2016]

Vertikale Schnitte

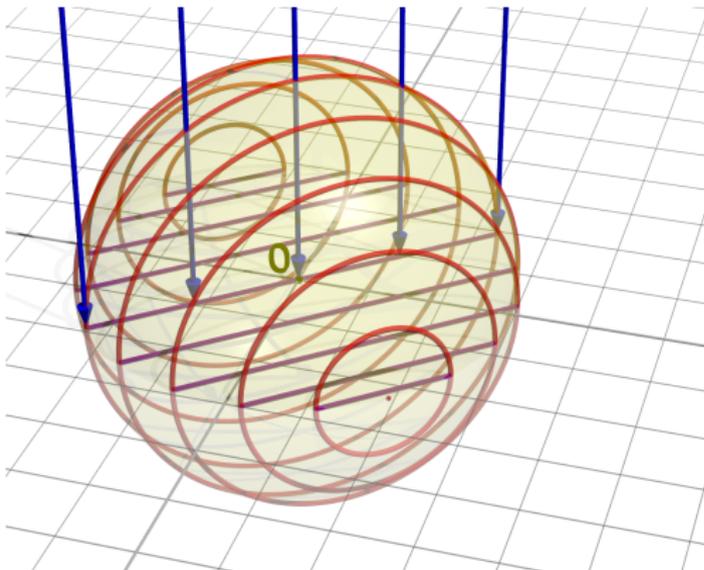
$$\mathcal{S}(\xi, x) = \int_{\langle \xi, \eta \rangle = x} f(\eta) \, ds(\eta), \quad \xi_3 = 0$$



- ▶ **Kreise stehen senkrecht auf dem Äquator**
- ▶ Injektiv für symmetrische Funktionen
 $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = f(\xi_1, \xi_2, -\xi_3)$
- ▶ **Beweis1: Orthogonale Projektion auf die Äquatorialebene**
[Gindikin, Reeds & Shepp, 1994]
- ▶ **Beweis2: Spherical Harmonics**
[Hielscher & Q., 2016]

Vertikale Schnitte

$$S(\xi, x) = \int_{\langle \xi, \eta \rangle = x} f(\eta) \, ds(\eta), \quad \xi_3 = 0$$



► **Kreise stehen senkrecht auf dem Äquator**

► Injektiv für symmetrische Funktionen

$$f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = f(\xi_1, \xi_2, -\xi_3)$$

► Beweis1: Orthogonale Projektion auf die Äquatorialebene

[Gindikin, Reeds & Shepp, 1994]

► Beweis2: Spherical Harmonics

[Hielscher & Q., 2016]

Höhere Dimensionen

- ▶ \mathbb{S}^d ... d -dimensionale Sphäre
- ▶ \mathbb{R}^{d+1} ... $(d + 1)$ -dimensionaler umgebender Raum
- ▶ Großkreis wird zu $(d - 1)$ -dimensionaler Untersphäre
- ▶ Für $f \in C(\mathbb{S}^d)$ definieren wir

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{S}^d \cap \{\langle \xi, \eta \rangle = 0\}} f(\eta) \, d\mu$$

Theorem

[Strichartz, 1981]

Die Funk–Radon Transformation ist stetig und bijektiv

$$\mathcal{F}: L^2_{\text{even}}(\mathbb{S}^d) \rightarrow H_{\text{even}}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{S}^d).$$

Höhere Dimensionen

- ▶ \mathbb{S}^d ... d -dimensionale Sphäre
- ▶ \mathbb{R}^{d+1} ... $(d + 1)$ -dimensionaler umgebender Raum
- ▶ Großkreis wird zu $(d - 1)$ -dimensionaler Untersphäre
- ▶ Für $f \in C(\mathbb{S}^d)$ definieren wir

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{S}^d \cap \{\langle \xi, \eta \rangle = 0\}} f(\eta) \, d\mu$$

Theorem

[Strichartz, 1981]

Die Funk–Radon Transformation ist stetig und bijektiv

$$\mathcal{F}: L^2_{\text{even}}(\mathbb{S}^d) \rightarrow H_{\text{even}}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{S}^d).$$

Höhere Dimensionen

- ▶ \mathbb{S}^d ... d -dimensionale Sphäre
- ▶ \mathbb{R}^{d+1} ... $(d + 1)$ -dimensionaler umgebender Raum
- ▶ Großkreis wird zu $(d - 1)$ -dimensionaler Untersphäre
- ▶ Für $f \in C(\mathbb{S}^d)$ definieren wir

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{S}^d \cap \{\langle \xi, \eta \rangle = 0\}} f(\eta) \, d\mu$$

Theorem

[Strichartz, 1981]

Die Funk-Radon Transformation ist stetig und bijektiv

$$\mathcal{F} : L^2_{\text{even}}(\mathbb{S}^d) \rightarrow H_{\text{even}}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{S}^d).$$

Höhere Dimensionen

- ▶ \mathbb{S}^d ... d -dimensionale Sphäre
- ▶ \mathbb{R}^{d+1} ... $(d + 1)$ -dimensionaler umgebender Raum
- ▶ Großkreis wird zu $(d - 1)$ -dimensionaler Untersphäre
- ▶ Für $f \in C(\mathbb{S}^d)$ definieren wir

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{S}^d \cap \{\langle \xi, \eta \rangle = 0\}} f(\eta) \, d\mu$$

Theorem

[Strichartz, 1981]

Die Funk–Radon Transformation ist stetig und bijektiv

$$\mathcal{F}: L^2_{\text{even}}(\mathbb{S}^d) \rightarrow H_{\text{even}}^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{S}^d).$$

Inhalt

1. Funk-Radon Transformation

Einleitung

Eigenschaften

Bekannte Resultate

2. Funk-Radon-Transformation für Schnitte durch festen Punkt

Definition

Zerlegung

Geometrische Interpretation

Eigenschaften

Schnitte durch einen festen Punkt

[Salman, 2016]

Ersetzen 0 durch den Punkt

$$ze^{d+1}, \quad 0 \leq z < 1$$

im Inneren der Sphäre.

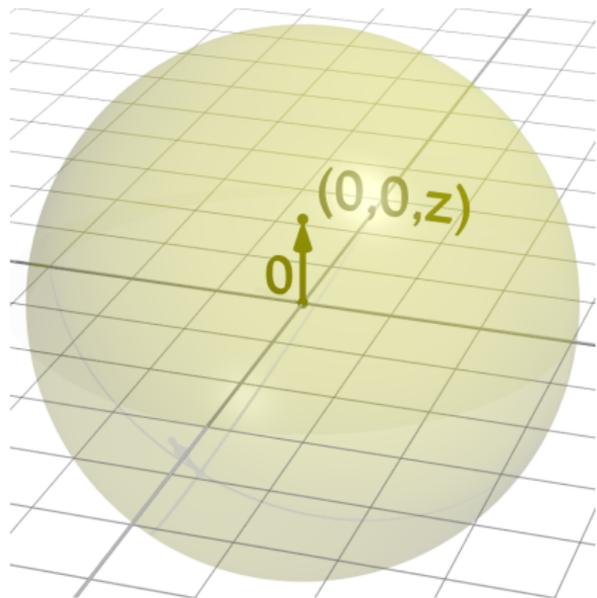
Schnitt mit Hyperebene durch ze^{d+1} ist

$$\{\eta \in \mathbb{S}^d : \langle \xi, \eta \rangle = z\xi_{d+1}\}.$$

Definition

$$U_z : C(\mathbb{S}^d) \rightarrow C(\mathbb{S}^d),$$

$$U_z f(\xi) = \int_{\langle \xi, \eta \rangle = z\xi_{d+1}} f(\eta) d\lambda(\eta)$$



Schnitte durch einen festen Punkt

[Salman, 2016]

Ersetzen 0 durch den Punkt

$$ze^{d+1}, \quad 0 \leq z < 1$$

im Inneren der Sphäre.

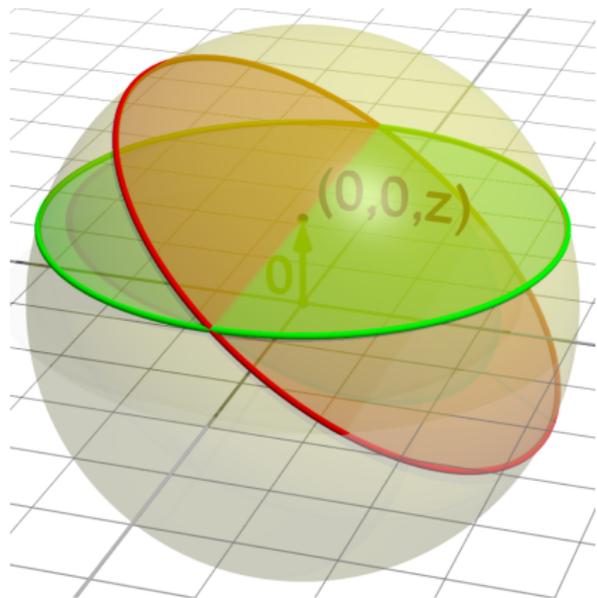
Schnitt mit Hyperebene durch ze^{d+1} ist

$$\{\eta \in \mathbb{S}^d : \langle \xi, \eta \rangle = z\xi_{d+1}\}.$$

Definition

$$\mathcal{U}_z : C(\mathbb{S}^d) \rightarrow C(\mathbb{S}^d),$$

$$\mathcal{U}_z f(\xi) = \int_{\langle \xi, \eta \rangle = z\xi_{d+1}} f(\eta) d\lambda(\eta)$$



Schnitte durch einen festen Punkt

[Salman, 2016]

Ersetzen 0 durch den Punkt

$$ze^{d+1}, \quad 0 \leq z < 1$$

im Inneren der Sphäre.

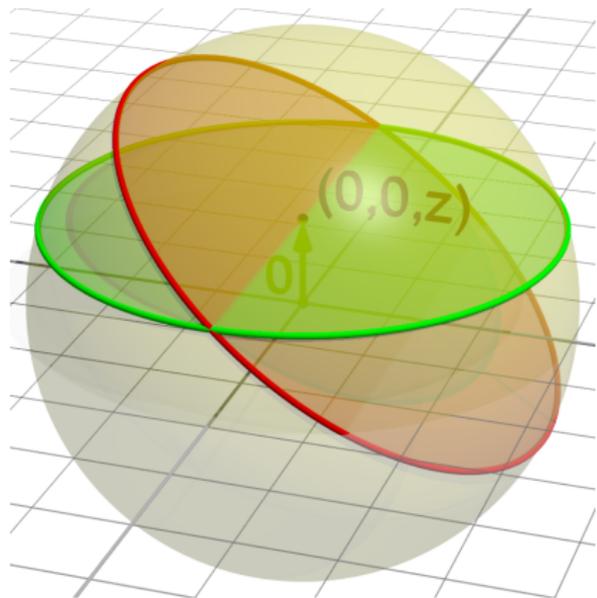
Schnitt mit Hyperebene durch ze^{d+1} ist

$$\{\eta \in \mathbb{S}^d : \langle \xi, \eta \rangle = z\xi_{d+1}\}.$$

Definition

$$\mathcal{U}_z : C(\mathbb{S}^d) \rightarrow C(\mathbb{S}^d),$$

$$\mathcal{U}_z f(\xi) = \int_{\langle \xi, \eta \rangle = z\xi_{d+1}} f(\eta) d\lambda(\eta)$$



Theorem

[Q., 2017]

Sei $z \in [0, 1)$. Die verallgemeinerte Radon-Transformation \mathcal{U}_z ist darstellbar durch

$$\mathcal{U}_z = \mathcal{N}_z \mathcal{F} \mathcal{M}_z.$$

$$\blacktriangleright \mathcal{M}_z f(\boldsymbol{\xi}) = \left(\frac{\sqrt{1-z^2}}{1+z\xi_{d+1}} \right)^{d-1} f \circ h(\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d$$

$$h(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^d \frac{\sqrt{1-z^2}}{1+z\xi_{d+1}} \xi_i \mathbf{e}^i + \frac{z+\xi_{d+1}}{1+z\xi_{d+1}} \mathbf{e}^{d+1}$$

$\blacktriangleright \mathcal{F}$... Funk-Radon Transformation

$$\blacktriangleright \mathcal{N}_z f(\boldsymbol{\xi}) = (1-z^2\xi_{d+1}^2)^{-\frac{d-1}{2}} f \circ g(\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d$$

$$g(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2\xi_{d+1}^2}} \left(\sum_{i=1}^d \xi_i \mathbf{e}^i + \sqrt{1-z^2\xi_{d+1}^2} \mathbf{e}^{d+1} \right)$$

Geometrische Interpretation von h (für S^2)

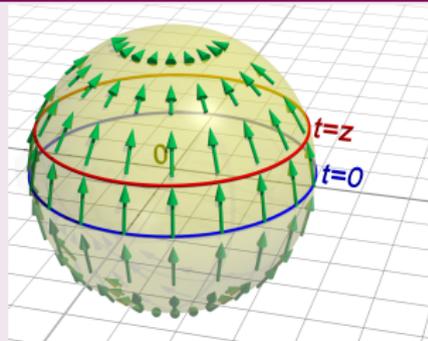
Satz

Die Abbildung

$$h(\xi) = \pi^{-1} \left(\sqrt{\frac{1+z}{1-z}} \pi(\xi) \right)$$

ist konform und besteht aus

1. Stereografischer Projektion $\pi: S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$
2. Zentrischer Streckung $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, x \mapsto \sqrt{\frac{1+z}{1-z}} x$
3. Inverser stereografischer Projektion $\pi^{-1}: \mathbb{R}^d \rightarrow S^d$



Wir werden sehen

h bildet Großkreise auf Kleinkreise durch ze^{d+1} ab.

Geometrische Interpretation von h (für S^2)

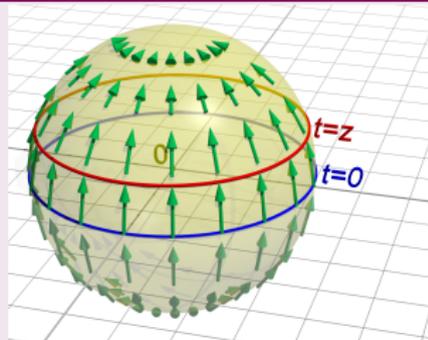
Satz

Die Abbildung

$$h(\xi) = \pi^{-1} \left(\sqrt{\frac{1+z}{1-z}} \pi(\xi) \right)$$

ist konform und besteht aus

1. Stereografischer Projektion $\pi: S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$
2. Zentrischer Streckung $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $x \mapsto \sqrt{\frac{1+z}{1-z}} x$
3. Inverser stereografischer Projektion $\pi^{-1}: \mathbb{R}^d \rightarrow S^d$



Wir werden sehen

h bildet Großkreise auf Kleinkreise durch ze^{d+1} ab.

Geometrische Interpretation von h (für S^2)

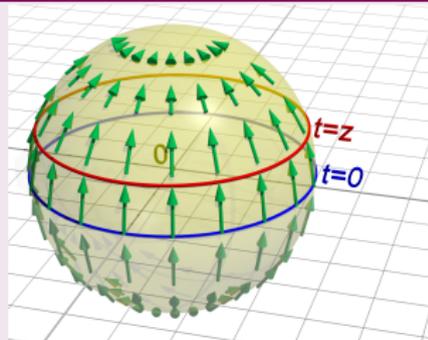
Satz

Die Abbildung

$$h(\xi) = \pi^{-1} \left(\sqrt{\frac{1+z}{1-z}} \pi(\xi) \right)$$

ist konform und besteht aus

1. Stereografischer Projektion $\pi: S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$
2. Zentrischer Streckung $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\mathbf{x} \mapsto \sqrt{\frac{1+z}{1-z}} \mathbf{x}$
3. Inverser stereografischer Projektion $\pi^{-1}: \mathbb{R}^d \rightarrow S^d$



Wir werden sehen

h bildet Großkreise auf Kleinkreise durch ze^{d+1} ab.

Geometrische Interpretation von h (für S^2)

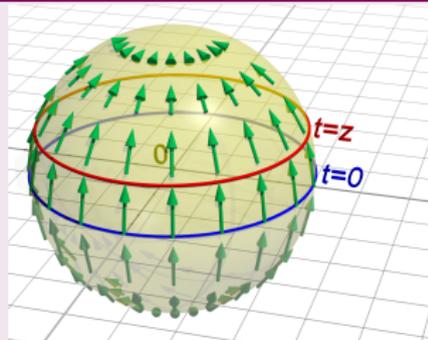
Satz

Die Abbildung

$$h(\xi) = \pi^{-1} \left(\sqrt{\frac{1+z}{1-z}} \pi(\xi) \right)$$

ist konform und besteht aus

1. Stereografischer Projektion $\pi: S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$
2. Zentrischer Streckung $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \mathbf{x} \mapsto \sqrt{\frac{1+z}{1-z}} \mathbf{x}$
3. Inverser stereografischer Projektion $\pi^{-1}: \mathbb{R}^d \rightarrow S^d$



Wir werden sehen

h bildet Großkreise auf Kleinkreise durch ze^{d+1} ab.

Geometrische Interpretation von h (für S^2)

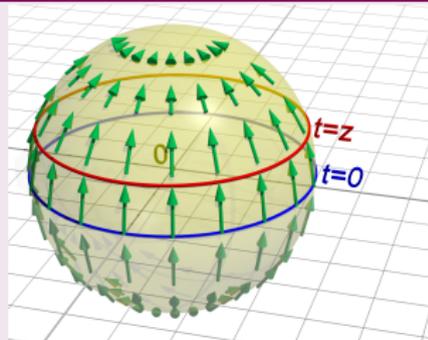
Satz

Die Abbildung

$$h(\xi) = \pi^{-1} \left(\sqrt{\frac{1+z}{1-z}} \pi(\xi) \right)$$

ist konform und besteht aus

1. Stereografischer Projektion $\pi: S^d \rightarrow \mathbb{R}^d$
2. Zentrischer Streckung $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\mathbf{x} \mapsto \sqrt{\frac{1+z}{1-z}} \mathbf{x}$
3. Inverser stereografischer Projektion $\pi^{-1}: \mathbb{R}^d \rightarrow S^d$

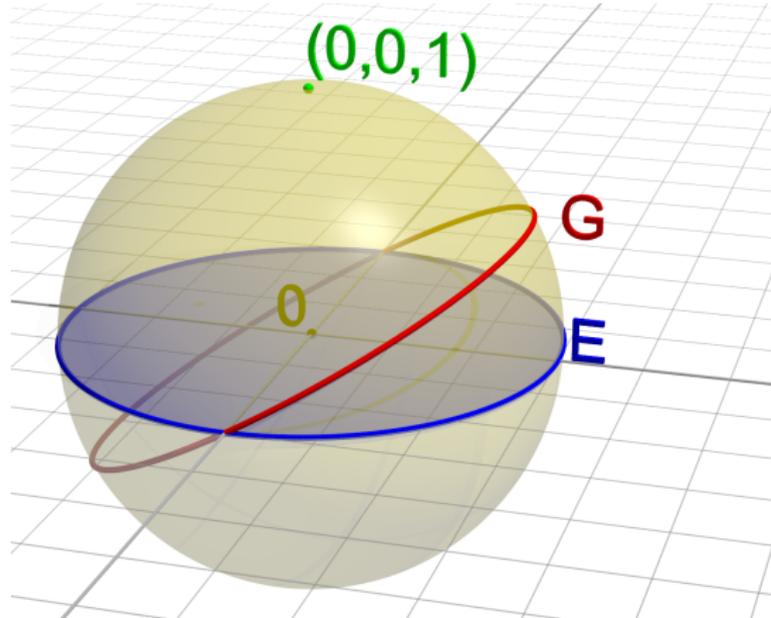


Wir werden sehen

h bildet Großkreise auf Kleinkreise durch ze^{d+1} ab.

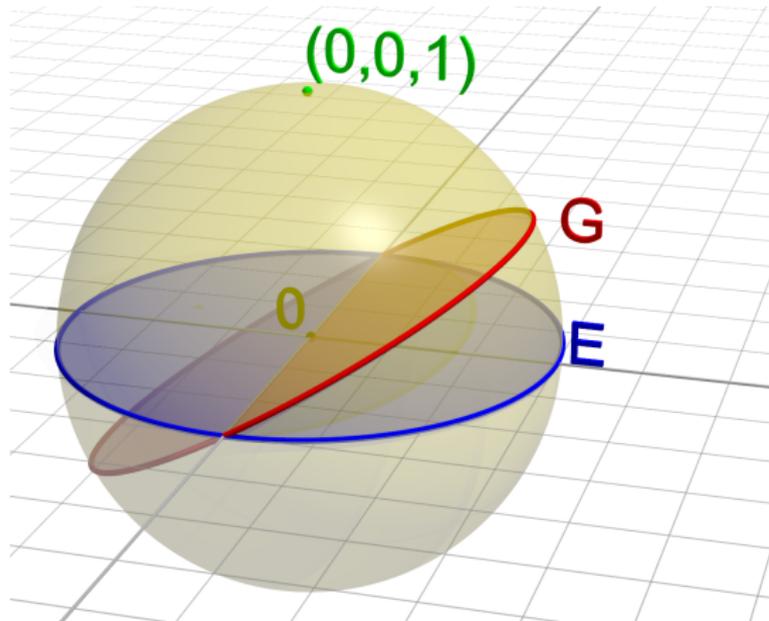
1) Stereografische Projektion π

- ▶ G ... Großkreis in \mathbb{S}^2
- ▶ E ... Äquator von \mathbb{S}^2
- ▶ G schneidet E in zwei antipodischen Punkten (or ist identisch zu E)
- ▶ $\pi(E) = E$
- ▶ $\pi(G)$ ist Kreis oder Gerade in \mathbb{R}^2 und schneidet $\pi(E)$ in zwei antipodischen Punkten



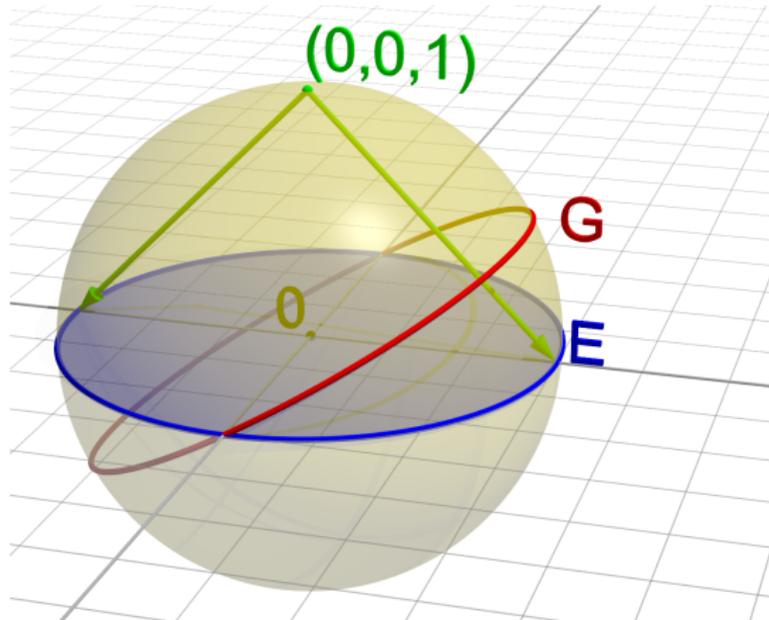
1) Stereografische Projektion π

- ▶ G ... Großkreis in \mathbb{S}^2
- ▶ E ... Äquator von \mathbb{S}^2
- ▶ G schneidet E in zwei antipodischen Punkten (or ist identisch zu E)
- ▶ $\pi(E) = E$
- ▶ $\pi(G)$ ist Kreis oder Gerade in \mathbb{R}^2 und schneidet $\pi(E)$ in zwei antipodischen Punkten



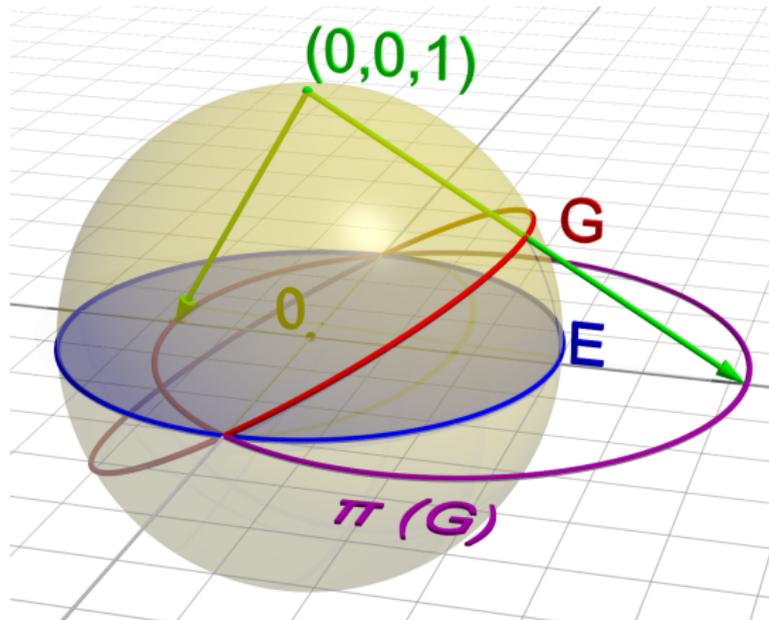
1) Stereografische Projektion π

- ▶ G ... Großkreis in \mathbb{S}^2
- ▶ E ... Äquator von \mathbb{S}^2
- ▶ G schneidet E in zwei antipodischen Punkten (or ist identisch zu E)
- ▶ $\pi(E) = E$
- ▶ $\pi(G)$ ist Kreis oder Gerade in \mathbb{R}^2 und schneidet $\pi(E)$ in zwei antipodischen Punkten



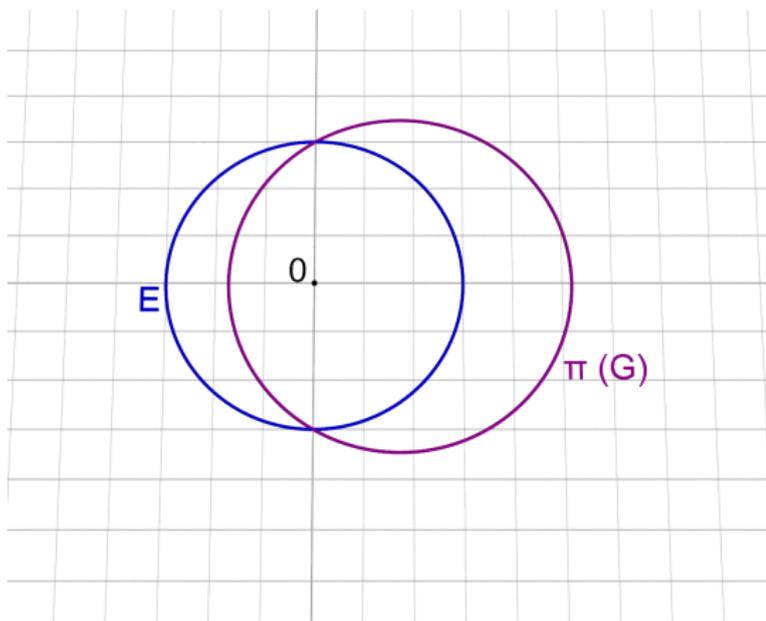
1) Stereografische Projektion π

- ▶ G ... Großkreis in \mathbb{S}^2
- ▶ E ... Äquator von \mathbb{S}^2
- ▶ G schneidet E in zwei antipodischen Punkten (or ist identisch zu E)
- ▶ $\pi(E) = E$
- ▶ $\pi(G)$ ist Kreis oder Gerade in \mathbb{R}^2 und schneidet $\pi(E)$ in zwei antipodischen Punkten



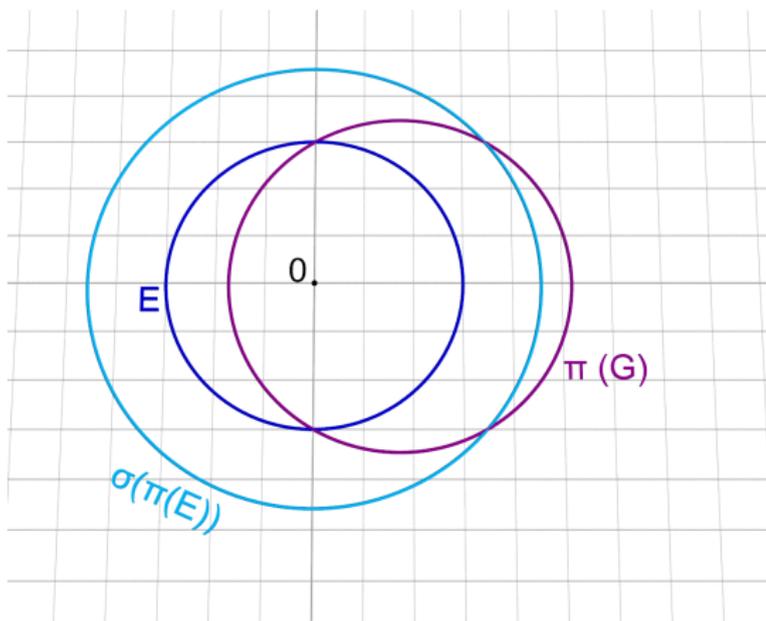
2) Zentrische Streckung

- ▶ Zentrische Streckung um Faktor $\sigma = \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}$
- ▶ Einheitskreis E wird zu Kreis $\sigma(\pi(E))$ mit Radius σ
- ▶ $\sigma(\pi(G))$ schneidet $\sigma(\pi(E))$ in zwei antipodischen Punkten



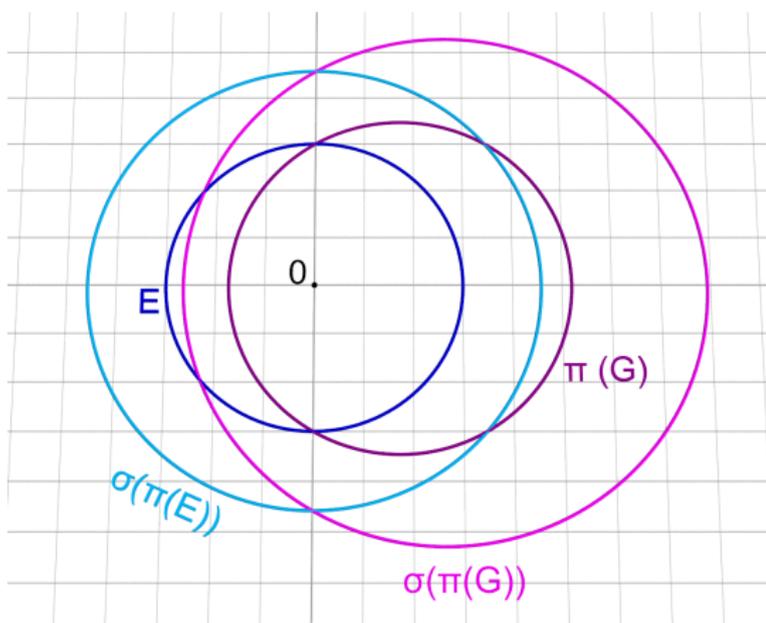
2) Zentrische Streckung

- ▶ Zentrische Streckung um Faktor $\sigma = \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}$
- ▶ Einheitskreis E wird zu Kreis $\sigma(\pi(E))$ mit Radius σ
- ▶ $\sigma(\pi(G))$ schneidet $\sigma(\pi(E))$ in zwei antipodischen Punkten



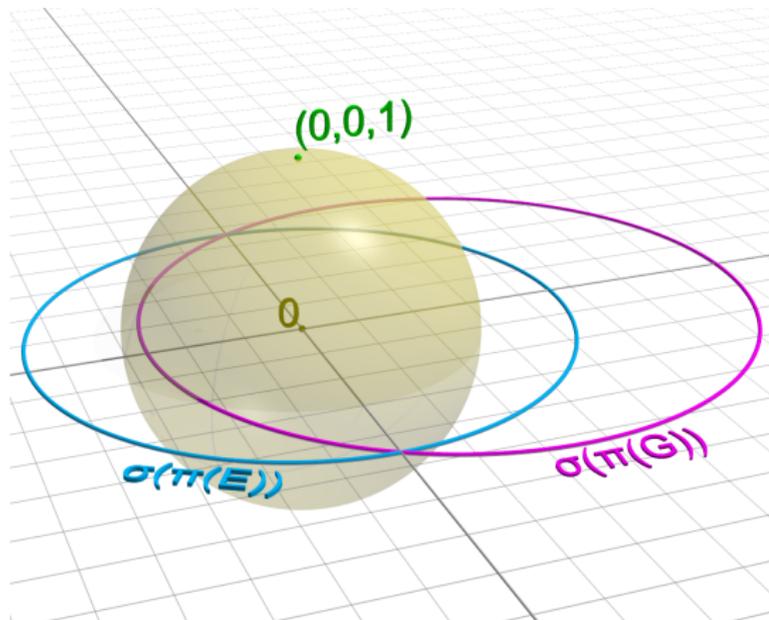
2) Zentrische Streckung

- ▶ Zentrische Streckung um Faktor $\sigma = \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}$
- ▶ Einheitskreis E wird zu Kreis $\sigma(\pi(E))$ mit Radius σ
- ▶ $\sigma(\pi(G))$ schneidet $\sigma(\pi(E))$ in zwei antipodischen Punkten



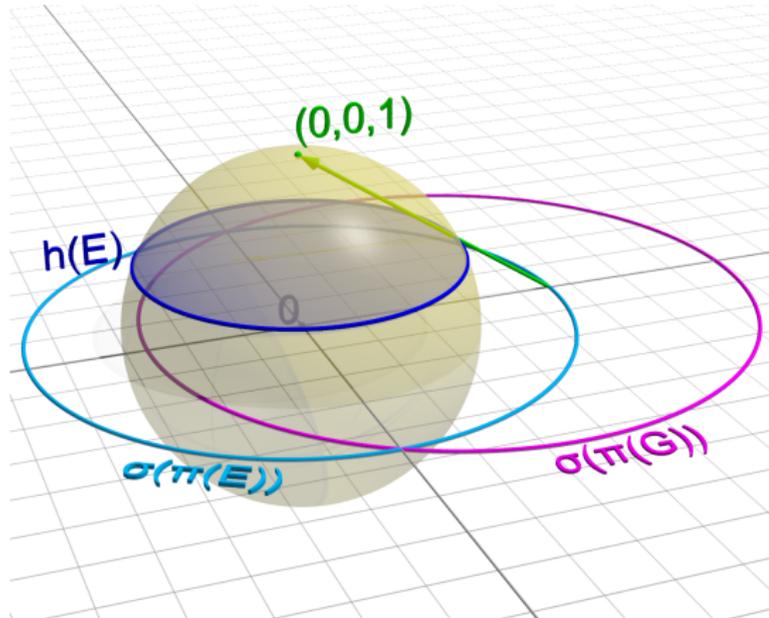
3) Inverse stereografische Projektion π^{-1}

- ▶ Kreis mit Radius s wird zu Breitenkreis z ;
 $h(E)$
- ▶ $h(G) = \pi^{-1}(\sigma(\pi(G)))$ schneidet $h(E)$ in zwei antipodischen Punkten
- ▶ $h(G)$ ist Kleinkreis durch $(0, 0, z)$



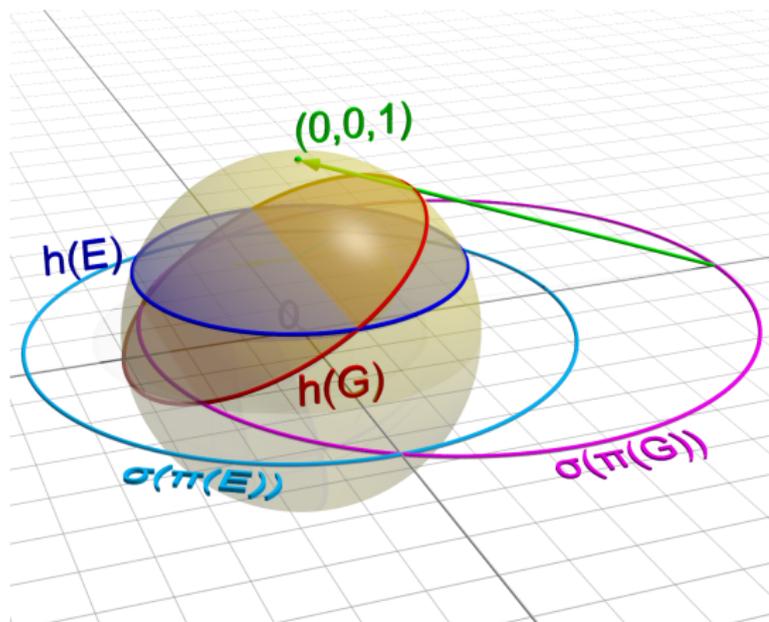
3) Inverse stereografische Projektion π^{-1}

- ▶ Kreis mit Radius s wird zu Breitenkreis z ;
 $h(E)$
- ▶ $h(G) = \pi^{-1}(\sigma(\pi(G)))$ schneidet $h(E)$ in zwei antipodischen Punkten
- ▶ $h(G)$ ist Kleinkreis durch $(0, 0, z)$



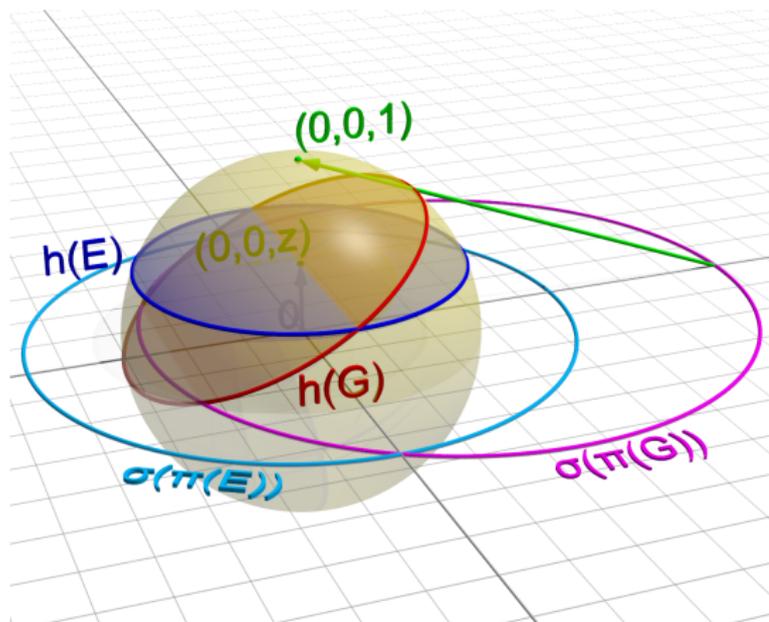
3) Inverse stereografische Projektion π^{-1}

- ▶ Kreis mit Radius s wird zu Breitenkreis z ;
 $h(E)$
- ▶ $h(G) = \pi^{-1}(\sigma(\pi(G)))$ schneidet $h(E)$ in zwei antipodischen Punkten
- ▶ $h(G)$ ist Kleinkreis durch $(0, 0, z)$



3) Inverse stereografische Projektion π^{-1}

- ▶ Kreis mit Radius s wird zu Breitenkreis z ;
 $h(E)$
- ▶ $h(G) = \pi^{-1}(\sigma(\pi(G)))$ schneidet $h(E)$ in zwei antipodischen Punkten
- ▶ $h(G)$ ist Kleinkreis durch $(0, 0, z)$



Kern von \mathcal{U}_z

Theorem

[Q., 2017]

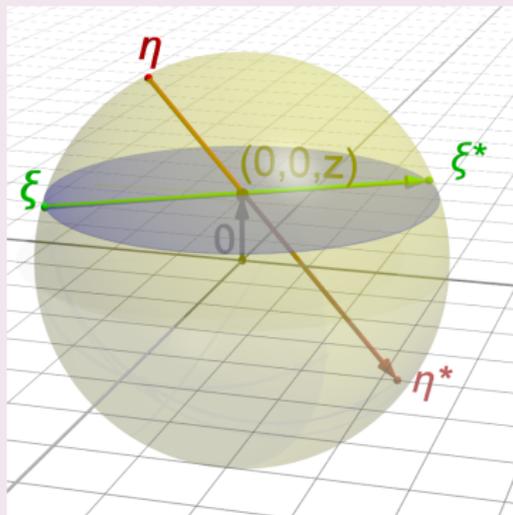
Zu $\xi \in \mathbb{S}^d$ setzen wir $\xi^* \in \mathbb{S}^d$ als die Punktspiegelung der Sphäre um den Punkt ze^{d+1} .

Sei $f \in L^2(\mathbb{S}^d)$. Dann ist

$$\mathcal{U}_z f = 0$$

genau dann, wenn für fast alle $\xi \in \mathbb{S}^d$ gilt

$$f(\xi) = - \left(\frac{1 - z^2}{1 + z^2 - 2z\eta_{d+1}} \right)^{d-1} f(\xi^*).$$



Kern von \mathcal{U}_z

Theorem

[Q., 2017]

Zu $\xi \in \mathbb{S}^d$ setzen wir $\xi^* \in \mathbb{S}^d$ als die Punktspiegelung der Sphäre um den Punkt ze^{d+1} .

Sei $f \in L^2(\mathbb{S}^d)$. Dann ist

$$\mathcal{U}_z f = 0$$

genau dann, wenn für fast alle $\xi \in \mathbb{S}^d$ gilt

$$f(\xi) = - \left(\frac{1 - z^2}{1 + z^2 - 2z\eta_{d+1}} \right)^{d-1} f(\xi^*).$$

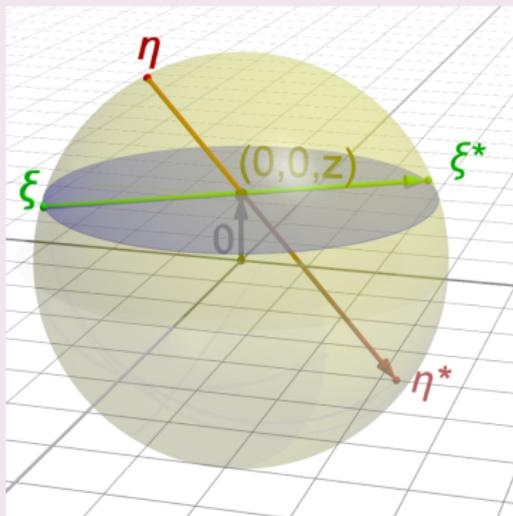


Bild von \mathcal{U}_z

Theorem

[Q., 2017]

Die verallgemeinerte Radon-Transformation

$$\mathcal{U}_z: \tilde{L}_e^2(\mathbb{S}^d) \rightarrow H_e^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{S}^d)$$

ist bijektiv und stetig.

- ▶ $\tilde{L}_e^2(\mathbb{S}^d) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{S}^d) \mid f(\boldsymbol{\xi}) = \left(\frac{1 - z^2}{1 + z^2 - 2z\eta_{d+1}} \right)^{d-1} f(\boldsymbol{\xi}) \right\}$
- ▶ $H_e^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{S}^d)$... Sobolev-Raum der geraden Funktionen mit Glattheit $\frac{d-1}{2}$

Beweisskizze

$$\mathcal{U}: L^2(\mathbb{S}^d) \xrightarrow{\mathcal{M}_z} L^2(\mathbb{S}^d) \xrightarrow{\mathcal{F}} H^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{S}^d) \xrightarrow{\mathcal{N}_z} H^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{S}^d)$$

Beweisskizze

$$\mathcal{U}: L^2(\mathbb{S}^d) \xrightarrow{\mathcal{M}_z} L^2(\mathbb{S}^d) \xrightarrow{\mathcal{F}} H^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{S}^d) \xrightarrow{\mathcal{N}_z} H^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{S}^d)$$

Haben

$$\mathcal{M}_z f(\boldsymbol{\xi}) = \left(\frac{\sqrt{1-z^2}}{1+z\xi_{d+1}} \right)^{d-1} f \circ h(\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d$$

mit

$$h(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^d \frac{\sqrt{1-z^2}}{1+z\xi_{d+1}} \xi_i \mathbf{e}^i + \frac{z+\xi_{d+1}}{1+z\xi_{d+1}} \mathbf{e}^{d+1}.$$

Lemma

$\mathcal{M}_z: L^2(\mathbb{S}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{S}^d)$ ist stetig und bijektiv.

Beweisskizze

$$\mathcal{U}: L^2(\mathbb{S}^d) \xrightarrow{\mathcal{M}_z} L^2(\mathbb{S}^d) \xrightarrow{\mathcal{F}} H^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{S}^d) \xrightarrow{\mathcal{N}_z} H^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{S}^d)$$

Haben

$$\mathcal{M}_z f(\boldsymbol{\xi}) = \left(\frac{\sqrt{1-z^2}}{1+z\xi_{d+1}} \right)^{d-1} f \circ h(\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d$$

mit

$$h(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^d \frac{\sqrt{1-z^2}}{1+z\xi_{d+1}} \xi_i \mathbf{e}^i + \frac{z+\xi_{d+1}}{1+z\xi_{d+1}} \mathbf{e}^{d+1}.$$

Lemma

$\mathcal{M}_z: L^2(\mathbb{S}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{S}^d)$ ist stetig und bijektiv.

Beweisskizze

$$\mathcal{U}: L^2(\mathbb{S}^d) \xrightarrow{\mathcal{M}_z} L^2(\mathbb{S}^d) \xrightarrow{\mathcal{F}} H^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{S}^d) \xrightarrow{\mathcal{N}_z} H^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{S}^d)$$

Theorem

[Strichartz, 1981]

Die Funk–Radon Transformation in den Räumen

$$\mathcal{F}: L^2_{\text{even}}(\mathbb{S}^d) \rightarrow H^{\frac{d-1}{2}}_{\text{even}}(\mathbb{S}^d)$$

ist stetig und bijektiv.

Beweisskizze

$$\mathcal{U}: L^2(\mathbb{S}^d) \xrightarrow{\mathcal{M}_z} L^2(\mathbb{S}^d) \xrightarrow{\mathcal{F}} H^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{S}^d) \xrightarrow{\mathcal{N}_z} H^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{S}^d)$$

Haben

$$\mathcal{N}_z f(\boldsymbol{\xi}) = \underbrace{(1 - z^2 \xi_{d+1}^2)^{-\frac{d-1}{2}}}_{\text{Multiplikation}} \underbrace{f \circ g}_{\text{Verkettung}}(\boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{S}^d$$

mit

$$g: \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d, \quad g(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\sqrt{1 - z^2 \xi_{d+1}^2}} \left(\sum_{i=1}^d \xi_i \mathbf{e}^i + \sqrt{1 - z^2 \xi_{d+1}^2} \mathbf{e}^{d+1} \right).$$

Beweisskizze

$$\mathcal{U}: L^2(\mathbb{S}^d) \xrightarrow{\mathcal{M}_z} L^2(\mathbb{S}^d) \xrightarrow{\mathcal{F}} H^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{S}^d) \xrightarrow{\mathcal{N}_z} H^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{S}^d)$$

Lemma 1

Sei $s \in \mathbb{N}_0$ und $g \in C^s(\mathbb{S}^d)$. Dann existiert c_s , so dass

$$\|fg\|_{H^s(\mathbb{S}^d)} \leq c_s \|f\|_{H^s(\mathbb{S}^d)} \|g\|_{C^s(\mathbb{S}^d)} \quad \forall f \in H^s(\mathbb{S}^d), \forall g \in C^s(\mathbb{S}^d).$$

Lemma 2

Sei $s \in \mathbb{N}_0$ und $g \in C^s(\mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d)$ ein Diffeomorphismus. Dann existiert $C_{g,s}$, so dass

$$\|f \circ g\|_{H^s(\mathbb{S}^d)} \leq C_{g,s} \|f\|_{H^s(\mathbb{S}^d)} \quad \forall f \in H^s(\mathbb{S}^d).$$

Beweisskizze

$$\mathcal{U}: L^2(\mathbb{S}^d) \xrightarrow{\mathcal{M}_z} L^2(\mathbb{S}^d) \xrightarrow{\mathcal{F}} H^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{S}^d) \xrightarrow{\mathcal{N}_z} H^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{S}^d)$$

Lemma 1

Sei $s \in \mathbb{N}_0$ und $g \in C^s(\mathbb{S}^d)$. Dann existiert c_s , so dass

$$\|fg\|_{H^s(\mathbb{S}^d)} \leq c_s \|f\|_{H^s(\mathbb{S}^d)} \|g\|_{C^s(\mathbb{S}^d)} \quad \forall f \in H^s(\mathbb{S}^d), \forall g \in C^s(\mathbb{S}^d).$$

Lemma 2

Sei $s \in \mathbb{N}_0$ und $g \in C^s(\mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^d)$ ein Diffeomorphismus. Dann existiert $C_{g,s}$, so dass

$$\|f \circ g\|_{H^s(\mathbb{S}^d)} \leq C_{g,s} \|f\|_{H^s(\mathbb{S}^d)} \quad \forall f \in H^s(\mathbb{S}^d).$$

Beweisskizze

$$\mathcal{U}: L^2(\mathbb{S}^d) \xrightarrow{\mathcal{M}_z} L^2(\mathbb{S}^d) \xrightarrow{\mathcal{F}} H^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{S}^d) \xrightarrow{\mathcal{N}_z} H^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{S}^d)$$

- ▶ Die Lemmas implizieren, dass $\mathcal{N}_z: H^s \rightarrow H^s$ stetig ist für $s \in \mathbb{N}_0$
- ▶ Dasselbe gilt für \mathcal{N}_z^{-1}
- ▶ Stetigkeit für allgemeines $s > 0$ folgt mithilfe der Theorie der Interpolationsräume [Triebel, 1995]

Beweisskizze

$$\mathcal{U}: L^2(\mathbb{S}^d) \xrightarrow{\mathcal{M}_z} L^2(\mathbb{S}^d) \xrightarrow{\mathcal{F}} H^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{S}^d) \xrightarrow{\mathcal{N}_z} H^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{S}^d)$$

- ▶ Die Lemmas implizieren, dass $\mathcal{N}_z: H^s \rightarrow H^s$ stetig ist für $s \in \mathbb{N}_0$
- ▶ Dasselbe gilt für \mathcal{N}_z^{-1}
- ▶ Stetigkeit für allgemeines $s > 0$ folgt mithilfe der Theorie der Interpolationsräume [Triebel, 1995]

Beweisskizze

$$\mathcal{U}: L^2(\mathbb{S}^d) \xrightarrow{\mathcal{M}_z} L^2(\mathbb{S}^d) \xrightarrow{\mathcal{F}} H^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{S}^d) \xrightarrow{\mathcal{N}_z} H^{\frac{d-1}{2}}(\mathbb{S}^d)$$

- ▶ Die Lemmas implizieren, dass $\mathcal{N}_z: H^s \rightarrow H^s$ stetig ist für $s \in \mathbb{N}_0$
- ▶ Dasselbe gilt für \mathcal{N}_z^{-1}
- ▶ Stetigkeit für allgemeines $s > 0$ folgt mithilfe der Theorie der Interpolationsräume [Triebel, 1995]





P. Funk.

Über Flächen mit lauter geschlossenen geodätischen Linien.

Math. Ann., 74(2): 278 – 300, 1913.



Y. Salman.

An inversion formula for the spherical transform in S^2 for a special family of circles of integration.

Anal. Math. Phys., 6(1): 43 – 58, 2016.



Y. Salman.

Recovering functions defined on the unit sphere by integration on a special family of sub-spheres.

Anal. Math. Phys., advance online publication, 2016.



M. Quellmalz.

A generalization of the Funk–Radon transform.

Inverse Problems, accepted.

\endinput