

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN – FACHBEREICH MATHEMATIK

# Drehflächen und mKdV–Solitonen

## DIPLOMARBEIT

BETREUUNG:  
PROF. DR. ULRICH PINKALL

ANGEFERTIGT VON GÜNTER PAUL LEITERER  
AM SCHÄFERSEE 47  
13407 BERLIN  
MATRIKEL-NUMMER: 141594

BERLIN, IM SEPTEMBER 1998



## Einleitung

In dem Artikel “Induced Surfaces and Their Integrable Dynamics”<sup>1</sup> stellt Boris KONOPELCHENKO eine Methode vor, Flächen in  $\mathbb{R}^3$  durch Lösungen von linearen partiellen Differentialgleichungen in zwei Variablen darzustellen. Durch diese Darstellung induziert eine zu einer solchen Gleichung assoziierte integrable nichtlineare partielle Differentialgleichung eine glatte Transformation von Flächen. Ein einfaches Beispiel für diese Methode ist die WEIERSTRASS–Darstellung von Drehflächen und die modifizierte KORTEWEG–DE VRIES–Gleichung (kurz mKdV–Gleichung)

$$u_t - u_{xxx} - 6u^2u_x = 0.$$

Dieses Beispiel wurde bereits von Iskander TAIMANOV in [Tai 97b] näher untersucht. Die in diesem Artikel angestellten Untersuchungen sind der Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit.

Der Zusammenhang zwischen der mKdV–Gleichung und der WEIERSTRASS–Darstellung von Drehflächen läßt sich folgendermaßen beschreiben. Sei  $M$  eine 2–dimensionale Mannigfaltigkeit mit komplexer Struktur und  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine konforme Immersion von  $M$  in den 3–dimensionalen euklidischen Raum, dann besitzt  $f$  in jeder holomorphen Karte  $z: M \supset V \rightarrow \mathbb{C}$  eine (lokale) WEIERSTRASS–Darstellung. Dies ist eine Abbildung  $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}: M \rightarrow \mathbb{C}^2$ , so daß

$$df = \overline{(\psi_1 + \mathbf{k}\psi_2)} dz \mathbf{j} (\psi_1 + \mathbf{k}\psi_2) \quad (*)$$

gilt, wobei  $\mathbb{R}^3$  mit  $\text{Im } \mathbb{H} = \mathbb{R}\mathbf{i} \oplus \mathbb{R}\mathbf{j} \oplus \mathbb{R}\mathbf{k}$ , dem Imaginärteil der Quaternionen, identifiziert wird, und  $\bar{\lambda}$  die zu  $\lambda \in \mathbb{H}$  konjugierte Quaternion ist. Die rechte Seite dieser Gleichung ist genau dann eine exakte Differentialform, wenn es ein sogenanntes reelles Potential  $u: V \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, so daß  $\psi$  eine Lösung der DIRAC–Gleichung

$$\mathcal{D}\psi = 0 \quad \text{mit} \quad \mathcal{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & -\frac{1}{2}u \\ \frac{1}{2}u & \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \end{pmatrix}$$

ist. Das Potential  $u$  einer gegebenen Fläche  $f$  in der Koordinate  $z$  ergibt sich aus der Gleichung  $H|df| = u|dz|$ , dabei bezeichnet  $H$  die mittlere Krümmung von  $f$ . Umgekehrt definiert jede Lösung der DIRAC–Gleichung durch die lokale WEIERSTRASS–Darstellung (\*) eine konforme Immersion  $f: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ , falls  $V \subset M$  einfach zusammenhängend ist.

---

<sup>1</sup>[Kon 96]

Für Drehflächen reduziert sich die DIRAC-Gleichung auf

$$L\tilde{\psi} = 0 \quad \text{mit} \quad L = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2} & -u \\ u & \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

für eine Abbildung  $\tilde{\psi} = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \tilde{\psi}_2 \end{pmatrix}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Die WEIERSTRASS-Darstellung der um die  $\mathbf{i}$ -Achse rotierten Fläche erhält man dann aus

$$\begin{pmatrix} \psi_1(x + \mathbf{i}\varphi) \\ \psi_2(x + \mathbf{i}\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1(x)e^{-\mathbf{i}\frac{\varphi}{2}} \\ \tilde{\psi}_2(x)e^{-\mathbf{i}\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix}. \quad (**)$$

Der Operator  $L$  kommutiert genau dann mit dem Operator

$$B = \frac{\partial}{\partial t} - \begin{pmatrix} u^2 + \frac{1}{2} & u_{xx} + u_x + 2u^3 + u \\ -u_{xx} + u_x - 2u^3 - u & -u^2 - \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

d.h.  $[L, B]\psi = L(B(\psi)) - B(L(\psi)) = 0$  für alle  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , wenn das Potential  $u$  der mKdV-Gleichung genügt. Somit ist die mKdV-Gleichung eine zu  $L$  im Sinne von [Kon 96] assoziierte nicht-lineare partielle Differentialgleichung. Sei  $f_0$  eine Drehfläche und  $\psi_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  die durch die WEIERSTRASS-Darstellung (\*) und (\*\*) von  $f_0$  definierte Abbildung. Kommutieren die Operatoren  $L$  und  $B$ , dann gibt es genau eine Lösung  $\psi$  des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen  $L\psi = 0$ ,  $B\psi = 0$  mit  $\psi|_{t=0} = \psi_0$ . Der durch  $\psi$ , (\*) und (\*\*) definierte Fluß von Drehflächen  $f_t$  ist der mKdV-Fluß von  $f_0$ .

Im ersten Kapitel dieser Arbeit werden zunächst konform parametrisierte Flächen in  $\mathbb{R}^3$  eingeführt. Im zweiten Kapitel wird dann gezeigt, daß die globale WEIERSTRASS-Darstellung eine ganz natürliche Darstellung für konform parametrisierte Flächen ist, wenn man die Drehstreckungen des  $\mathbb{R}^3$  mit Hilfe der Spin-Überlagerung durch Quaternionen  $\mathbb{H}_* = \mathbb{H} \setminus \{0\}$  beschreibt. Besonders elegant läßt sich diese Darstellung mit den Mitteln der quaternionischen Funktionentheorie herleiten. Diese Theorie wurde erstmals in [KPP 98] vorgestellt. In "Quaternionic Analysis on Riemann Surfaces and Differential Geometry" [PePi 98] von Franz PEDIT und Ulrich PINKALL findet man sie als das Standardbeispiel wieder.

Im dritten Kapitel werden Drehflächen und ihr mKdV-Fluß eingeführt. Es wird gezeigt, daß das Potential der Dualfläche einer Drehfläche bis auf einen Faktor die geodätische Krümmung  $\kappa$  der Meridiankurve dieser Fläche ist, wenn man sie als Kurve in der POINCARÉschen Halbebene auffaßt. Die kritischen Punkte der hyperbolischen Biegeenergie der Meridiankurve werden als spezielle stationäre Lösungen der mKdV-Gleichung identifiziert. Als Endergebnis dieses Kapitels erhalten wir, daß die Krümmungen  $\kappa$  des mKdV-Flusses einer Drehfläche der mKdV-Gleichung genügen. D.h. der Fluß der Dualflächen des mKdV-Flusses einer Drehfläche ist wieder ein mKdV-Fluß.

Im vierten Kapitel wird eine Vermutung von Ulrich PINKALL bewiesen, wonach der Übergang zum dualen mKdV-Fluß eine BÄCKLUND-Transformation der mKdV-Gleichung darstellt, mit der sich die  $N$ -Solitonen der mKdV-Gleichung aus der trivialen Lösung  $u = 0$  konstruieren lassen. Diese Transformation führt auf eine explizite Darstellung (bis auf Quadraturen) aller Drehflächen, deren Potential ein  $N$ -Soliton der mKdV-Gleichung ist.

Ich danke Herrn Prof. Dr. Ulrich PINKALL für die Auswahl des Themas dieser Arbeit und seine verständnisvolle Betreuung. Er half mir oft aus einer Sackgasse heraus, in der ich mich bei meiner Arbeit im stillen Kämmerlein verfangen hatte. Ich möchte mich außerdem bei meinen Kommilitonen Christoph BOHLE, Stephan ECKNER, Dr. Katrin LESCHKE und Dagmar TIMMRECK für die vielen sehr hilfreichen Hinweise zu dieser Arbeit bedanken. Für das sehr aufmerksame Korrekturlesen danke ich meiner Freundin Paula und Martin BRUCKS.



# Inhalt

Einleitung	
I. Konform parametrisierte Flächen in $\mathbb{R}^3$	
1. Parametrisierte Flächen in $\mathbb{R}^3$	1
2. Konforme Strukturen	3
3. Komplexe Strukturen	4
4. Konform parametrisierte Flächen	6
II. WEIERSTRASS-Darstellung von Flächen in $\mathbb{R}^3$	
5. Quaternionen	9
6. Die Spin-Überlagerung der Drehungen des $\mathbb{R}^3$	11
7. Spin-Transformationen und WEIERSTRASS-Darstellung	14
8. Differentialformen mit Werten in den Quaternionen	16
9. Quaternionische Funktionentheorie	17
10. WEIERSTRASS-Darstellung und DIRAC-Gleichung	18
11. Lokale WEIERSTRASS-Darstellung	20
III. Drehflächen und die mKdV-Gleichung	
12. Quaternionische Funktionentheorie für Drehflächen	25
13. WEIERSTRASS-Darstellung von Drehflächen	28
14. Der mKdV-Fluß einer Drehfläche	30
15. Symmetrien der mKdV-Gleichung und Drehflächen	36
16. Die POINCARÉsche Halbebene	37
17. Dualflächen	40
18. Die 1. Variationsgleichung der hyperbolischen Biegeenergie	42
19. Der mKdV-Fluß der Meridiankurve	45
IV. Eine BÄCKLUND-Transformation der mKdV-Gleichung	
20. Die 1-Solitonen der mKdV-Gleichung	49
21. Eine BÄCKLUND-Transformation für die mKdV-Gleichung	50
22. Der BIANCHISCHE Vertauschbarkeitssatz	55
23. N-Solitonen der mKdV-Gleichung und die zugehörigen Drehflächen	58
Literatur	65

# I. Konform parametrisierte Flächen in $\mathbb{R}^3$

In diesem Kapitel werden die grundlegenden Begriffe zur Behandlung konform parametrisierter Flächen  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  eingeführt und ihr Zusammenhang mit komplexen und konformen Strukturen auf der zugrundeliegenden 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$  dargestellt.

Der im Abschnitt 4 beschriebene Übergang von einer konform parametrisierten Fläche zu einer beliebigen anderen führt im nächsten Kapitel zu der WEIERSTRASS-Darstellung konform parametrisierter Flächen.

## 1. Parametrisierte Flächen in $\mathbb{R}^3$

**1.1.** Eine *parametrisierte Fläche* in  $\mathbb{R}^3$  ist eine 2-dimensionale glatte Mannigfaltigkeit  $M$  zusammen mit einer glatten Immersion

$$f: M \longrightarrow \mathbb{R}^3.$$

Durch eine solche Immersion wird auf  $M$  eine RIEMANNsche Metrik

$$g(X, Y) := \langle df(X), df(Y) \rangle,$$

für  $X, Y \in T_p M$  und  $p \in M$  induziert, wobei  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  das kanonische Skalarprodukt von  $\mathbb{R}^3$  bezeichnet.

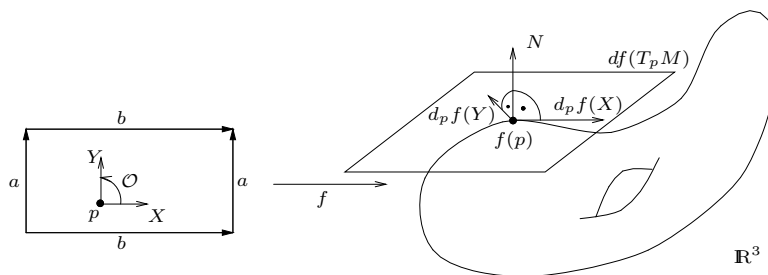


BILD 1. Eine Immersion des Torus in den  $\mathbb{R}^3$ .

**1.2.** Eine *Orientierung*  $\mathcal{O}$  auf einer  $n$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$  ist eine Äquivalenzklasse von nicht verschwindenden  $n$ -Formen  $\omega$  mit der Relation:  $\omega$  ist äquivalent zu  $\tilde{\omega}$  genau dann, wenn es eine positive reellwertige Funktion  $r: M \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  gibt, so daß  $\omega = r\tilde{\omega}$  ist.

Gibt es überhaupt eine nicht verschwindende  $n$ -Form auf  $M$ , so heißt  $M$  *orientierbar*. Auf einer orientierbaren zusammenhängenden Mannigfaltigkeit  $M$  gibt es genau zwei Orientierungen, weil zwei nicht verschwindende

$n$ -Formen  $\omega$  und  $\tilde{\omega}$  genau dann äquivalent sind, wenn  $\omega(X_1, \dots, X_n)$  und  $\tilde{\omega}(X_1, \dots, X_n)$  in einem Punkt  $p \in M$  für eine Basis  $(X_1, \dots, X_n)$  von  $T_pM$  das gleiche Vorzeichen besitzen. Wurde auf  $M$  eine Orientierung gewählt, so nennt man  $(M, \mathcal{O})$  eine *orientierte Mannigfaltigkeit*. Eine Basis  $(X_1, \dots, X_n)$  von  $T_pM$  heißt *positiv orientiert*, wenn  $\omega(X_1, \dots, X_n) > 0$  für ein  $\omega \in \mathcal{O}$  ist.

**1.3.** Ein *Normalenvektor*  $N$  der parametrisierten Fläche  $(M, f)$  ist eine glatte Abbildung

$$N: M \longrightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3,$$

so daß  $N(p)$  in allen Punkten  $p \in M$  senkrecht auf  $df(T_pM)$  steht.

**1.4. Satz.** *Sei  $(M, f)$  eine parametrisierte Fläche. Dann gibt es zu einer Orientierung auf  $M$  genau einen Normalenvektor  $N: M \rightarrow S^2$ , so daß eine Basis  $(X, Y)$  von  $T_pM$  genau dann positiv orientiert ist, wenn  $(df(X), df(Y), N(p))$  eine positiv orientierte Basis von  $\mathbb{R}^3$  ist.*

*Umgekehrt gibt es zu jedem Normalenvektor  $N: M \rightarrow S^2$  von  $(M, f)$  genau eine Orientierung, so daß positiv orientierte Basen von  $T_pM$  und entsprechende von  $\mathbb{R}^3$  auf diese Art zueinander in Beziehung stehen.*

*Beweis.* Sei auf  $(M, f)$  eine Orientierung  $\mathcal{O}$  gegeben. Wähle eine positiv orientierte Basis  $(X, Y)$  von  $T_pM$  und definiere den Normalenvektor in  $p \in M$  durch

$$N(p) := \frac{1}{\|d_p f(X) \times d_p f(Y)\|} d_p f(X) \times d_p f(Y).$$

Man sieht sofort  $N(p) \in S^2$  und  $N(p) \perp df(T_pM)$ . Außerdem ist die Definition von  $N(p)$  unabhängig von der Wahl der positiv orientierten Basis. Denn für eine weitere Basis  $\tilde{X} = aX + bY$ ,  $\tilde{Y} = cX + dY$ ,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  und eine 2-Form  $\omega \in \mathcal{O}$  gilt  $\omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) = (ad - bc)\omega(X, Y)$ . Demnach ist  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$  genau dann positiv orientiert, wenn  $(ad - bc) > 0$  ist. Daraus folgt

$$\frac{1}{\|df(\tilde{X}) \times df(\tilde{Y})\|} df(\tilde{X}) \times df(\tilde{Y}) = \frac{1}{\|df(X) \times df(Y)\|} df(X) \times df(Y).$$

Damit erfüllt  $N(p)$  die gewünschte Bedingung, denn

$(df(\tilde{X}), df(\tilde{Y}), N(p))$  ist positiv orientiert

$$\iff 0 < \langle df(\tilde{X}) \times df(\tilde{Y}), N(p) \rangle = (ad - bc) \langle df(X) \times df(Y), N(p) \rangle$$

$$\iff 0 < (ad - bc)$$

$$\iff (\tilde{X}, \tilde{Y}) \text{ ist positiv orientiert.}$$

Aus der Unabhängigkeit der Definition von  $N(p)$  von der Wahl der positiv orientierten Basis  $(X, Y)$  folgt, daß  $N$  glatt von  $p$  abhängt. Denn in einer Umgebung  $U \subset M$  von  $p$  lassen sich  $X$  und  $Y$  zu glatten, linear unabhängigen Vektorfeldern  $X, Y \in \Gamma|_U(M)$  fortsetzen. In jedem Punkt  $q \in U$  bilden dann  $X(q)$  und  $Y(q)$  eine positiv orientierte Basis von  $T_qM$ . Also ist der Normalenvektor auf  $U$  durch die glatte Abbildung

$$N(q) = \frac{1}{\|df(X(q)) \times df(Y(q))\|} df(X(q)) \times df(Y(q))$$

gegeben.

Die Eindeutigkeit von  $N$  folgt aus der Tatsache, daß es zu jedem  $p \in M$  genau zwei normierte Vektoren,  $N(p)$  und  $-N(p)$ , gibt, die in  $\mathbb{R}^3$  senkrecht auf  $df(T_pM)$  stehen. Die Basis  $(df(X), df(Y), -N(p))$  ist aber nicht positiv orientiert, wenn  $(df(X), df(Y), N(p))$  positiv orientiert ist.

Sei umgekehrt ein Normalenvektor  $N$  von  $(M, f)$  gegeben. Dann wird durch  $\omega_N(X, Y) := \langle df(X) \times df(Y), N \rangle$  eine 2-Form auf  $M$  definiert. Weil  $\omega_N(X, Y) = \pm \|df(X) \times df(Y)\|$  für zwei linear unabhängige Vektoren  $X$  und  $Y \in T_pM$  nicht null ist, ist  $\omega_N$  eine nicht verschwindende 2-Form, die eine Orientierung auf  $M$  definiert, in der  $\langle df(X) \times df(Y), N(p) \rangle$  genau dann positiv orientiert ist, wenn  $(X, Y)$  eine positiv orientierte Basis von  $T_pM$  ist.  $\square$

## 2. Konforme Strukturen

**2.1. Definition.** Zwei RIEMANNsche Metriken  $g$  und  $\tilde{g}$  auf  $M$  heißen genau dann *konform äquivalent*, wenn es eine glatte Funktion  $u: M \rightarrow \mathbb{R}$  gibt mit

$$\tilde{g} = e^{2u}g.$$

Die Funktion  $u$  wird der *konforme Faktor* von  $\tilde{g}$  bzgl.  $g$  genannt. Eine Äquivalenzklasse konformer Metriken heißt *konforme Struktur* auf  $M$ .

**2.2.** Zum Rechnen in konformen Strukturen ist die folgende Umformulierung des Satzes von PYTHAGORAS sehr nützlich.

**Lemma.** Sei  $g$  eine RIEMANNsche Metrik auf  $M$  und seien  $X$  und  $Y$  zwei gleich lange orthogonale Vektoren in  $T_pM$ , d.h.  $\|X\|^2 = \|Y\|^2$  und  $g(X, Y) = 0$ . Dann gilt für beliebige  $a, b \in \mathbb{R}$ :

$$\|aX + bY\| = |a + bi| \|X\|.$$

Hier steht  $i \in \mathbb{C}$  für die imaginäre Einheit der komplexen Zahlen.

*Beweis.* Nach dem Satz von PYTHAGORAS gilt für die beiden aufeinander senkrecht stehenden Vektoren  $aX$  und  $bY$

$$\|aX + bY\|^2 = \|aX\|^2 + \|bY\|^2 = (a^2 + b^2)\|X\|^2.$$

$\square$

**2.3. Satz.** Zwei RIEMANNsche Metriken  $g$  und  $\tilde{g}$  auf einer 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$  sind genau dann konform äquivalent, wenn es in jedem Punkt  $p \in M$  zwei bzgl.  $g$  gleich lange orthogonale Vektoren  $X$  und  $Y \in T_pM \setminus \{0\}$  gibt, die auch bzgl.  $\tilde{g}$  gleich lang und orthogonal sind.

Für konform äquivalente Metriken  $g$  und  $\tilde{g}$  sind sogar beliebige Vektoren aus  $T_pM$  genau dann bzgl.  $g$  gleich lang oder orthogonal, wenn sie es bzgl.  $\tilde{g}$  sind.

*Beweis.* Sei  $u: M \rightarrow \mathbb{R}$ , so daß  $\tilde{g} = e^{2u}g$  gilt und seien  $X, Y \in T_pM$  Vektoren mit

$$g(X, X) = g(Y, Y) \quad \text{und} \quad g(X, Y) = 0.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\tilde{g}(X, X) &= e^{2u}g(X, X) = e^{2u}g(Y, Y) = \tilde{g}(Y, Y) \\ \tilde{g}(X, Y) &= e^{2u}g(X, Y) = 0.\end{aligned}$$

Damit ist die eine Richtung gezeigt.

Definiere für die Umkehrung den konformen Faktor durch

$$u(p) := \frac{1}{2}(\ln \tilde{g}(Z, Z) - \ln g(Z, Z))$$

für ein  $Z \in T_pM \setminus \{0\}$ . Diese Definition hängt nicht von der Wahl von  $Z$  ab. Denn  $Z$  läßt sich als  $Z = aX + bY$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$  schreiben, wobei  $X$  und  $Y$  die beiden Vektoren in  $T_pM$  sind, die bzgl.  $g$  sowie bzgl.  $\tilde{g}$  gleich lang und orthogonal sind. Aus Lemma 2.2 erhält man:

$$\ln \left( \frac{\tilde{g}(Z, Z)}{g(Z, Z)} \right) = \ln \left( \frac{|a + b\mathbf{i}| \tilde{g}(X, X)}{|a + b\mathbf{i}| g(X, X)} \right).$$

Also ist die Definition von  $u(p)$  unabhängig von der Wahl von  $Z$ . Insbesondere ist  $u$  damit glatt vom Punkt  $p \in M$  abhängig. Es bleibt noch nachzurechnen, daß  $u$  der gesuchte konforme Faktor ist. Es gilt

$$\tilde{g}(Z, Z) = \frac{\tilde{g}(Z, Z)}{g(Z, Z)} g(Z, Z) = e^{\ln \tilde{g}(Z, Z) - \ln g(Z, Z)} g(Z, Z) = e^{2u} g(Z, Z)$$

für alle  $Z \in T_pM \setminus \{0\}$ . Also sind  $g$  und  $\tilde{g}$  konform äquivalent.  $\square$

### 3. Komplexe Strukturen

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, daß es genügt, in jedem Punkt einer 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$  zwei Tangentialvektoren zu finden, die bzgl. zweier RIEMANNScher Metriken gleich lang und orthogonal sind, um zu beweisen, daß die beiden Metriken konform äquivalent sind.

Ein Paar solcher Vektoren erhält man aus einem beliebigen, von Null verschiedenen Vektor, indem man ihn um  $+90^\circ$  oder um  $-90^\circ$  dreht. Die Drehungen um  $\pm 90^\circ$  in  $T_pM$  zeichnen sich dadurch aus, daß sie Isometrien sind und ihr Quadrat gleich  $-\text{Id}_{T_pM}$  ist. Durch diese beiden Eigenschaften werden die Drehungen um  $\pm 90^\circ$  in  $T_pM$  vollständig charakterisiert.

**3.1. Definition.** Sei  $M$  eine  $2k$ -dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine *fast komplexe Struktur* auf  $TM$  (bzw. auf  $M$ ) ist ein glatter Tensor

$$J: TM \longrightarrow TM \quad \text{mit} \quad J^2 = -\text{Id}_{TM}.$$

Eine Mannigfaltigkeit zusammen mit einer fast komplexen Struktur  $(M, J)$  heißt *fast komplex*. Gibt es für jeden Punkt  $p \in M$  eine Umgebung  $U \subset M$  und eine holomorphe Karte  $z: U \rightarrow \mathbb{C}^k$ , d.h.:

$$dz(JX) = \mathbf{i} dz(X)$$

für alle  $X \in TM$ , dann nennt man  $(M, J)$  eine *komplexe Mannigfaltigkeit* und  $J$  eine *komplexe Struktur*.

Durch eine fast komplexe Struktur  $J$  wird jeder Tangentialraum an  $M$  durch

$$(a + b\mathbf{i}) \cdot X := aX + bJX, \quad \text{für alle } X \in T_pM, \quad a + b\mathbf{i} \in \mathbb{C},$$

zu einem komplexen Vektorraum. Deshalb spricht man auch von einer  $k$ -dimensionalen (fast) komplexen Mannigfaltigkeit  $M$ , falls  $M$  eine  $2k$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit (fast) komplexer Struktur ist. In dieser Arbeit bezeichnet “(fast) komplexe 2-dimensionale Mannigfaltigkeit” hingegen eine reell 2-dimensionale Mannigfaltigkeit mit (fast) komplexer Struktur.

**3.2. Definition.** Eine fast komplexe Struktur  $J$  auf einer RIEMANNschen Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  heißt *mit der Metrik verträglich*, falls

$$g(JX, JX) = g(X, X)$$

für alle  $X \in T_pM$ ,  $p \in M$  gilt.

Eine fast komplexe Struktur  $J$  ist genau dann mit einer zu  $g$  konform äquivalenten Metrik  $\tilde{g}$  verträglich, wenn  $J$  mit  $g$  verträglich ist. Man kann daher auch von der Verträglichkeit von  $J$  mit einer konformen Struktur sprechen.

**3.3.** Für eine mit  $g$  verträgliche fast komplexe Struktur  $J$  gelten außerdem die Gleichungen

$$\begin{aligned} g(JX, JY) &= \frac{1}{4} \left[ g(J(X+Y), J(X+Y)) \right. \\ &\quad \left. - g(J(X-Y), J(X-Y)) \right] = g(X, Y), \\ \implies g(JX, Y) &= g(J^2X, JY) = -g(X, JY), \\ \implies g(JX, X) &= -g(X, JX) = 0 \end{aligned}$$

für alle  $X, Y \in T_pM$ ,  $p \in M$ . Die erste und die dritte Gleichung zeigen, daß  $J$  eine Isometrie ist, für die  $X \perp JX$  gilt. Wenn  $X$  und  $JX$  eine positiv orientierte Basis in der auf  $M$  gegebenen Orientierung bilden, folgt, daß  $J$  die  $90^\circ$ -Drehung der Metrik  $g$  mit positivem Drehsinn ist.

**3.4.** Die komplexen Strukturen auf 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten stehen, bis auf die Wahl einer Orientierung, in eindeutiger Beziehung zu den konformen Strukturen.

**Satz.** *i) Zu jeder komplexen Struktur  $J$  auf einer 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$  gibt es genau eine konforme Struktur, mit der  $J$  verträglich ist. Außerdem gibt es genau eine Orientierung von  $M$ , so daß das Paar  $(X, JX)$  für alle  $X \in T_pM \setminus \{0\}$  eine positiv orientierte Basis von  $T_pM$  ist.*

*ii) Umgekehrt definieren eine konforme Struktur und eine Orientierung auf  $M$  genau eine mit der konformen Struktur verträgliche komplexe Struktur  $J$ , so daß  $X$  und  $JX$  für alle  $X \in T_pM \setminus \{0\}$  eine positiv orientierte Basis von  $T_pM$  bilden.*

*Beweis.* i) Sei  $h$  eine beliebige RIEMANNsche Metrik auf  $M$ . Dann ist  $J$  mit der Metrik

$$g(X, Y) := h(X, Y) + h(JX, JY), \quad X, Y \in T_pM$$

verträglich. Ist  $J$  mit einer weiteren RIEMANNschen Metrik  $\tilde{g}$  verträglich, dann folgt mit der letzten Formel von 3.3, daß  $X$  und  $JX$  zwei bzgl.  $g$  und

$\tilde{g}$  gleich lange und orthogonale Vektoren sind. Also sind  $g$  und  $\tilde{g}$  konform äquivalent (Satz 2.3).

Die 2-Form  $\omega(X, Y) := -g(X, JY)$  definiert eine Orientierung  $\mathcal{O}$  von  $M$ , in der die Vektoren  $X$  und  $JX$  eine positiv orientierte Basis bilden, weil  $\omega(X, JX) = \|X\|^2 > 0$  ist. In der anderen durch  $-\omega$  definierten Orientierung von  $M$  ist  $X, JX$  nicht positiv orientiert, dadurch ist  $\mathcal{O}$  eindeutig bestimmt.

ii) Seien nun eine Orientierung und eine konforme Struktur auf  $M$  gegeben. Seien  $X$  und  $Y$  gleich lange orthogonale Vektoren, die eine positiv orientierte Basis von  $T_pM$  bilden. Definiere

$$J_p(aX + bY) := -bX + aY$$

für beliebige Vektoren  $aX + bY \in T_pM$ . Man sieht sofort, daß  $J^2 = -\text{Id}_{T_pM}$  gilt.

Sei  $Z = aX + bY \in T_pM$  ein beliebiger Vektor und  $g$  ein Repräsentant der konformen Struktur. Dann ist

$$g(JZ, JZ) = (a^2 + b^2)\|X\|^2 = g(Z, Z).$$

Die komplexe Struktur  $J$  ist also mit der konformen Struktur von  $g$  verträglich.

Für einen Repräsentanten der Orientierung  $\omega$  erhält man

$$\omega(Z, JZ) = \omega(aX + bY, -bX + aY) = (a^2 + b^2)\omega(X, Y) > 0,$$

falls  $Z \neq 0$  ist. Daraus folgt, daß  $J$  die Drehung um  $+90^\circ$  ist, unabhängig von der Wahl der Vektoren  $X$  und  $Y$ .  $J$  ist damit eindeutig bestimmt und differenzierbar vom Punkt  $p \in M$  abhängig. □

**3.5.** Für die duale Abbildung einer fast komplexen Struktur ist die folgende Schreibweise sehr nützlich.

**Definition** ( $*$ -Operator). Sei  $(M, J)$  eine fast komplexe Mannigfaltigkeit. Dann definiert  $J$  eine Abbildung  $*$  auf den 1-Formen durch

$$\begin{aligned} *: T^*M &\longrightarrow T^*M \\ \alpha &\longmapsto \alpha \circ J \end{aligned}$$

die duale Abbildung zu  $J$ .

Es gilt  $*^2 = -\text{Id}_{T^*M}$ , demnach ist  $*$  eine fast komplexe Struktur auf  $T^*M$ . Außerdem ist der  $*$ -Operator der negative Hodge-Operator jeder mit  $J$  verträglichen Metrik  $g$ . Denn für einen Vektor  $X \in T_pM$  der Länge 1 bilden  $\omega^X := g(X, \cdot)$  und  $\omega^{JX} := g(JX, \cdot)$  eine Orthonormalbasis von  $T_p^*M$ , auf welcher der Hodge-Operator und der Operator ' $*$ ' übereinstimmen, da aus der zweiten Formel in 3.3 die Gleichungen  $*\omega^X = -\omega^{JX}$  und  $*\omega^{JX} = \omega^X$  folgen.

## 4. Konform parametrisierte Flächen

**4.1. Definition.** Sei  $(M, J)$  eine komplexe 2-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann heißt eine glatte Abbildung

$$f: M \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

*konform*, falls

$$\|df(X)\| = \|\ast df(X)\| \quad (*)$$

für alle  $X \in TM$  gilt. Das Tripel  $(M, J, f)$  ist eine *konform parametrisierte Fläche*, falls  $f$  eine konforme Immersion ist.

**4.2. Bemerkungen.** i) Eine Immersion  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist genau dann konform, wenn  $J$  mit der durch  $f$  auf  $M$  induzierten Metrik verträglich ist. Mit Satz 3.4 folgt, daß alle konformen Immersionen  $f$  dieselbe konforme Struktur auf  $M$  definieren.

ii) Aus 3.3 ergeben sich für konforme Abbildungen  $f$  die folgenden drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \langle \ast df(X), \ast df(Y) \rangle &= \langle df(X), df(Y) \rangle, \\ \langle df(X), \ast df(Y) \rangle &= -\langle \ast df(X), df(Y) \rangle, \\ df(X) &\perp \ast df(X) \end{aligned}$$

für alle  $X$  und  $Y \in T_p M$ ,  $p \in M$ .

iii) Nach Lemma 2.2 genügt es, in jedem Punkt  $p \in M$  einen Vektor  $X \in T_p M \setminus \{0\}$  zu finden, für den

$$\|df(X)\| = \|\ast df(X)\| \quad \text{und} \quad \langle df(X), \ast df(X) \rangle = 0$$

gilt, um zu zeigen, daß  $f$  konform ist.

iv) Für eine konforme Immersion  $f$  folgt andererseits

$$\|df(aX + bJX)\| = |a + b\mathbf{i}| \|df(X)\|$$

für alle  $X \in T_p M$  und  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**4.3.** Der nächste Satz bildet die Grundlage der im folgenden vorgestellten Flächentheorie. Er beschreibt die Gruppe der Transformationen zwischen zwei beliebigen Immersionen einer 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M$ , welche dieselbe konforme Struktur auf  $M$  induzieren.

**Satz.** Seien durch  $(M, J, f)$  und  $(M, J, \tilde{f})$  zwei konform parametrisierte Flächen gegeben. Dann gibt es genau eine Drehstreckung, die ihre Differentiale  $df$  und  $d\tilde{f}$  aufeinander abbildet. Das heißt, es gibt zwei glatte Abbildungen  $u: M \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\Lambda: M \rightarrow \text{SO}(\mathbb{R}^3)$ , so daß

$$d\tilde{f}(X) = e^{u(p)} \Lambda(p)(df(X))$$

für alle  $X \in T_p M$  und  $p \in M$  gilt.

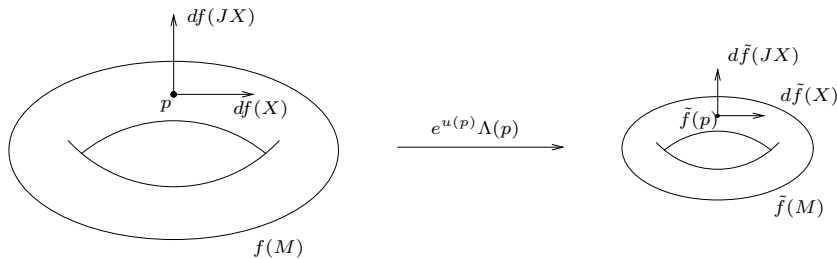


BILD 2. Zwei konforme Immersionen  $f$  und  $\tilde{f}$  des Torus.

Die Darstellung einer Drehstreckung durch eine reelle Zahl  $u$  und eine Drehung  $\Lambda$  ist ein Isomorphismus zwischen  $\mathbb{R} \times \text{SO}(\mathbb{R}^3)$  und der Gruppe der Drehstreckungen des  $\mathbb{R}^3$ .

*Beweis.* Fixiere einen Punkt  $p \in M$  und einen Vektor  $X \in T_p M \setminus \{0\}$ . Dann existiert genau eine Drehung  $\Lambda_p^X \in \text{SO}(\mathbb{R}^3)$ , die

$$\frac{df(X)}{\|df(X)\|} \xrightarrow{\Lambda_p^X} \frac{d\tilde{f}(X)}{\|d\tilde{f}(X)\|}$$

und

$$\frac{df(JX)}{\|df(JX)\|} \xrightarrow{\Lambda_p^X} \frac{d\tilde{f}(JX)}{\|d\tilde{f}(JX)\|}$$

aufeinander abbildet. Diese Drehung ist nicht von  $X$  abhängig. Denn für einen weiteren Vektor  $\tilde{X} = aX + bJX \in T_p M \setminus \{0\}$  folgt mit Lemma 2.2:

$$\begin{aligned} \Lambda_p^X \left( \frac{d\tilde{f}(\tilde{X})}{\|d\tilde{f}(\tilde{X})\|} \right) &= \frac{\|df(X)\|}{\|d\tilde{f}(\tilde{X})\|} \left( a\Lambda_p^X \left( \frac{df(X)}{\|df(X)\|} \right) + b\Lambda_p^X \left( \frac{df(JX)}{\|df(JX)\|} \right) \right) \\ &= \frac{\|df(X)\|}{|a+b\mathbf{i}|\|df(X)\|} \left( a \frac{d\tilde{f}(X)}{\|d\tilde{f}(X)\|} + b \left( \frac{d\tilde{f}(JX)}{\|d\tilde{f}(JX)\|} \right) \right) \\ &= \frac{1}{|a+b\mathbf{i}|} \frac{1}{\|d\tilde{f}(X)\|} d\tilde{f}(\tilde{X}) = \frac{d\tilde{f}(\tilde{X})}{\|d\tilde{f}(\tilde{X})\|}. \end{aligned}$$

Analog zeigt man:

$$\Lambda_p^X \left( \frac{df(J\tilde{X})}{\|df(J\tilde{X})\|} \right) = \frac{d\tilde{f}(J\tilde{X})}{\|d\tilde{f}(J\tilde{X})\|}.$$

Daher stimmen die beiden Drehungen  $\Lambda_p^X$  und  $\Lambda_p^{\tilde{X}}$  auf zwei linear unabhängigen Vektoren des  $\mathbb{R}^3$  überein, d.h. sie sind gleich.

Da  $f$  und  $\tilde{f}$  konform äquivalente Metriken auf  $M$  induzieren, existiert eine glatte Funktion  $u: M \rightarrow \mathbb{R}$ , so daß für alle  $X \in T_p M$ ,  $X \neq 0$  gilt:

$$e^{u(p)} = \frac{\|d\tilde{f}(X)\|}{\|df(X)\|}.$$

Damit haben wir eine glatte Abbildung  $\Lambda: M \rightarrow \text{SO}(\mathbb{R}^3)$  gefunden, die mit  $e^u: M \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  multipliziert  $df$  auf  $d\tilde{f}$  abbildet.  $\square$

## II. Weierstraß-Darstellung von Flächen in $\mathbb{R}^3$

Im Abschnitt 4 haben wir gesehen, daß man alle konformen Immersionen  $\tilde{f}: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  aus einer konformen *Referenzimmersion*  $f$  erhält, indem man eine Drehstreckung  $e^u\Lambda$  auf das Differential  $df$  von  $f$  anwendet. Es stellt sich nun die Frage, für welche Drehstreckungen die 1-Form  $e^u\Lambda(df)$  exakt ist, d.h. welche Drehstreckungen zumindest lokal bzw. auf der universellen Überlagerung von  $M$  eine neue konforme Immersion definieren.

Dazu ist es nützlich, sich den euklidischen Raum  $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{H}$  als Teilmenge der Quaternionen vorzustellen, und die Drehstreckung durch  $\mathbb{R}^3 \ni y \mapsto \bar{\lambda}y\lambda$  für ein Element  $\lambda \in \mathbb{H}_* := \mathbb{H} \setminus \{0\}$  darzustellen. Als Grundlagen werden Quaternionen, die Spin(3)-Überlagerung der  $SO(\mathbb{R}^3)$  und Differentialformen mit Werten in den Quaternionen eingeführt.

Mit diesen Voraussetzungen lassen sich die Drehstreckungen  $e^u\Lambda$  durch Abbildungen  $\lambda: M \rightarrow \mathbb{H}_*$  darstellen. Mit den Mitteln der quaternionischen Funktionentheorie erhält man sehr einfach die Antwort auf obige Frage: Die Spin-Transformation  $\lambda$  muß eine gewisse zu  $f$  gehörende DIRAC-Gleichung erfüllen. Die Darstellung einer Immersion  $\tilde{f}$  als Spin-Transformation einer Referenzimmersion  $f$  ist eine WEIERSTRASS-Darstellung von  $\tilde{f}$ . Schließlich wird gezeigt, daß jede konform parametrisierte Fläche  $f$  in  $\mathbb{R}^3$  eine lokale WEIERSTRASS-Darstellung besitzt.

### 5. Quaternionen

In diesem Abschnitt werden die Definition der Quaternionen und einige Rechenregeln für Quaternionen ohne Beweis zusammengefaßt.<sup>2</sup>

**5.1.** Bezeichne  $1, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  die kanonische Basis des  $\mathbb{R}^4$ , d.h.:

$$\begin{aligned} 1 &:= e_1 = (1, 0, 0, 0), & \mathbf{i} &:= e_2 = (0, 1, 0, 0), \\ \mathbf{j} &:= e_3 = (0, 0, 1, 0), & \mathbf{k} &:= e_4 = (0, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

Durch

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = -1 \quad \text{und} \quad \mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \tag{*}$$

wird durch  $\mathbb{R}$ -bilineare Fortsetzung eine Multiplikation zwischen den Vektoren des  $\mathbb{R}^4$  beschrieben, die sogenannte HAMILTONSche *Multiplikation*. Die dadurch definierte 4-dimensionale assoziative Algebra über  $\mathbb{R}$  wird die Algebra der *Quaternionen*  $\mathbb{H}$  genannt.

---

<sup>2</sup>Eine ausführliche Einführung in die Quaternionen von Max KOECHER und Reinhold REMMERT findet sich im 7. Kapitel des Buches [Zahlen].

An dieser Stelle müßte man eigentlich nachrechnen oder wie in [Zahlen] aus der Darstellung der Quaternionen als Untergruppe von  $GL(2, \mathbb{C})$  folgern, daß die Quaternionen mit  $(*)$  wirklich eine assoziative Algebra bilden. Für das Produkt beliebiger Quaternionen erhält man dann:

$$\begin{aligned} (a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k})(e + f\mathbf{i} + g\mathbf{j} + h\mathbf{k}) \\ = ae - bf - cg - dh + (af + be + ch - dg)\mathbf{i} \\ + (ag - bh + ce + df)\mathbf{j} + (ah + bg - cf + de)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

**5.2.** In  $\mathbb{H}$  findet man den Körper der reellen Zahlen als  $a1$  für  $a \in \mathbb{R}$  und den Vektorraum  $\mathbb{R}^3$  als  $b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$  für  $(b, c, d) \in \mathbb{R}^3$  wieder. Im folgenden werden wir nicht zwischen  $\mathbb{R}$  bzw.  $\mathbb{R}^3$  und den entsprechenden Teilmengen der Quaternionen unterscheiden. Die Additionen und Multiplikationen von  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{R}^3$  werden durch die Addition und die Multiplikation in  $\mathbb{H}$  beschrieben. Man kann beispielsweise das Produkt  $a \cdot x$  für  $a \in \mathbb{R}$  und  $x \in \mathbb{R}^3$  als Multiplikation mit Skalaren des Vektorraums  $\mathbb{R}^3$  oder als HAMILTONSche Multiplikation interpretieren.

**5.3.** Analog zum *Real-* und *Imaginärteil* von komplexen Zahlen definiert man folgende Projektionen

$$\begin{aligned} \text{Re: } \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{R}, & a1 + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} &\longmapsto a1, \\ \text{Im: } \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{R}^3, & a1 + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k} &\longmapsto b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3 = \text{Re}(\mathbb{H}) \oplus \text{Im}(\mathbb{H}).$$

Die *Konjugierte* einer Quaternion wird durch die Gleichung

$$\overline{a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}} := a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$$

und der *Betrag* einer Quaternion durch

$$|x|^2 := x\bar{x}$$

definiert. Dies ist die gewöhnliche Länge der Quaternion  $x$  als Vektor in  $\mathbb{R}^4$ . Damit läßt sich das Inverse einer Quaternion  $x \in \mathbb{H}_* := \mathbb{H} \setminus \{0\}$  berechnen

$$x^{-1} = \frac{1}{|x|^2} \bar{x}.$$

Die Quaternionen bilden daher einen Schiefkörper, der wegen  $\mathbf{ij} \neq \mathbf{ji}$  nicht kommutativ ist.

**5.4.** Im folgenden Satz werden einige wichtige Rechenregeln für Quaternionen sowie Beziehungen zwischen der HAMILTONSchen Multiplikation, dem Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  des  $\mathbb{R}^4$  und dem Vektorprodukt  $\times$  des  $\mathbb{R}^3$  ohne Beweis angegeben.

**Satz** (Rechenregeln für Quaternionen).

- (1)  $\text{Re}(x) = \frac{1}{2}(x + \bar{x})$ ,  $\text{Im}(x) = \frac{1}{2}(x - \bar{x})$ .
- (2)  $|xy| = |x||y|$ .
- (3)  $\overline{\bar{y}} = y$ .
- (4) Die Skalarproduktformel:  $\text{Re}(x\bar{y}) = \langle x, y \rangle$ .
- (5) Ein Orthogonalitätskriterium:  $x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow x\bar{y} \in \mathbb{R}^3$ .

(6) Die Produktformel für imaginäre Quaternionen  $x, y \in \mathbb{R}^3$ :

$$xy = -\langle x, y \rangle + x \times y,$$

Insbesondere gilt:

- a)  $xy = -yx \Leftrightarrow xy \in \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow x \perp y$ ,  
 b)  $xy = yx \Leftrightarrow xy \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \parallel y$ .

## 6. Die Spin-Überlagerung der Drehungen des $\mathbb{R}^3$

**6.1. Definition.** Seien  $X$  und  $Y$  zwei zusammenhängende und lokal wegzusammenhängende topologische Räume. Dann heißt eine stetige, surjektive Abbildung

$$\pi: X \longrightarrow Y$$

eine  $n$ -fache Überlagerung von  $Y$ , wenn für jeden Punkt  $y \in Y$  eine wegzusammenhängende Umgebung  $U \subset Y$  existiert, so daß sich ihr Urbild  $\pi^{-1}(U) = V_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} V_n$  als disjunkte Vereinigung  $n$  offener Mengen aus  $X$  schreiben läßt, auf denen  $\pi|_{V_\alpha}$  ein Homöomorphismus  $V_\alpha \rightarrow U$  ist.

Sei  $Z$  ein weiterer topologischer Raum und  $\varphi: Z \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung, dann heißt  $\tilde{\varphi}$  eine (stetige) Hochhebung von  $\varphi$ , wenn  $\pi \circ \tilde{\varphi} = \varphi$  gilt.

**6.2.** Aus der Überlagerungstheorie übernehmen wir den Satz über die Existenz und Eindeutigkeit einer stetigen Hochhebung ohne Beweis.<sup>3</sup>

**Satz.** Sei  $\pi: X \rightarrow Y$  eine Überlagerung. Sei  $Z$  ein weiterer wegzusammenhängender und lokal wegzusammenhängender topologischer Raum und  $\varphi: Z \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung. Wähle einen Basispunkt  $z_0 \in Z$  und  $x_0 \in \pi^{-1}(\varphi(z_0))$ . Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent.

a) Es existiert genau eine stetige Hochhebung  $\tilde{\varphi}: Z \rightarrow X$  von  $\varphi$  mit  $\tilde{\varphi}(z_0) = x_0$ , d.h.  $\tilde{\varphi}$  vervollständigt das folgende Diagramm zu einem kommutativen Diagramm stetiger Abbildungen:

$$\begin{array}{ccc} & & (X, x_0) \\ & \nearrow \exists! \tilde{\varphi} & \downarrow \pi \\ (Z, z_0) & \xrightarrow{\varphi} & (Y, \varphi(z_0)) \end{array}$$

b) Das Bild der durch  $\varphi$  induzierten Abbildung

$$\varphi_\#: \pi_1(Z, z_0) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(z_0))$$

liegt im Bild der durch  $\pi$  induzierten Abbildung

$$\pi_\#: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, \varphi(z_0)),$$

d.h.  $\varphi_\#(\pi_1(Z, z_0)) \subset \pi_\#(\pi_1(X, x_0))$ . Hier bezeichnet  $\pi_1(V, v_0)$  die 1. Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes  $V$  zum Basispunkt  $v_0 \in V$ .

<sup>3</sup>Einen Beweis dieses Satzes findet man z.B. in den Büchern von Frank WARNER [War, Chapter 3, Coverings], Glen BREDON [Bredon, Chapter III, 3. Covering Spaces] und Klaus JÄNICH [Jänich, Kapitel 9]. In den letzten beiden Büchern findet sich auch eine Einführung in die Homotopietheorie, aus der wir hier die Definition der Fundamentalgruppe  $\pi_1$  eines topologischen Raums und der zu einer stetigen Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  gehörenden Abbildung  $f_\#: \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$  verwenden.

**6.3.** Im folgenden wird es wichtig sein, daß sich auch die Differenzierbarkeit von  $\varphi$  auf die Hochhebung  $\tilde{\varphi}$  überträgt.

**Satz.** Seien  $X, Y$  und  $Z$  glatte, zusammenhängende Mannigfaltigkeiten und  $\pi: X \rightarrow Y$  eine Überlagerung. Sei außerdem  $\pi$  ein lokaler Diffeomorphismus. Sei  $\tilde{\varphi}$  eine Hochhebung einer differenzierbaren Abbildung  $\varphi: Z \rightarrow X$ , d.h.  $\pi \circ \tilde{\varphi} = \varphi$ . Dann ist  $\tilde{\varphi}$  differenzierbar.

*Beweis.* Die Differenzierbarkeit in  $z \in Z$  folgt direkt aus der lokalen differenzierbaren Umkehrbarkeit von  $\pi$ . Denn es existiert immer eine Umgebung  $U$  von  $\varphi(z)$  und eine offene Umgebung  $V$  von  $\tilde{\varphi}(z)$ , so daß  $\pi|_V: V \rightarrow U$  ein Diffeomorphismus ist. Dann ist

$$\tilde{\varphi}|_{\varphi^{-1}(U)} = (\pi|_V)^{-1} \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(U)}.$$

Damit ist  $\tilde{\varphi}$  differenzierbar auf der offenen Umgebung  $\varphi^{-1}(U)$  von  $z$ , also auf ganz  $Z$ .  $\square$

**6.4.** Mit diesen Vorbemerkungen kann man die Darstellung der Drehungen in den Quaternionen als Überlagerung verstehen. Die Existenz einer quaternionalen Darstellung der Drehung  $\Lambda: M \rightarrow \text{SO}(\mathbb{R}^3)$  aus Abschnitt 4 durch eine Abbildung  $\lambda: M \rightarrow S^3 \subset \mathbb{H}$  ist dann äquivalent zur Existenz einer Hochhebung von  $\Lambda$  in den Überlagerungsraum  $S^3$  der Drehungen.

**Satz und Definition** (Spin-Überlagerung). Sei  $\lambda \in S^3 \subset \mathbb{H}$ . Dann wird durch

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\lambda): \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\longmapsto \lambda x \lambda \end{aligned}$$

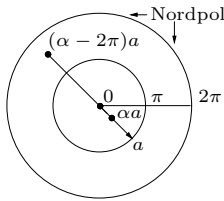
eine Drehung des  $\mathbb{R}^3$  definiert. Dabei fassen wir  $\mathbb{R}^3$ , wie immer, als Teilmenge der Quaternionen auf.

Die so beschriebene Abbildung

$$\mathcal{L}: S^3 \rightarrow \text{SO}(\mathbb{R}^3)$$

ist eine 2-fache Überlagerung von  $\text{SO}(\mathbb{R}^3)$  mit  $\ker(\mathcal{L}) = \{\pm 1\}$ . Sie ist außerdem ein lokaler Diffeomorphismus zwischen den LIE-Gruppen  $(S^3, \cdot)$  und  $(\text{SO}(\mathbb{R}^3), \circ)$ , wobei die Operation  $\cdot$  durch  $x \cdot y := yx$  definiert ist, und  $\circ$  für die Komposition von Abbildungen steht.

Schreibt man  $\lambda \in S^3$  als  $\lambda = \cos(\frac{\alpha}{2}) - \sin(\frac{\alpha}{2})a$  mit  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $a \in S^2$ , dann ist  $\mathcal{L}(\lambda)$  die Drehung um den Winkel  $\alpha$  in positiver Richtung um die Achse  $a$ .



Stellt man sich die  $S^3$  als 3-dimensionale Vollkugel mit dem Radius  $2\pi$  vor, deren Rand mit einem Punkt, z.B. dem Nordpol, identifiziert wird, dann läßt sich  $\mathcal{L}$  folgendermaßen veranschaulichen.  $\mathcal{L}$  bildet jeden Punkt  $x$  dieser Vollkugel auf diejenige Drehung ab, deren Drehwinkel durch den Abstand zum Nullpunkt  $\|x\|$  und deren Drehachse durch  $\frac{1}{\|x\|}x$  gegeben

ist. Dabei werden die beiden Punkte  $\alpha a$  und  $(\alpha - 2\pi)a$  für  $a \in S^2$  und  $\alpha \in [0, \pi]$  auf dieselbe Drehung abgebildet.

**6.5. Bemerkung.** Diese Überlagerung läßt sich für die Drehungen des  $\mathbb{R}^n$  beliebiger Dimensionen  $n \in \mathbb{N}$  verallgemeinern. Der Überlagerungsraum von  $\text{SO}(\mathbb{R}^n)$  wird in diesem Zusammenhang die *Spin-Gruppe*  $\text{Spin}(n)$  genannt. Die 3-Sphäre  $S^3$  ist als LIE-Gruppe isomorph zu  $\text{Spin}(3)$ . Die Abbildung  $\mathcal{L}$  ist also die  $\text{Spin}(3)$ -Überlagerung der  $\text{SO}(\mathbb{R}^3)$ .<sup>4</sup>

*Beweis.* Eine Quaternion  $\lambda$  liegt genau dann in  $S^3$ , wenn es ein  $\alpha \in \mathbb{R}$  und ein  $a \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$  gibt, so daß

$$\lambda = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)a.$$

Sei nun  $x \in \mathbb{R}^3$ . Um die Wirkung von  $\mathcal{L}(\lambda)$  auf  $x$  untersuchen zu können, zerlegt man  $x = x^\perp + x^\parallel$  in den zu  $a$  senkrechten und den zu  $a$  parallelen Teil. Dann folgt mit den Rechenregeln (6)a) und (6)b) Satz 5.4:

$$ax^\perp = -x^\perp a \quad \text{und} \quad ax^\parallel = x^\parallel a.$$

Wie für alle Vektoren aus  $\mathbb{R}^3$  gilt  $\bar{a} = -a$  und somit  $a^2 = -|a|^2 = -1$ , für  $a \in S^2$ . Damit gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\lambda)(x) &= \left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)a\right)(x^\perp + x^\parallel)\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)a\right) \\ &= \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)(x^\perp + x^\parallel) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)(a(x^\perp + x^\parallel)a) \\ &\quad + \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)(a(x^\perp + x^\parallel) - (x^\perp + x^\parallel)a) \\ &= \left(\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)x^\parallel + \left(\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)x^\perp \\ &\quad + 2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)ax^\perp \\ &= x^\parallel + \cos(\alpha)x^\perp + \sin(\alpha)a \times x^\perp. \end{aligned} \quad (*)$$

Der letzte Ausdruck ist gerade die Drehung von  $x$  um die Achse  $a$  um den Winkel  $\alpha$ . Damit ist gezeigt, daß  $\mathcal{L}(\lambda) \in \text{SO}(\mathbb{R}^3)$  liegt, und daß  $\mathcal{L}$  surjektiv und glatt ist.

Aus der Rechenregel (3) Satz 5.4 folgt

$$\mathcal{L}(\mu \cdot \lambda)(x) = \mathcal{L}(\lambda\mu)(x) = \bar{\mu}\bar{\lambda}x\lambda\mu = \mathcal{L}(\mu)(\mathcal{L}(\lambda)(x)) = \mathcal{L}(\mu) \circ \mathcal{L}(\lambda)(x)$$

für  $\lambda, \mu \in S^3$  und  $x \in \mathbb{R}^3$ . Somit ist  $\mathcal{L}$  ein Homomorphismus zwischen den LIE-Gruppen  $(S^3, \cdot)$  und  $(\text{SO}(\mathbb{R}^3), \circ)$ .

Ohne Schwierigkeiten läßt sich hier direkt nachrechnen, daß  $\mathcal{L}$  eine Überlagerung ist. Dabei würden wir genauso vorgehen wie beim Beweis des allgemeineren Satzes, der besagt, daß jeder Homomorphismus zwischen zusammenhängenden LIE-Gruppen genau dann eine Überlagerung ist, wenn sein Differential an der Stelle 1 ein Isomorphismus ist (siehe [War, Proposition 3.26]). Da die dabei verwendeten Methoden später nicht mehr benötigt werden, verwenden wir diesen Satz hier ohne Beweis, und zeigen nur, daß  $d_1\mathcal{L}: T_1S^3 \rightarrow T_{\text{Id}}\text{SO}(\mathbb{R}^3)$  ein Isomorphismus ist.

<sup>4</sup>Eine Einführung in die allgemeinere Theorie der Spin-Überlagerungen findet man in den Büchern von H. Blaine LAWSON und Marie-Louise MICHELSON [LawMi] und Thomas FRIEDRICH [Friedrich].

Betrachte dazu die 3 Kurven

$$\begin{aligned}\gamma_l: (-1, 1) &\rightarrow S^3, \quad l \in \{1, 2, 3\}, \\ \gamma_1(t) &= \cos\left(\frac{t}{2}\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)\mathbf{i}, \quad \gamma_2(t) = \cos\left(\frac{t}{2}\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)\mathbf{j}, \\ \gamma_3(t) &= \cos\left(\frac{t}{2}\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Dann sind die Vektoren  $\gamma'_l(0) \in T_1 S^3$  im Tangentialraum von  $S^3$  an 1 enthalten. Mit der Formel (\*) erhält man

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}(\gamma_1)(x)}{\partial t} \Big|_0 &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_0 \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos(t) \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \sin(t) \mathbf{i} \times \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) \\ &= \mathbf{i} \times \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_2 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

für  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ . Analog sieht man, daß  $d_1 \mathcal{L}(\gamma'_2(0)) = \left(x \mapsto \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix}\right)$  und  $d_1 \mathcal{L}(\gamma'_3(0)(x)) = \left(x \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$  ist. Also haben wir 3 linear unabhängige Vektoren in  $\text{Im}(d_1 \mathcal{L})$  gefunden. Daraus folgt, daß  $d_1 \mathcal{L}$  ein Isomorphismus ist, denn  $\dim T_1 S^3 = \dim T_{\text{Id}} \text{SO}(\mathbb{R}^3) = 3$ .

$\mathcal{L}$  ist eine 2-fache Überlagerung, da  $\ker(\mathcal{L}) = \{1, -1\}$  ist. Denn für ein  $\lambda \in \ker(\mathcal{L})$  gilt

$$\mathcal{L}(\lambda) = \text{Id}_{\mathbb{R}^3} \iff \mathcal{L}(\lambda)(x) = x \iff \bar{\lambda}x\lambda = x \iff x\lambda = \lambda x$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^3$ , weil  $\lambda\bar{\lambda} = 1$  für  $\lambda \in S^3$  ist. Da die reellen Zahlen in  $\mathbb{H}$  mit allen Quaternionen kommutieren, bedeutet die letzte Gleichung, daß  $\text{Im}(\lambda)$  mit allen Vektoren aus  $\mathbb{R}^3$  kommutiert. Aus der Rechenregel (6)b) Satz 5.4 folgt nun, daß  $\text{Im}(\lambda)$  zu allen Vektoren aus  $\mathbb{R}^3$  parallel ist. Somit ist  $\text{Im}(\lambda) = 0$  und es gilt  $\lambda = \text{Re}(\lambda) = \pm 1$ .  $\square$

## 7. Spin-Transformationen und Weierstraß-Darstellung

**7.1.** In Abschnitt 4 haben wir gesehen, daß sich zwei konform parametrisierte Flächen  $(M, J, f)$  und  $(M, J, \tilde{f})$  durch zwei eindeutig bestimmte Abbildungen  $u: M \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\Lambda: M \rightarrow \text{SO}(\mathbb{R}^3)$  mit der Gleichung  $d\tilde{f} = e^{2u}\Lambda(df)$  ineinander überführen lassen. Existiert nun eine Hochhebung  $\mu: M \rightarrow S^3 \subset \mathbb{H}$  von  $\Lambda$  unter  $\mathcal{L}$ , d.h.  $\Lambda(x) = \bar{\mu}x\mu$  für alle  $x \in \mathbb{R}^3$ , dann erhält man für  $\lambda = e^u\mu$  die Transformationsgleichung  $d\tilde{f} = \bar{\lambda}df\lambda$ . Diese Gleichung soll nun unser Ausgangspunkt sein. Aus den Ergebnissen des letzten Abschnitts läßt sich eine Bedingung für die Existenz einer solchen Abbildung  $\lambda$  ableiten.

**7.2. Definition** (Weierstraß-Darstellung einer Fläche).  
Zwei Immersionen  $f, \tilde{f}: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißen *spin-äquivalent*, wenn es eine glatte Abbildung  $\lambda: M \rightarrow \mathbb{H}_*$  gibt, so daß

$$d\tilde{f} = \bar{\lambda}df\lambda. \quad (*)$$

Die Abbildung  $\lambda$  heißt dann *Spin-Transformation* zu  $f$ , und  $\tilde{f}$  die *Spin-Transformierte* von  $f$  unter  $\lambda$ . Die Gleichung (\*) ist eine (*globale*) WEIERSTRASS-Darstellung von  $\tilde{f}$  (bzgl.  $f$  via  $\lambda$ ).

**7.3. Definition** (lokale Weierstraß-Darstellung einer Fläche).

Sei  $(M, J, f)$  eine konform parametrisierte Fläche und  $\lambda: M \rightarrow H_*$  eine Spin-Transformation, so daß

$$df = \bar{\lambda} dz j \lambda \quad (**)$$

in  $U \subset M$  gilt, wobei  $z: U \rightarrow \mathbb{C}$  eine holomorphe Karte von  $(M, J)$  ist, d.h. für die Abbildung  $z$  gilt  $*dz = \mathbf{i}dz$ . Die Gleichung (\*\*) ist eine *lokale WEIERSTRASS-Darstellung von  $f$  in der Koordinate  $z$* .

**7.4.** Die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit einer Spin-Transformation zu zwei vorgegebenen konform parametrisierten Flächen läßt sich mit Hilfe der Sätze 6.2 und 6.3 über die Existenz, Eindeutigkeit und Differenzierbarkeit einer Hochhebung beantworten.

**Satz.** Seien  $f$  und  $\tilde{f}: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  zwei konforme Immersionen auf einer komplexen 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit  $(M, J)$  und  $\Lambda: M \rightarrow \text{SO}(\mathbb{R}^3)$  die nach Satz 4.3 durch  $f$  und  $\tilde{f}$  eindeutig bestimmte Drehung.

Die beiden Immersionen  $f$  und  $\tilde{f}$  sind genau dann spin-äquivalent, wenn die Abbildung  $\Lambda_{\#}: \pi_1(M) \rightarrow \pi_1(\text{SO}(\mathbb{R}^3))$  trivial ist, d.h.  $\Lambda_{\#}(\pi_1(M)) = \{e\}$  ist. Die zu  $f$  und  $\tilde{f}$  gehörende Spin-Transformation  $\lambda: M \rightarrow \mathbb{H}_*$  ist bis auf die Transformation  $\lambda \mapsto -\lambda$  eindeutig bestimmt.

Zwei konform parametrisierte Flächen sind also genau dann spin-äquivalent, wenn die zu ihnen gehörige Drehung  $\Lambda: M \rightarrow \text{SO}(\mathbb{R}^3)$  geschlossene Wege in  $M$  auf zusammenziehbare Wege in  $\text{SO}(\mathbb{R}^3)$  abbildet.

**7.5. Korollar.** Alle konform parametrisierten Flächen auf einer einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit  $M$ , d.h.  $\pi_1(M) = \{e\}$ , sind spin-äquivalent.

*Beweis des Satzes.* Sei  $u$  der eindeutig bestimmte konforme Faktor und  $\Lambda$  die eindeutig bestimmte Drehung zu  $f$  und  $\tilde{f}$  aus Satz 4.3.

Eine Abbildung  $\lambda: M \rightarrow \mathbb{H}_*$  ist genau dann eine Spin-Transformation von  $f$  nach  $\tilde{f}$ , wenn das folgende Diagramm für  $\mu = \frac{1}{|\lambda|}\lambda$  kommutiert und  $|\lambda| = e^u$  ist.

$$\begin{array}{ccc} & & (S^3, x_0) \\ & \nearrow \mu & \downarrow \mathcal{L} \\ (M, p_0) & \xrightarrow{\Lambda} & (\text{SO}(\mathbb{R}^3), \Lambda(p_0)) \end{array}$$

Nach dem Satz 6.2 über die Existenz und Eindeutigkeit einer Hochhebung existiert  $\mu$  genau dann, wenn  $\Lambda_{\#}(\pi_1(M, p_0)) \subset \mathcal{L}_{\#}(\pi_1(S^3, x_0))$  ist. Da die Gruppe  $\pi_1(S^3) = \{e\}$  trivial ist, ist die letzte Bedingung äquivalent dazu, daß  $\Lambda_{\#}$  die triviale Abbildung ist.

Die Existenz der Abbildung  $\mu$  hängt nicht von der Wahl des Basispunktes  $x_0 \in \mathcal{L}^{-1}(\Lambda(p_0))$  ab, und  $\mu$  ist bis auf die Wahl des Basispunktes eindeutig

bestimmt. Daher ist  $\lambda = e^u \mu$  wegen  $|\lambda| = e^u$  bis auf die Transformation  $\lambda \mapsto -\lambda$  eindeutig.  $\square$

## 8. Differentialformen mit Werten in den Quaternionen

**8.1.** In den nächsten Abschnitten werden wir uns mit der Frage auseinandersetzen, wann es zu einer gegebenen konform parametrisierten Fläche  $(M, J, f)$  und einer Spin-Transformation  $\lambda$  eine zu  $f$  unter  $\lambda$  spin-äquivalente Fläche  $\tilde{f}$  gibt. Wenn  $M$  einfach zusammenhängend ist, dann reduziert sich diese Frage auf die folgende: Wann ist die 1-Form  $\eta := \tilde{\lambda} df \lambda$  geschlossen? Die 1-Form  $\eta$  kann man einerseits als 1-Form mit Werten in den imaginären Quaternionen oder als 3 reelle 1-Formen ansehen. Für die Rechnungen erweist sich die erste Sichtweise als günstig. Deshalb werden in diesem Abschnitt quaternionenwertige Differentialformen eingeführt.

**8.2.** Eine *quaternionenwertige n-Form* wird durch vier reelle n-Formen  $\alpha_1, \dots, \alpha_4$  mittels

$$\alpha := \alpha_1 + \alpha_2 \mathbf{i} + \alpha_3 \mathbf{j} + \alpha_4 \mathbf{k}$$

gegeben. Quaternionenwertige 0-Formen sind damit Funktionen  $f: M \rightarrow \mathbb{H}$ , 1-Formen sind Schnitte in  $T^*M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$  u.s.w.

**8.3.** Auf den quaternionenwertigen 1-Formen läßt sich ein *Dachprodukt* mit der üblichen Formel einführen:

$$\alpha \wedge \beta(X, Y) := \alpha(X)\beta(Y) - \alpha(Y)\beta(X)$$

für  $\alpha, \beta \in T^*M \otimes \mathbb{H}$  und  $X, Y \in T_p M, p \in M$ . Es gelten die Rechenregeln

$$\overline{\alpha \wedge \beta} = -\bar{\beta} \wedge \bar{\alpha} \quad \text{und} \quad \alpha \wedge h\beta = \alpha h \wedge \beta.$$

Weil die Quaternionen nicht kommutativ sind, gibt es keine allgemeine Regel für das Vertauschen quaternionenwertiger Differentialformen im Dachprodukt.

**8.4.** Das Differential einer quaternionenwertigen 1-Form wird komponentenweise definiert  $d\alpha := d\alpha_1 + d\alpha_2 \mathbf{i} + d\alpha_3 \mathbf{j} + d\alpha_4 \mathbf{k}$ . Es gilt

$$d(h\alpha) = dh \wedge \alpha + h d\alpha \quad \text{und} \quad d(\alpha h) = d\alpha h - \alpha \wedge dh$$

für  $h: M \rightarrow \mathbb{H}$  und  $\alpha \in T^*M \otimes \mathbb{H}$ .

**8.5.** Ist  $(M, J)$  eine komplexe 2-dimensionale Mannigfaltigkeit, dann existiert für quaternionenwertige 1-Formen  $\alpha$  wie in 3.5 ein  $*$ -Operator

$$*\alpha := \alpha \circ J.$$

Über die komplexe Struktur  $J$  auf  $M$  lassen sich die 2-Formen  $\omega$  auf  $M$  mit den quadratischen Formen mittels

$$\tilde{\omega}(X) = \omega(X, JX)$$

identifizieren. Wir werden 2-Formen im folgenden immer auf diese Art als quadratische Formen auf  $TM$  auffassen. Die Formel für das Dachprodukt lautet dann

$$\alpha \wedge \beta = \alpha(*\beta) - (*\alpha)\beta.$$

## 9. Quaternionische Funktionentheorie

**9.1.** Konforme Immersionen einer komplexen 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit in den  $\mathbb{R}^3$  lassen sich nun dadurch beschreiben, daß es eine Abbildung  $N: M \rightarrow \mathbb{H}$  gibt, so daß der  $*$ -Operator der Multiplikation mit  $N$  entspricht. In dem Artikel [KPP 98] von George KAMBEROV, Franz PEDIT und Ulrich PINKALL wird dies in Lemma 2.1. folgendermaßen formuliert.

**Lemma.** *Sei  $(M, J)$  eine komplexe 2-dimensionale Mannigfaltigkeit. Eine Immersion  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist genau dann konform, wenn es eine Abbildung  $N: M \rightarrow \mathbb{H}$  gibt, so daß*

$$*df = Ndf. \quad (*)$$

Wenn  $(*)$  erfüllt ist, dann ist  $N: M \rightarrow S^2 \subset \mathbb{H}$  der Normalenvektor von  $(M, J, f)$ .

*Beweis.* Sei  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Immersion und  $N: M \rightarrow \mathbb{H}$  eine Abbildung, so daß die Gleichung  $*df = Ndf$  erfüllt ist. Dann folgt

$$N^2df = **df = -df.$$

Da  $f$  eine Immersion ist, folgt  $N^2 = -1$ , somit ist  $|N| = 1$  und wegen  $N^2 = -1 = -|N|^2 = -N\bar{N}$  gilt  $N = -\bar{N}$ . Also ist  $N \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ . Wenn  $(*)$  erfüllt ist, ist  $Ndf \in \mathbb{R}^3$  und daher  $N \perp df$ . Somit ist  $N$  der Normalenvektor von  $f$ . Außerdem ist  $f$  konform, weil

$$|*df| = |Ndf| = |df|.$$

Sei umgekehrt  $(M, J, f)$  eine konform parametrisierte Fläche und  $N$  der zugehörige Normalenvektor. Für jede imaginäre Quaternion  $x \in \mathbb{R}^3$  mit  $x \perp N(p)$  folgt aus der Produktformel

$$N(p)x = -\langle N(p), x \rangle + N(p) \times x = N(p) \times x.$$

Die HAMILTONSche Multiplikation mit  $N(p)$  induziert daher die Drehung um  $90^\circ$  in positiver Richtung in  $df(T_pM)$ . Dasselbe gilt für die Abbildung  $df(X) \mapsto df(JX)$ , weil  $J$  mit der durch  $f$  auf  $M$  induzierten Metrik verträglich ist (siehe 3.3). Also gilt  $*df = Ndf$ .  $\square$

**9.2. Bemerkung.** In der Funktionentheorie betrachtet man holomorphe Abbildungen, d.h. Abbildungen  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , die die CAUCHY-RIEMANN-Differentialgleichungen  $df(\mathbf{i}z) = \mathbf{i}df(z)$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  erfüllen. Faßt man  $\mathbb{C}$  zusammen mit der Multiplikation mit  $\mathbf{i}$  als eine komplexe 2-dimensionale Mannigfaltigkeit auf, dann erhält man als Bedingung für die Holomorphie von  $f$  die Gleichung  $*df\mathbf{j} = \mathbf{i}df\mathbf{j}$ , d.h.  $f$  ist genau dann holomorph, wenn  $(\mathbb{C}, \mathbf{i}, f\mathbf{j})$  eine konform parametrisierte Fläche mit dem konstanten Normalenvektor  $N := \mathbf{i}$  ist.

In diesem Sinne ist die hier vorgestellte *quaternionische Funktionentheorie* eine Verallgemeinerung der komplexen Funktionentheorie. Sie wurde erstmalig in dem Artikel [KPP 98] beschrieben und zur lokalen Klassifikation aller BONNET-Paare verwendet. Das sind alle Paare von Immersionen  $f, \tilde{f}: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  einer 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit in den  $\mathbb{R}^3$ , die die gleiche Metrik auf  $M$  induzieren und deren mittlere Krümmungen übereinstimmen.

**9.3. Definition.** Sei  $(M, J)$  eine komplexe 2-dimensionale Mannigfaltigkeit und  $N: M \rightarrow S^2 \in \mathbb{R}^3$  ein *variables i*. Dann heißt eine  $\mathbb{R}^3$ -wertige 1-Form  $\alpha \in T^*M \otimes \mathbb{R}^3$  *konform*, wenn  $*\alpha = N\alpha$ , und *antikonform*, wenn  $*\alpha = -N\alpha$  gilt.

Jede  $\mathbb{R}^3$ -wertige 1-Form  $\alpha$  zerfällt in einen konformen Teil  $\alpha_+$  und einen antikonformen Teil  $\alpha_-$ , d.h.

$$\alpha = \alpha_+ + \alpha_- \quad \text{mit} \quad \alpha_{\pm} = \frac{1}{2}(\alpha \mp N*\alpha).$$

Wir werden von *N-konform* bzw. *N-antikonform* sprechen, wenn aus dem Zusammenhang nicht ersichtlich ist, auf welches variable *i* sich die Konformität der 1-Form bezieht.

**9.4.** Wichtige geometrische Daten einer Fläche  $(M, J, f)$  in  $\mathbb{R}^3$  lassen sich aus dem Differential  $dN$  des Normalenvektors  $N$  ablesen. Wegen  $|N| = 1$  gilt  $dN(X) \in df(T_pM)$  für alle  $X \in T_pM$  und man erhält

$$\begin{aligned} 2\langle dN_+(X), Ndf(X) \rangle &= \langle dN(X) - N*dN(X), Ndf(X) \rangle \\ &= \langle dN(X), Ndf(X) \rangle - \langle *dN(X), df(X) \rangle \\ &= \text{II}(X, JX) - \text{II}(JX, X) = 0, \end{aligned}$$

wobei II die 2. Fundamentalform von  $f$  ist. Daher ist  $dN_+(X) \parallel df(X)$  für alle  $X \in T_pM$ . Damit können wir die mittlere Krümmung  $H$  von  $f$  ausrechnen. Für  $X \in T_pM$  gilt:

$$\begin{aligned} 2H|df(X)|^2 &= \langle dN(X), df(X) \rangle + \langle dN(JX), df(JX) \rangle \\ &= \langle dN(X), df(X) \rangle + \langle *dN(X), Ndf(X) \rangle \\ &= \langle dN(X) - N*dN(X), df(X) \rangle = 2\langle dN_+(X), df(X) \rangle \\ &= -2dN_+(X)df(X) + 2dN_+(X) \times df(X) \\ &= -2dN_+(X)df(X), \end{aligned}$$

denn  $2H$  ist die Spur der 2. Fundamentalform II bzgl. der durch  $f$  auf  $M$  induzierten Riemannschen Metrik  $\langle df(X), df(Y) \rangle$ . Für einen Tangentialvektor  $X \neq 0$  gilt  $df(X)^{-1} = -df(X)|df(X)|^{-2}$  und man erhält die sehr wichtige Gleichung:

$$H = dN_+(X)(df(X))^{-1} \quad \text{bzw.} \quad dN = Hdf + dN_-.$$

## 10. Weierstraß-Darstellung und Dirac-Gleichung

**10.1.** Hier soll nun, wie in Abschnitt 8 angekündigt, die Frage geklärt werden: Unter welchen Voraussetzungen ist die 1-Form  $\eta = \bar{\lambda} df \lambda$  geschlossen? Diese Frage wird in [KPP 98, Lemma 2.2] beantwortet.

**10.2. Theorem** (WEIERSTRASS-DARSTELLUNG).  
Sei  $(M, J, f)$  eine konform parametrisierte Fläche mit dem Normalenvektor  $N: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  und  $\lambda: M \rightarrow \mathbb{H}_*$  eine Spin-Transformation. Dann ist die 1-Form

$$\eta = \bar{\lambda} df \lambda$$

genau dann geschlossen, wenn es eine glatte Funktion  $u: M \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, so daß  $\lambda$  die DIRAC-Gleichung von  $f$  mit dem reellen Potential  $u$

$$*d\lambda + Nd\lambda = u df \lambda \quad (*)$$

erfüllt. Das Potential  $u$  ist durch  $\lambda$  und  $f$  eindeutig bestimmt. Die  $\mathbb{R}^3$ -wertige 1-Form  $\eta$  ist  $(\lambda^{-1}N\lambda)$ -konform.

**10.3. Bemerkungen.** (i) Die beiden Seiten der DIRAC-Gleichung  $(*)$  sind  $N$ -konforme 1-Formen, denn es gilt  $*(u df \lambda) = Nu df \lambda$  und  $*(d\lambda + Nd\lambda) = -d\lambda + N*d\lambda = N(*d\lambda + Nd\lambda)$ . Damit ist die Gleichung genau dann erfüllt, wenn sie in jedem Punkt  $p \in M$  für einen Vektor  $X \in T_p M \setminus \{0\}$  gilt.

(ii) Außerdem ist die Gleichung  $(*)$  quaternionisch rechts-linear, d.h. jede Lösung  $\lambda: M \rightarrow \mathbb{H}_*$  induziert eine 4-Parameterfamilie von Lösungen  $\lambda a$ ,  $a \in \mathbb{H}$  von  $(*)$ . Die Multiplikation mit der Konstante  $a \in \mathbb{H}$  entspricht einer konstanten Drehstreckung der Bildvektoren von  $\eta$ .

*Beweis.* Die 1-Form  $\eta$  ist genau dann geschlossen, wenn

$$\begin{aligned} d\eta &= d\bar{\lambda} \wedge df \lambda - \bar{\lambda} df \wedge d\lambda \\ &= \overline{\lambda df \wedge d\lambda} - \bar{\lambda} df \wedge d\lambda \\ &= -2 \operatorname{Im}(\bar{\lambda} df \wedge d\lambda) = 0 \end{aligned}$$

ist. Dabei wurden die Rechenregeln für quaternionenwertige Differentialformen aus Abschnitt 8 und  $df \bar{\lambda} = -df$  verwendet.

Faßt man nun  $df \wedge d\lambda$  als die quadratische Form  $X \mapsto (df \wedge d\lambda)(X, JX)$  auf, dann gilt  $df \wedge d\lambda = df*d\lambda - *df d\lambda$ . Da die reellwertigen quadratischen Formen in jedem Punkt  $p \in M$  einen 1-dimensionalen, reellen Vektorraum bilden, ist  $\eta$  genau dann geschlossen, wenn  $\bar{\lambda} df \wedge d\lambda$  ein reelles Vielfaches der quadratischen Form  $|df|^2$  ist, d.h. genau dann, wenn es eine reellwertige Funktion  $u: M \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, so daß gilt:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} df \wedge d\lambda &= -u |\lambda|^2 |df|^2 \\ \iff df*d\lambda - *df d\lambda &= -u |df| \lambda \\ \iff df*d\lambda + df Nd\lambda &= u df df \lambda \\ \iff *d\lambda + Nd\lambda &= u df \lambda. \end{aligned}$$

Da  $|df|^2$  nicht verschwindet, ist  $u$  durch  $\lambda$  und  $f$  eindeutig bestimmt. Schließlich gilt  $*\eta = \bar{\lambda} *df \lambda = \bar{\lambda} N df \lambda = \bar{\lambda} N |\lambda|^{-2} \lambda \bar{\lambda} df \lambda = \lambda^{-1} N \lambda \eta$ .  $\square$

**10.4. Korollar.** Sei  $(M, J, f)$  eine konform parametrisierte Fläche auf einer einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit. Dann gehört zu jeder Lösung  $\lambda: M \rightarrow H_*$  der DIRAC-Gleichung

$$*d\lambda + Nd\lambda = u df \lambda$$

mit einem reellen Potential  $u: M \rightarrow \mathbb{R}$  eine zu  $f$  via  $\lambda$  spin-äquivalente Immersion

$$\tilde{f}: M \rightarrow \mathbb{R}^3.$$

Die Fläche  $\tilde{f}$  ist bis auf eine Translation durch  $\lambda$  und  $f$  eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Löst  $\lambda$  die DIRAC-Gleichung von  $f$  für ein reelles Potential  $u$ , dann ist die 1-Form  $\eta = \bar{\lambda} df \lambda$  geschlossen. Da  $M$  einfach zusammenhängend

ist, gibt es eine Stammfunktion  $\tilde{f}$  von  $\eta$ . D.h.  $d\tilde{f} = \eta = \bar{\lambda} df \lambda$ . Die 1-Form  $\eta$  bestimmt die Abbildung  $\tilde{f}$  bis auf eine Translation eindeutig.  $\square$

**10.5. Korollar.** Sei  $\tilde{f}: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine via  $\lambda: M \rightarrow \mathbb{H}_*$  zu einer konform parametrisierten Fläche  $(M, J, f)$  spin-äquivalente Immersion, d.h.

$$d\tilde{f} = \bar{\lambda} df \lambda.$$

Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes reelles Potential  $u: M \rightarrow \mathbb{R}$ , so daß  $\lambda$  und  $u$  die DIRAC-Gleichung (\*) von  $f$  erfüllen. Weiterhin gilt:

(i)  $(M, J, \tilde{f})$  ist eine konform parametrisierte Fläche mit dem Normalenvektor

$$\tilde{N} = \lambda^{-1} N \lambda.$$

(ii) Für die quadratischen Formen der durch  $f$  und  $\tilde{f}$  auf  $M$  induzierten Metriken gilt

$$|d\tilde{f}|^2 = |\lambda|^4 |df|^2.$$

(iii) Die mittlere Krümmung  $\tilde{H}$  von  $\tilde{f}$  ergibt sich aus

$$\tilde{H}|d\tilde{f}| = (H + u)|df|.$$

*Beweis.* Aus  $d\tilde{f} = \bar{\lambda} df \lambda = \eta$  folgt, daß  $\eta$  geschlossen ist. Damit existiert ein reelles Potential  $u: M \rightarrow \mathbb{R}$ , so daß  $\lambda$  und  $u$  der DIRAC-Gleichung (\*) genügen. Außerdem ist  $\eta$  eine  $(\lambda^{-1} N \lambda)$ -konforme 1-Form, das bedeutet aber gerade  $*d\tilde{f} = \tilde{N} d\tilde{f}$  für  $\tilde{N} = \lambda^{-1} N \lambda$ . Also folgt Behauptung (i). Die Behauptung (ii) ist einfach  $|d\tilde{f}|^2 = |\bar{\lambda} df \lambda|^2 = |\lambda|^4 |df|^2$ .

Die Formel (iii) folgt mit (i) und (ii),  $Ndf = -df N$ ,  $d\tilde{f} = \bar{\lambda} df \lambda$  und der DIRAC-Gleichung  $*d\lambda + Nd\lambda = u df \lambda$ :

$$\begin{aligned} 2\tilde{H}d\tilde{f} &= 2d\tilde{N}_+ = d\tilde{N} - \tilde{N}*d\tilde{N} = d\tilde{N} - (\lambda^{-1}N\lambda)*d\tilde{N} \\ &= -\lambda^{-1}d\lambda\lambda^{-1}N\lambda + \lambda^{-1}dN\lambda + \lambda^{-1}Nd\lambda \\ &\quad - (-\lambda^{-1}N*d\lambda\lambda^{-1}N\lambda + \lambda^{-1}N*dN\lambda - \lambda^{-1}*d\lambda) \\ &= \lambda^{-1} \underbrace{(N*d\lambda - d\lambda)}_{uNdf\lambda} \lambda^{-1}N\lambda \\ &\quad + \lambda^{-1} \underbrace{(dN - N*dN)}_{dN_+} \lambda + \lambda^{-1} \underbrace{(Nd\lambda + *d\lambda)}_{u df \lambda} \\ &= \lambda^{-1}u df \lambda + \lambda^{-1}2Hdf\lambda + \lambda^{-1}u df \lambda \\ &= 2u|\lambda|^{-2}d\tilde{f} + 2H|\lambda|^{-2}d\tilde{f} = 2(H + u)|\lambda|^{-2}d\tilde{f} \end{aligned}$$

$$\iff \tilde{H}|\lambda|^2 = H + u$$

$$\iff \tilde{H}|d\tilde{f}| = (H + u)|df|.$$

$\square$

## 11. Lokale Weierstraß-Darstellung

**11.1.** Sei  $(V, z)$  eine holomorphe Karte einer komplexen 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit  $(M, J)$ , d.h.  $V \subset M$  ist offen und  $z: V \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $*dz = \mathbf{id}z$ . Dann fassen wir  $z\mathbf{j}$  als eine lokale Referenzimmersion mit dem Normalenvektor  $N = i$  auf.

Setze  $X := \frac{\partial}{\partial x}$  und  $Y := \frac{\partial}{\partial y}$  mit  $z = x + \mathbf{i}y$ . Dann gilt  $Y = JX$ ,  $*dx = -dy$  und  $*dy = dx$ . Die DIRAC-Gleichung von  $z\mathbf{j}$  läßt sich nun

folgendermaßen umformen

$$\begin{aligned}
*d\lambda + \mathbf{i}d\lambda &= u dz \mathbf{j} \lambda \\
\iff *d\lambda(X) + \mathbf{i}d\lambda(X) &= u dz(X) \mathbf{j} \lambda \\
\iff \lambda_y + \mathbf{i}\lambda_x &= u \mathbf{j} \lambda \\
\iff 2\mathbf{i}\lambda_z &= u \mathbf{j} \lambda.
\end{aligned}$$

Hier werden die üblichen Bezeichnungen

$$\lambda_x := \frac{\partial}{\partial x} \lambda, \quad \lambda_y := \frac{\partial}{\partial y} \lambda, \quad \lambda_z := \frac{1}{2}(\lambda_x - \mathbf{i}\lambda_y), \quad \lambda_{\bar{z}} := \frac{1}{2}(\lambda_x + \mathbf{i}\lambda_y)$$

verwendet. Die Spin-Transformation  $\lambda: V \rightarrow \mathbb{H}_*$  wird nun durch eine Abbildung  $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}: V \rightarrow \mathbb{C}^2$  mit  $\lambda = \psi_1 + \mathbf{k}\psi_2$  dargestellt. Damit läßt sich die DIRAC-Gleichung weiter umformen:

$$\begin{aligned}
2\mathbf{i}(\psi_1 + \mathbf{k}\psi_2)_z &= u \mathbf{j}(\psi_1 + \mathbf{k}\psi_2) \\
\iff 2\mathbf{i}(\psi_{1z} + \mathbf{k}\psi_{2\bar{z}}) &= u \mathbf{j}(\psi_1 + \mathbf{k}\psi_2) \\
\iff 2\mathbf{i}\psi_{1z} - 2\mathbf{j}\psi_{2z} &= u \mathbf{j}\psi_1 + u \mathbf{i}\psi_2 \\
\iff \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & -\frac{1}{2}u \\ \frac{1}{2}u & \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \end{pmatrix} \psi &= 0
\end{aligned}$$

**11.2. Definition.** Sei  $(V, z)$  eine holomorphe Karte einer komplexen 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit  $(M, J)$  und  $u: V \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion. Dann ist

$$\mathcal{D} := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & -\frac{1}{2}u \\ \frac{1}{2}u & \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \end{pmatrix}$$

der DIRAC-Operator mit dem Potential  $u$  in der lokalen holomorphen Koordinate  $(V, z)$ . Die Gleichung

$$\mathcal{D}\psi = 0$$

ist die DIRAC-Gleichung in der Koordinate  $(V, z)$ .

**11.3. Bemerkung.** Der Operator  $\mathcal{D}$  hängt von dem Potential  $u$  ab. Wenn diese Abhängigkeit eine wesentlich Rolle spielt, werden wir  $\mathcal{D}_u$  oder  $\mathcal{D}(u)$  schreiben. Die Schreibweise “ $\psi$  ist eine Lösung von  $\mathcal{D}\psi = 0$ ” bedeutet, es gibt ein Potential  $u$ , so daß  $\psi$  die Gleichung  $\mathcal{D}\psi = 0$  erfüllt. In der Literatur<sup>5</sup> geht das Potential  $u$  von  $\mathcal{D}$  mit unterschiedlichen Faktoren ein.

**11.4.** Aus Theorem 10.2 folgt nun, daß  $\overline{(\psi_1 + \mathbf{k}\psi_2)} dz \mathbf{j} (\psi_1 + \mathbf{k}\psi_2)$  genau dann geschlossen ist, wenn  $\psi$  die Gleichung  $\mathcal{D}\psi = 0$  erfüllt. Damit haben wir die WEIERSTRASS-Darstellung hergeleitet, wie sie von Boris KONOPELCHENKO in [Kon 96, Abschnitt 8] und Iskander TAIMANOV in [Tai 97a] eingeführt und verwendet wurde, um eine Verbindung zwischen der Theorie integrierbarer Systeme und der Flächentheorie herzustellen.

Ursprünglich hat WEIERSTRASS diese Darstellung für Minimalflächen, d.h. Flächen mit dem Potential  $u = 0$ , verwendet. In diesem Fall erfüllt  $\psi$  genau dann die DIRAC-Gleichung, wenn  $\bar{\psi}_1$  und  $\psi_2$  holomorphe Funktionen sind.

<sup>5</sup>[Kon 96, Gleichung (8.1)] oder [Tai 97a, Gleichung (3.4)]

Die lokale WEIERSTRASS-Darstellung ist eine Variante von Theorem 10.2 für den Spezialfall der Referenzimmersion  $(V, J|_U, z\mathbf{j})$ .

**Theorem** (lokale WEIERSTRASS-Darstellung). *Sei  $(M, J)$  eine komplexe 2-dimensionale Mannigfaltigkeit,  $V \subset M$  eine offene, einfach zusammenhängende Teilmenge,  $(V, z)$  eine holomorphe Karte und  $u: V \rightarrow \mathbb{R}$  ein reelles Potential.*

*Dann beschreibt jede nicht verschwindende Lösung  $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}: V \rightarrow \mathbb{C}^2$  der DIRAC-Gleichung*

$$\mathcal{D}\psi = 0$$

*eine bis auf Translation eindeutig bestimmte konform parametrisierte Fläche  $(V, J, f)$  mit*

$$df = \bar{\lambda} dz \mathbf{j} \lambda \quad \text{mit} \quad \lambda = \psi_1 + \mathbf{k} \psi_2.$$

*Die Immersion  $f$  ergibt sich bis auf eine Translation aus der Integralformel:*

$$f(p) = \int_{p_0}^p (\psi_1 \bar{\psi}_2 d\bar{z} + \bar{\psi}_1 \psi_2 dz) \mathbf{i} + (\bar{\psi}_1^2 dz - \bar{\psi}_2^2 d\bar{z}) \mathbf{j}. \quad (*)$$

*Das Integral ist dabei über einen beliebigen Integrationsweg zwischen einem fest gewählten Punkt  $p_0 \in V$  und  $p \in V$  zu nehmen. Weiterhin gilt:*

- (i)  $N = \frac{|\psi_1|^2 - |\psi_2|^2}{|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2} \mathbf{i} - 2 \frac{\bar{\psi}_1 \psi_2}{|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2} \mathbf{j}$ ,
- (ii)  $|df|^2 = (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2)^2 |dz|^2$ ,
- (iii)  $H|df| = u |dz|$ .

*Umgekehrt gehört zu jeder konformen Immersion  $(V, J, f)$  eine bis auf  $\psi \mapsto -\psi$  eindeutig bestimmte Abbildung  $\psi: V \rightarrow \mathbb{C}^2$ , so daß  $f$  durch die Integralformel  $(*)$  bis auf eine Translation reproduziert wird. Es gilt außerdem  $\mathcal{D}\psi = 0$  mit dem Potential  $u(p) = H \frac{|df(X)|}{|dz(X)|}$  für einen beliebigen Vektor  $X \in T_p M \setminus \{0\}$ .*

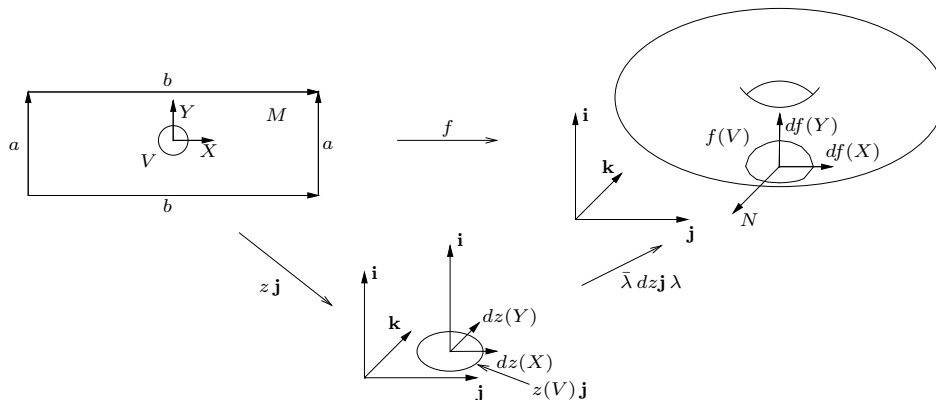


BILD 3. Lokale WEIERSTRASS-Darstellung des Torus.

*Beweis.* Bereits am Anfang dieses Abschnitts wurde gezeigt, daß  $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}: V \rightarrow \mathbb{C}^2$  genau dann eine Lösung der Gleichung  $\mathcal{D}\psi = 0$  ist, wenn die Spin-Transformation  $\lambda = \psi_1 + \mathbf{k}\psi_2$  die Gleichung  $*\lambda + \mathbf{i}d\lambda = u dz\mathbf{j}\lambda$  löst.

Also folgt aus  $\mathcal{D}\psi = 0$  und Korollar 10.4, daß es eine bis auf Translation eindeutig bestimmte Immersion  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3$  gibt, so daß  $df = \bar{\lambda} dz\mathbf{j}\lambda$  ist. Die Integralformel (\*) folgt aus

$$\begin{aligned} df &= \bar{\lambda} dz\mathbf{j}\lambda = (\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2\mathbf{k}) dz\mathbf{j}(\psi_1 + \mathbf{k}\psi_2) \\ &= (\bar{\psi}_1^2 dz\mathbf{j} + \psi_1\bar{\psi}_2 d\bar{z}\mathbf{i} + \bar{\psi}_1\psi_2 dz\mathbf{i} - \bar{\psi}_2^2 d\bar{z}\mathbf{j}) \\ &= (\bar{\psi}_1^2 dz - \bar{\psi}_2^2 d\bar{z})\mathbf{j} + (\psi_1\bar{\psi}_2 d\bar{z} + \bar{\psi}_1\psi_2 dz)\mathbf{i}. \end{aligned}$$

Da die mittlere Krümmung der Fläche  $(V, J, z\mathbf{j})$  Null ist, folgen die Gleichungen (i)–(iii) direkt aus dem Korollar 10.5.

Sei nun umgekehrt eine konform parametrisierte Fläche  $(V, J, f)$  vorgegeben. Dann sind  $(V, J, f)$  und  $(V, J, z\mathbf{j})$  nach Korollar 7.5 spin-äquivalent, weil  $V$  einfach zusammenhängend ist. Sei  $\lambda: V \rightarrow \mathbb{H}_*$  die zugehörige, bis auf  $\lambda \mapsto -\lambda$  eindeutig bestimmte Spin-Transformation mit  $df = \bar{\lambda} dz\mathbf{j}\lambda$ . Die Integralformel (\*) bedeutet gerade, daß  $\psi_1 + \mathbf{k}\psi_2$  die Spin-Transformation von  $z\mathbf{j}$  nach  $f$  ist. Also folgt  $\lambda = \psi_1 + \mathbf{k}\psi_2$ . Weil  $\lambda$  nach Korollar 10.5 die Gleichung  $*d\lambda + \mathbf{i}d\lambda = u dz\mathbf{j}\lambda$  erfüllt, folgt schließlich  $\mathcal{D}\psi = 0$  mit dem durch die Formel (iii):  $H|df| = u|dz|$  bestimmten Potential  $u: M \rightarrow \mathbb{R}$ .  $\square$

**11.5. Bemerkung.** Zu einer konform parametrisierten Fläche  $(M, J, f)$  und einer holomorphen Koordinate  $(V, z)$  mit einer einfach zusammenhängenden Teilmenge  $V \subset M$  gehört also ein reelles Potential  $u: V \rightarrow \mathbb{R}$ . Dieses Potential wird durch die Gleichung (iii) bestimmt. An dieser Gleichung erkennt man, daß  $u$  unter eigentlichen Bewegungen und Streckungen des  $\mathbb{R}^3$  invariant ist.



### III. Drehflächen und die mKdV–Gleichung

In diesem Kapitel wird die WEIERSTRASS–Darstellung einer Drehfläche und ihre Beziehung zur mKdV–Gleichung

$$u_t - u_{xxx} - 6u^2u_x = 0$$

untersucht. Es werden Formeln für das Potential  $u$  einer Drehfläche  $f$  und die geodätische Krümmung  $\kappa$  ihrer Meridiankurve  $\gamma$  als Kurve in der POINCARÉschen Halbebene hergeleitet. Es wird gezeigt, daß die Krümmung  $\kappa$  gerade  $-2u^*$  ist, wobei  $u^*$  das Potential der Dualfläche  $f^*$  von  $f$  ist. Diese Formeln bilden die Basis der BÄCKLUND–Transformation, mit der wir uns im letzten Kapitel beschäftigen.

Die Untersuchung der kritischen Punkte der hyperbolischen Biegeenergie von  $\gamma$  führt zu wandernden Wellenlösungen bzw. stationären Lösungen der mKdV–Gleichung. Mit der dabei hergeleiteten Formel für die Ableitung der Krümmung  $\kappa$  nach der Zeit wird gezeigt, daß  $-\frac{1}{2}\kappa = u^*$  die mKdV–Gleichung löst, wenn  $(\gamma(x, t))_{t \in \mathbb{R}}$  eine Schar von Kurven in der POINCARÉschen Halbebene ist, die der Gleichung

$$\dot{\gamma} = \left(\frac{1}{2}\kappa^2 + 1\right)T + \kappa'N,$$

genügt. Schließlich wird gezeigt, daß unter derselben Voraussetzung auch das Potential  $u$  die mKdV–Gleichung löst.

#### 12. Quaternionische Funktionentheorie für Drehflächen

**12.1.** Eine *Drehfläche* entsteht aus einer Kurve  $\gamma$  in der  $\mathbf{i}$ – $\mathbf{j}$ –Ebene des  $\mathbb{R}^3$  durch Rotation dieser Kurve um die  $\mathbf{i}$ –Achse. Die Kurve

$$\gamma = r\mathbf{j} + h\mathbf{i}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\mathbf{j} \oplus \mathbb{R}\mathbf{i}$$

nennt man die *Meridiankurve* der Drehfläche. Eine Parametrisierung  $f$  dieser Fläche erhält man durch

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x + \varphi\mathbf{i}) &\longmapsto r(x)e^{\varphi\mathbf{i}}\mathbf{j} + h(x)\mathbf{i} = e^{\frac{\varphi}{2}\mathbf{i}}\gamma(x)e^{-\frac{\varphi}{2}\mathbf{i}}. \end{aligned}$$

**12.2.** Da  $e^{\varphi\mathbf{i}}$  eine  $2\pi$ –periodische Abbildung ist, können wir  $f$  auch als Funktion auf dem Zylinder

$$Z := \mathbb{C} / \{2k\pi\mathbf{i} \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

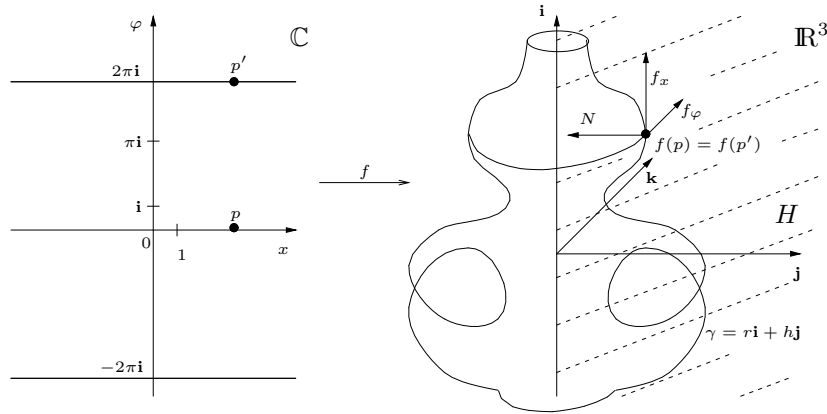


BILD 4. Kanonische Parametrisierung einer Drehfläche.

auffassen. Damit erhält man aus der universellen Überlagerung  $f$  die “eigentliche” Drehfläche. Diese Bemerkung im Hinterkopf behaltend, wollen wir im folgenden jedoch direkt mit der Überlagerung  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$  arbeiten.

**12.3.** Auf der 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit  $\mathbb{C}$  ist die Multiplikation mit der imaginären Einheit  $\mathbf{i}$  eine komplexe Struktur. Eine holomorphe Karte ist dann die Identität

$$z = x + \varphi \mathbf{i}: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Die Abbildung  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist nach Bemerkung 4.2(iii) genau dann eine konforme Immersion, wenn  $|f_x| = |f_\varphi| \neq 0$  und  $\langle f_x, f_\varphi \rangle = 0$  gilt.

Die Ableitungen von  $f$  nach  $x$  und  $\varphi$  sind

$$\begin{aligned} f_x(x + \varphi \mathbf{i}) &= r'(x)e^{\varphi \mathbf{i}} \mathbf{j} + h'(x) \mathbf{i} = e^{\frac{\varphi}{2} \mathbf{i}} \gamma'(x) e^{-\frac{\varphi}{2} \mathbf{i}}, \\ f_\varphi(x + \varphi \mathbf{i}) &= r(x)e^{\varphi \mathbf{i}} \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Hier und im folgenden bezeichnen die Indizes  $x$ ,  $\varphi$  und weiter unten auch  $t$  Ableitungen nach den entsprechenden Variablen. Wenn sich aus Gründen der Übersichtlichkeit ein Index nicht anbietet, wird  $\frac{\partial}{\partial x}$  u.s.w. geschrieben. Außerdem ist manchmal die besonders kurze Schreibweise  $'$  für die Ableitung nach  $x$  und  $\dot{\phantom{x}}$  für die Ableitung nach  $t$  nützlich.

Aus obigen Ableitungsformeln folgt  $\langle f_x, f_\varphi \rangle = 0$ , und daß  $f$  nur dann eine Immersion ist, wenn  $r(x)$  nicht verschwindet. O.B.d.A. kann man annehmen, daß  $r(x) > 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt, d.h.:

$$\gamma = r \mathbf{j} + h \mathbf{i}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{>0} \mathbf{j} \oplus \mathbb{R} \mathbf{i}.$$

Damit ist  $(\mathbb{C}, \mathbf{i}, f)$  genau dann eine konform parametrisierte Fläche, wenn  $\gamma$  die Gleichung

$$\frac{r'(x)^2 + h'(x)^2}{r(x)^2} = 1$$

erfüllt. Das bedeutet, daß die Kurve  $\gamma$  in der POINCARÉschen Halbebene  $H := \mathbb{R}_{>0} \mathbf{j} \oplus \mathbb{R} \mathbf{i}$  nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Dabei ist die Metrik der Halbebene  $H$  durch

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_H: T_{r\mathbf{j}+h\mathbf{i}} H \times T_{r\mathbf{j}+h\mathbf{i}} H &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto r^{-2} \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

definiert, wenn man  $T_{r\mathbf{j}+h\mathbf{i}}H$  mit  $\mathbb{R}\mathbf{j} \oplus \mathbb{R}\mathbf{i} \subset \mathbb{H}$  identifiziert. Die POINCARÉsche Halbebene  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$  ist ein Modell des 2-dimensionalen hyperbolischen Raumes. Die Kurve  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow H$  heißt deshalb *nach der hyperbolischen Bogenlänge parametrisiert*, wenn  $\|\gamma'(x)\|_H = \langle \gamma', \gamma' \rangle_H = 1$  gilt.

**12.4. Lemma.** *Sei  $\gamma = r\mathbf{j} + h\mathbf{i}: \mathbb{R} \rightarrow H := \mathbb{R}_{>0}\mathbf{j} \oplus \mathbb{R}\mathbf{i} \subset \mathbb{H}$  eine Kurve in der POINCARÉschen Halbebene  $H$ . Die durch  $\gamma$  definierte Drehfläche*

$$f: \quad \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ x + \varphi\mathbf{i} \longmapsto e^{\frac{\varphi}{2}\mathbf{i}}\gamma(x)e^{-\frac{\varphi}{2}\mathbf{i}}$$

*ist genau dann eine konforme Immersion, wenn  $\gamma$  nach der hyperbolischen Bogenlänge parametrisiert ist, d.h.*

$$\|\gamma'(x)\|_H = \langle \gamma'(x), \gamma'(x) \rangle_H = \frac{r'(x)^2 + h'(x)^2}{r(x)^2} = 1.$$

*In diesem Fall gelten die folgenden Formeln:*

(i) *Der Normalenvektor von  $f$  ist*

$$N(x + \varphi\mathbf{i}) = \frac{1}{r(x)} (r'(x)\mathbf{i} - h'(x)e^{\varphi\mathbf{i}}\mathbf{j}).$$

(ii) *Für die auf  $\mathbb{C}$  induzierte Metrik gilt*

$$|d_{x+\varphi\mathbf{i}}f| = r(x)|dz| = r(x)|dx + d\varphi\mathbf{i}|.$$

(iii) *Die mittlere Krümmung von  $f$  ist unabhängig von  $\varphi$  und ergibt sich aus der Formel*

$$H(x) = -\frac{1}{2r(x)^3} (h'(x)r(x) + r'(x)h''(x) - r''(x)h'(x)).$$

(iv) *Das Differential  $df$  von  $f$  berechnet sich aus*

$$d_{x+\varphi\mathbf{i}}f = (r'(x)e^{\varphi\mathbf{i}}\mathbf{j} + h'(x)\mathbf{i}) dx + r(x)e^{\varphi\mathbf{i}}\mathbf{k} d\varphi.$$

Im folgenden werden wir oft die Argumente der Funktionen weglassen, um die Übersichtlichkeit der Formeln zu erhöhen. Beispielsweise schreiben wir für (iii) kurz  $H = -\frac{1}{2r^3} (h'r + r'h'' - r''h')$ .

*Beweis.* Es sind nur noch die drei Formeln (i)–(iii) zu zeigen. Aus  $|f_x| = |f_y|$  und Lemma 2.2 folgt

$$|df| = |f_x| |dz| = r|dz|.$$

Das ist die Formel (ii). Der Normalenvektor läßt sich folgendermaßen berechnen

$$N = \frac{1}{r^2} f_x \times f_\varphi = \frac{1}{r^2} f_x f_\varphi = \frac{1}{r^2} (r'e^{\varphi\mathbf{i}}\mathbf{j} + h'\mathbf{i}) (re^{\varphi\mathbf{i}}\mathbf{k}) = \frac{1}{r} (r'\mathbf{i} - h'e^{\varphi\mathbf{i}}\mathbf{j}).$$

Das Doppelte der mittleren Krümmung  $H$  von  $f$  ist die Spur der 2. Fundamentalform  $\text{II}(X, Y) = \langle df(X), dN(Y) \rangle$  bezogen auf die 1. Fundamentalform  $\text{I}(X, Y) = \langle df(X), df(Y) \rangle$ . Die Basis  $(X := \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x}, Y := \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi})$  ist

eine Orthonormalbasis der 1. Fundamentalform, man erhält damit

$$\begin{aligned}
2Hr^2 &= r^2 \text{II}(X, X) + r^2 \text{II}(Y, Y) = \langle f_x, N_x \rangle + \langle f_\varphi, N_\varphi \rangle \\
&= \langle r' e^{\varphi \mathbf{i}} \mathbf{j} + h' \mathbf{i}, \frac{r'' r - r'^2}{r^2} \mathbf{i} - \frac{h'' r - h' r'}{r^2} e^{\varphi \mathbf{i}} \mathbf{j} \rangle - \langle r e^{\varphi \mathbf{i}} \mathbf{k}, \frac{1}{r} h' e^{\varphi \mathbf{i}} \mathbf{k} \rangle \\
&= -r' \frac{h'' r - h' r'}{r^2} + h' \frac{r'' r - r'^2}{r^2} - h' \\
\iff H &= -\frac{1}{2r^3} (h' r + r' h'' - r'' h').
\end{aligned}$$

□

### 13. Weierstraß–Darstellung von Drehflächen

**13.1.** Sei  $f$  die durch  $\gamma = r\mathbf{j} + h\mathbf{i}: \mathbb{R} \rightarrow H$ ,  $\|\gamma\|_H = 1$  definierte Drehfläche. Nach Theorem 11.4 existiert eine Spin–Transformation  $\lambda = \psi_1 + \mathbf{k}\psi_2$  mit  $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^2$ , so daß  $f$  bis auf eine Translation durch die Gleichung

$$f(p) = \int_{p_0}^p \bar{\lambda} dz \mathbf{j} \lambda = \int_{p_0}^p (\psi_1 \bar{\psi}_2 d\bar{z} + \bar{\psi}_1 \psi_2 dz) \mathbf{i} + (\bar{\psi}_1^2 dz - \bar{\psi}_2^2 d\bar{z}) \mathbf{j}$$

für  $p, p_0 \in \mathbb{C}$  gegeben ist. Außerdem löst  $\psi$  die DIRAC–Gleichung (vgl. 11.2):

$$\mathcal{D}\psi = 0.$$

**13.2.** Man kann eine in  $r$  und  $h$  explizite Formel für die Spin–Transformation  $\psi$  herleiten. Denn einerseits erhält man aus obiger Integralformel

$$\begin{aligned}
df &= (\psi_1 \bar{\psi}_2 d\bar{z} + \bar{\psi}_1 \psi_2 dz) \mathbf{i} + (\bar{\psi}_1^2 dz - \bar{\psi}_2^2 d\bar{z}) \mathbf{j} \\
&= (\psi_1 \bar{\psi}_2 + \bar{\psi}_1 \psi_2) \mathbf{i} dx + (\bar{\psi}_1^2 - \bar{\psi}_2^2) \mathbf{j} dx + (\bar{\psi}_1^2 + \bar{\psi}_2^2) \mathbf{k} d\varphi \\
&\quad + (\psi_1 \bar{\psi}_2 - \bar{\psi}_1 \psi_2) d\varphi
\end{aligned}$$

und andererseits ist nach Lemma 12.4(iv) das Differential von  $f$  durch

$$df = (r' e^{\varphi \mathbf{i}} \mathbf{j} + h' \mathbf{i}) dx + r e^{\varphi \mathbf{i}} \mathbf{k} d\varphi$$

gegeben. Damit erhält man folgende Formeln für  $\psi$ :

$$2\psi_1^2 = (r + r') e^{-\varphi \mathbf{i}}, \quad 2\psi_2^2 = (r - r') e^{-\varphi \mathbf{i}}, \quad 2\psi_1 \bar{\psi}_2 = h'.$$

D.h.:

$$\lambda = \psi_1 + \mathbf{k}\psi_2 = (\tilde{\psi}_1 + \tilde{\psi}_2 \mathbf{k}) e^{-\frac{\varphi}{2} \mathbf{i}}$$

mit

$$2\tilde{\psi}_1^2 = r + r', \quad 2\tilde{\psi}_2^2 = r - r', \quad 2\tilde{\psi}_1 \tilde{\psi}_2 = h'.$$

Diese Formeln stimmen mit den von Iskander TAIMANOV in [Tai 97b, Formeln (7) und (8)] für die WEIERSTRASS–Darstellung von Drehflächen angegebenen Formeln überein.<sup>6</sup>

<sup>6</sup>TAIMANOV verwendet  $\theta, \varphi$  für  $r, h$  sowie  $r, s$  für  $\tilde{\psi}_1, \tilde{\psi}_2$ .

**13.3. Satz.** Für jedes reelle Potential  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  beschreiben die Lösungen  $\tilde{\psi} = \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 \\ \tilde{\psi}_2 \end{pmatrix}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  der Gleichung

$$L\tilde{\psi} = 0 \quad \text{mit} \quad L = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2} & -u \\ u & \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

durch

$$f(p) = \int_{p_0}^p \bar{\lambda} dz \mathbf{j} \lambda \quad \text{mit} \quad \lambda = (\tilde{\psi}_1 + \tilde{\psi}_2 \mathbf{k}) e^{-\frac{\varphi}{2} \mathbf{i}} \quad (*)$$

eine konform parametrisierte Drehfläche  $(\mathbb{C}, \mathbf{i}, f)$ . Die nach der hyperbolischen Bogenlänge parametrisierte Meridiankurve von  $f$  ist durch  $\tilde{\psi}$  und die Gleichung

$$\gamma = r\mathbf{j} + h\mathbf{i} = (\tilde{\psi}_1^2 + \tilde{\psi}_2^2)\mathbf{j} + 2 \int \tilde{\psi}_1 \tilde{\psi}_2 dx \mathbf{i}$$

bis auf eine Translation parallel zur  $\mathbf{i}$ -Achse eindeutig bestimmt.

Umgekehrt gehört zu jeder Drehfläche  $(\mathbb{C}, \mathbf{i}, f = e^{\frac{\varphi}{2} \mathbf{i}} \gamma e^{-\frac{\varphi}{2} \mathbf{i}})$  mit  $\gamma = r\mathbf{j} + h\mathbf{i}$  und  $\|\gamma'\|_H = 1$  ein bis auf das Vorzeichen eindeutig durch

$$2\tilde{\psi}_1^2 = r + r', \quad 2\tilde{\psi}_2^2 = r - r', \quad 2\tilde{\psi}_1 \tilde{\psi}_2 = h'$$

bestimmtes Paar reellwertiger Funktionen, so daß  $f$  bis auf eine Translation durch  $(*)$  gegeben ist. Außerdem gilt  $L\tilde{\psi} = 0$  mit dem Potential

$$u = Hr = -\frac{1}{2r^2}(h'r + r'h'' - r''h').$$

*Beweis.* Zuerst zeigen wir, daß unter der Voraussetzung  $\psi = \tilde{\psi} e^{-\frac{\varphi}{2} \mathbf{i}}$  die Gleichung  $\mathcal{D}\psi = 0$  äquivalent ist zu  $L\tilde{\psi} = 0$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\psi = 0 &\iff \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & -\frac{1}{2}u \\ \frac{1}{2}u & \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\psi}_1 e^{-\frac{\varphi}{2} \mathbf{i}} \\ \tilde{\psi}_2 e^{-\frac{\varphi}{2} \mathbf{i}} \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{cases} \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{\psi}_1 - \frac{1}{2}\tilde{\psi}_1)e^{-\frac{\varphi}{2} \mathbf{i}} - \frac{1}{2}u\tilde{\psi}_2 e^{-\frac{\varphi}{2} \mathbf{i}} = 0 \\ \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x} \tilde{\psi}_2 + \frac{1}{2}\tilde{\psi}_2)e^{-\frac{\varphi}{2} \mathbf{i}} + \frac{1}{2}u\tilde{\psi}_1 e^{-\frac{\varphi}{2} \mathbf{i}} = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\psi}_1 - \frac{1}{2}\tilde{\psi}_1 - u\tilde{\psi}_2 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\psi}_2 + \frac{1}{2}\tilde{\psi}_2 + u\tilde{\psi}_1 = 0 \end{cases} \\ &\iff L\tilde{\psi} = 0. \end{aligned}$$

Gilt nun  $L\tilde{\psi} = 0$ , dann gibt es nach Theorem 11.4 eine bis auf eine Translation eindeutig bestimmte, konform parametrisierte Fläche  $(V, \mathbf{i}, f)$ , so daß

$$df = \bar{\lambda} dz \mathbf{j} \lambda \quad \text{mit} \quad \lambda = \psi_1 + \mathbf{k}\psi_2 = (\tilde{\psi}_1 + \tilde{\psi}_2 \mathbf{k}) e^{-\frac{\varphi}{2} \mathbf{i}}$$

gilt. Für das Differential dieser Fläche erhält man

$$\begin{aligned} df &= \bar{\lambda} dz \mathbf{j} \lambda = \overline{\psi_1 + \mathbf{k}\psi_2} dz \mathbf{j} (\psi_2 + \mathbf{k}\psi_1) \\ &= (\psi_1 \bar{\psi}_2 d\bar{z} + \bar{\psi}_1 \psi_2 dz) \mathbf{i} + (\bar{\psi}_1^2 dz - \bar{\psi}_2^2 d\bar{z}) \mathbf{j} \\ &= ((\tilde{\psi}_1^2 - \tilde{\psi}_2^2) e^{\varphi \mathbf{i}} \mathbf{j} + 2\tilde{\psi}_1 \tilde{\psi}_2 \mathbf{i}) dx + (\tilde{\psi}_1^2 + \tilde{\psi}_2^2) e^{\varphi \mathbf{i}} \mathbf{k} d\varphi. \end{aligned}$$

Dies ist gerade das Differential der Drehfläche, die durch die Meridiankurve

$$\gamma = (\tilde{\psi}_1^2 + \tilde{\psi}_2^2)\mathbf{j} + 2 \int \tilde{\psi}_1 \tilde{\psi}_2 dx \mathbf{i}$$

erzeugt wird (vgl. Lemma 12.4(iv)). Denn mit  $L\tilde{\psi} = 0$  gilt

$$\begin{aligned} (\tilde{\psi}_1^2 + \tilde{\psi}_2^2)' &= 2\tilde{\psi}_1\tilde{\psi}_1' + 2\tilde{\psi}_2\tilde{\psi}_2' = 2\tilde{\psi}_1\left(\frac{1}{2}\tilde{\psi}_1 + u\tilde{\psi}_2\right) - 2\tilde{\psi}_2\left(\frac{1}{2}\tilde{\psi}_2 + u\tilde{\psi}_1\right) \\ &= \tilde{\psi}_1^2 - \tilde{\psi}_2^2. \end{aligned}$$

Umgekehrt haben wir bereits am Anfang dieses Abschnittes gesehen, daß die zu  $f$  nach Theorem 11.4 gehörende Spin-Transformation die Form  $\psi = \tilde{\psi}e^{-\frac{\varphi}{2}\mathbf{i}}$  annimmt. Da  $\psi$  der Gleichung  $\mathcal{D}\psi = 0$  genügt, folgt mit obiger Äquivalenz die Gleichung  $L\tilde{\psi} = 0$ . Aus  $H|df| = u|dz|$  (s. Theorem 11.4(iii)),  $|df| = r|dz|$  und  $H = -\frac{1}{2r^3}(h'r + r'h'' - r''h')$  (s. Lemma 12.4(iii)) folgt die Gleichung für das Potential  $u = -\frac{1}{2r^2}(h'r + r'h'' - r''h')$ .  $\square$

**13.4. Beispiel.** Die 2-dimensionale Sphäre  $S^2$  läßt sich ohne Nord- und Südpol als Drehfläche verstehen. Die nach der hyperbolischen Bogenlänge parametrisierte Meridiankurve der  $S^2$  ist

$$\gamma_{S^2}(x) = \operatorname{sech}(x)\mathbf{j} + \tanh(x)\mathbf{i},$$

dabei ist  $\operatorname{sech}(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{\cosh(x)}$  und  $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ . Mit den Formeln  $\operatorname{sech}'(x) = -\operatorname{sech}(x)\tanh(x)$ ,  $\tanh'(x) = \operatorname{sech}(x)^2$  und  $\operatorname{sech}(x)^2 + \tanh(x)^2 = 1$  erhält man für das Potential von  $e^{\frac{\varphi}{2}\mathbf{i}}\gamma_{S^2}e^{-\frac{\varphi}{2}\mathbf{i}}$ :

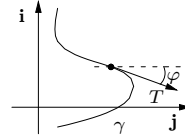
$$\begin{aligned} u_{S^2}(x) &= -\frac{1}{2\operatorname{sech}^2(x)} \left( \operatorname{sech}^2(x)\operatorname{sech}(x) + 2\operatorname{sech}(x)^3\tanh(x)^2 \right. \\ &\quad \left. - (\operatorname{sech}(x)\tanh^2(x) - \operatorname{sech}^3(x))\operatorname{sech}^2(x) \right) \\ &= -\operatorname{sech}(x). \end{aligned}$$

**13.5** Eine übersichtlichere Formel für das Potential  $u$  einer Kurve  $\gamma$  in  $H$  erhält man, wenn man  $u$  mit Hilfe des auf die  $\mathbf{j}$ -Achse bezogenen Anstellwinkels  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  des Tangenteneinheitsvektors  $T$  der nach der hyperbolischen Bogenlänge parametrisierten Kurve  $\gamma$  darstellt. Es gilt dann

$$r'\mathbf{j} + h'\mathbf{i} = \gamma' = T = r(\cos\varphi\mathbf{j} + \sin\varphi\mathbf{i})$$

und wir haben für  $u$ :

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{2r^2}(h'r + r'h'' - r''h') \\ &= -\frac{1}{2} \left( \sin\varphi + \cos\varphi \left( \frac{r'}{r} \sin\varphi + \varphi' \cos\varphi \right) - \left( \frac{r'}{r} \cos\varphi - \varphi' \sin\varphi \right) \sin\varphi \right) \\ &\iff -2u = \sin\varphi + \varphi' \end{aligned}$$



## 14. Der mKdV-Fluß einer Drehfläche

**14.1.** Die Darstellung von Drehflächen mit Lösungen der Gleichung

$$L_u\psi = 0 \quad \text{mit} \quad L_u = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2} & -u \\ u & \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ist für die Behandlung dieser Flächen nicht besonders interessant, denn sie lassen sich viel einfacher durch ihre Meridiankurve beschreiben. Andererseits ist der Operator  $L_u$  der Ausgangspunkt zur Lösung der modifizierten KORTEWEG-DE VRIES-Gleichung (*mKdV-Gleichung*)

$$u_t - u_{xxx} - 6u^2u_x = 0$$

mit der inversen Streumethode (inverse scattering method<sup>7</sup>). Diese Lösungsmethode für nichtlineare partielle Differentialgleichungen entstand nach einer bahnbrechenden Entdeckung von Norman ZABUSKY und Martin KRUSKAL [**ZaKru 65**]. Sie untersuchten die von D.J. KORTEWEG und G. DE VRIES in [**KdV 1895**] zur Beschreibung *solitärer Wasserwellen* eingeführte Differentialgleichung

$$u_t - u_{xxx} - 6uu_x = 0,$$

die sogenannte *KdV-Gleichung*. Diese Gleichung ist das erste mathematische Modell für die von dem Experimentalphysiker Scott RUSSELL im Jahre 1844 beschriebenen solitären Wasserwellen. Er beschreibt seine Entdeckung mit den folgenden Worten:

“I believe I shall best introduce this phæ nomenon by describing the circumstances of my own first acquaintance with it. I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped—not so the mass of water in the channel which it had put in motion; it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback, and overtook it still rolling on at a rate of some eight or nine miles an hour, preserving its original figure some thirty feet long and a foot to a foot and a half in height. Its height gradually diminished, and after a chase of one or two miles I lost it in the windings of the channel. Such, in the month of August 1834, was my first chance interview with that singular and beautiful phæ nomenon ...”<sup>8</sup>

In Experimenten fand RUSSELL weiterhin heraus, daß höhere solitäre Wellen steiler sind und sich schneller bewegen als flachere Wellen. RUSSELL gibt auch eine Gleichung für die Geschwindigkeit  $v$  dieser Wellen an

$$v^2 = g(h + k),$$

wobei  $g$  die Erdbeschleunigung,  $h$  die Wassertiefe der ruhenden Flüssigkeit und  $k$  die Höhe der Welle über der ruhenden Wasseroberfläche ist.

Erst 1895 fanden KORTEWEG und DE VRIES mit der nach ihnen benannten Gleichung eine mathematische Beschreibung des von RUSSELL beschriebenen Phänomens. Neben denjenigen Lösungen der mKdV-Gleichung, die

<sup>7</sup>Eine gut zugängliche Einführung in dieses Lösungsverfahren und verwandte Lösungsmethoden für Solitonen-Gleichungen findet man in [**DEGM**]. Das Buch [**DraJo**] ist eine Einführung im Stil der angewandten Mathematik. Weitere Monographien zu diesem Thema sind [**FaTa**], [**Lamb**], [**AbloSe**] und [**DKN 85**].

<sup>8</sup>Dieses Zitat entstammt dem sehr ausführlichen Bericht von Scott RUSSELL an die “British Association for the Advancement of Sciences” [**Ru 1844**].

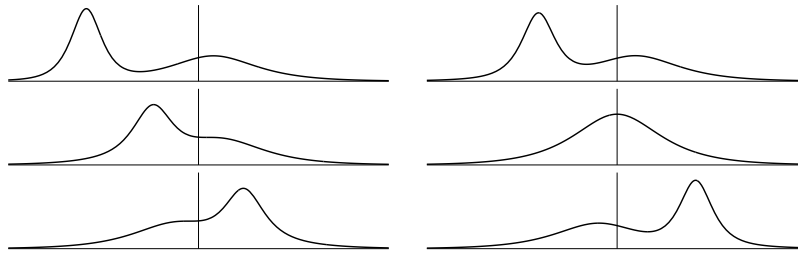


BILD 5. 2-Solitonen-Lösung, wesentlicher Höhenunterschied.

die solitären Wellen beschreiben, war das Verhalten allgemeiner Lösungen dieser Gleichung nicht bekannt.

Erst in den 60iger Jahren entdeckten Norman ZABUSKY und Martin KRUSKAL in Computereperimenten [Za 67], daß es Lösungen gibt, die aus zwei solitären Wellen bestehen, die sogenannten 2-Solitonen. Für  $t \ll 0$  befindet sich die größere und damit schnellere Welle links von der kleineren Welle. Bei fortschreitender Zeit bewegen sich beide Wellen wie zwei einzelne solitäre Wellen. Wenn die größere Welle die kleinere einholt, kommt es zu einer nichtlinearen Interaktion der beiden Wellen. Nach einer gewissen Zeit treten beide Wellen, die größere nun rechts von der kleineren, wieder hervor, nehmen ihre ursprüngliche Form wieder an und bewegen sich so fort als wäre nichts geschehen. Der einzige nach der Interaktion beobachtbare Effekt ist eine Phasenverschiebung, die größere Welle hat sich “während der Interaktion” schneller fortbewegt als vorher und die kleinere Welle langsamer.

Während der Interaktion treten zwei qualitativ verschiedene Verhaltensweisen der Wellen auf. Wenn die eine Welle wesentlich höher ist als die andere, dann schluckt die größere die kleinere Welle. Sie bilden einen wohlgeformten, glatten Wellenberg, dessen Höhe sich zwischen den Höhen der einzelnen Wellenberge befindet (s. Bild 5). Das zeigt, neben der Phasenverschiebung, daß keine lineare Interaktion vorliegt, denn sonst müßte die Höhe des Wellenberges die Summe der einzelnen Berge sein.

Sind die Höhen der beiden Wellen vergleichbar, nimmt die größere Welle an Höhe ab und die kleinere zu, bis beide Wellen gleich hoch sind. In diesem Moment tauschen die Wellen ihre Rollen aus, ohne zu einem Wellenberg zu verschmelzen. Die rechtere Welle nimmt nun wieder an Höhe zu, die linke wird wieder kleiner, bis beide Wellen ihre ursprünglichen Höhen wieder angenommen haben (s. Bild 6 und 7).

Kurz nach der Entdeckung dieser 2-Solitonen Lösungen der KdV-Gleichung stellten Clifford GARDNER, John GREENE, Martin KRUSKAL und Robert MIURA in [GGKM 67] eine Methode vor, mit der sich die  $N$ -Solitonen-Lösungen der KdV-Gleichung, das sind die Lösungen, welche aus einer Überlagerung von  $N \in \mathbb{N}$  solitären Wellen bzw. 1-Solitonen entstehen, explizit angeben lassen.

**14.2.** Peter LAX gibt in [Lax 68] eine Methode an, weitere Differentialgleichungen zu konstruieren, die dann möglicherweise mit der inversen Streumethode lösbar sind. Eine Reihe von Arbeiten in den 70iger Jahren zeigt, daß

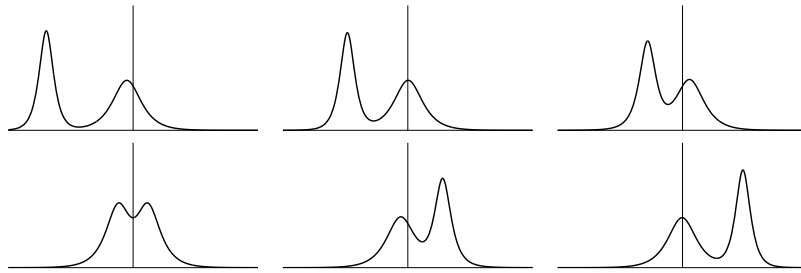


BILD 6. 2-Solitonen-Lösung, ähnliche Höhen.

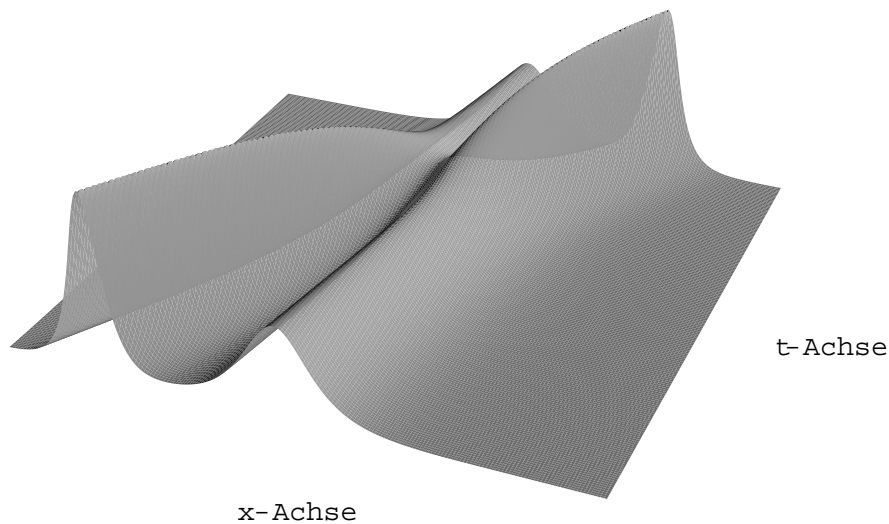


BILD 7. 2-Solitonen-Lösung, ähnliche Höhen.

sich die LAXsche Methode wirklich dazu verwenden läßt, neben der KdV-Gleichung weitere physikalisch relevante Differentialgleichungen zu lösen.

Die LAXsche Methode beruht darauf, zwei von einer Funktion  $u$  abhängige Differentialoperatoren  $A_u$  und  $B_u$  auf einem "passenden HILBERTraum" zu finden, so daß die Gleichung  $[A_u, B_u] = A_u B_u - B_u A_u = 0$  zu einer nicht-linearen partiellen Differentialgleichung in  $u$  äquivalent ist. Die Operatoren  $A_u$  und  $B_u$  werden das LAX-Paar der Differentialgleichung  $[A_u, B_u] = 0$  genannt. In unserem Fall geht es darum, einen weiteren Operator  $B_u$  zu  $L_u$  zu finden, so daß  $[B_u, L_u] = 0$  äquivalent zur mKdV-Gleichung ist. Da die Funktionalanalysis der LAXschen Methode im folgenden keine Rolle spielt, betrachten wir hier den Raum der glatten Abbildungen von  $\mathbb{R}^2$  in sich, der selbst kein HILBERTraum ist. Zur Anwendung funktionalanalytischer Methoden könnte man sich beispielsweise auf den Unterraum der schnell fallenden Funktionen beschränken, der sich dicht in einen "passenden" HILBERTraum einbetten läßt.

**14.3. Satz.** Sei  $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ein glattes reelles Potential und seien  $L_u$  (vgl. Satz 13.3) und  $B_u$  die folgendermaßen definierten Differentialoperatoren:

$$L_u = \frac{\partial}{\partial x} - M_u \quad \text{mit} \quad M_u = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & u \\ -u & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$B_u = \frac{\partial}{\partial t} - K_u \quad \text{mit} \quad K_u = \begin{pmatrix} u^2 + \frac{1}{2} & u_{xx} + u_x + 2u^3 + u \\ -u_{xx} + u_x - 2u^3 - u & -u^2 - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

auf  $C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ , wobei  $\frac{\partial}{\partial x}$  die Ableitung nach der ersten und  $\frac{\partial}{\partial t}$  die Ableitung nach der zweiten Koordinate von  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  ist.<sup>9</sup>

Die Operatoren  $L_u$  und  $B_u$  sind genau dann kompatibel, d.h.

$$[L_u, B_u] = 0,$$

wenn das Potential  $u$  die mKdV-Gleichung

$$u_t - u_{xxx} - 6u^2u_x = 0$$

erfüllt. Dabei bezeichnet  $[L_u, B_u] = L_u B_u - B_u L_u$  den Kommutator der beiden Operatoren.

Die Kompatibilität von  $L_u$  und  $B_u$  hat die folgende Bedeutung: Seien  $x_0, t_0 \in \mathbb{R}$  und  $\psi_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine Lösung von

$$L_{u(x,t_0)}\psi_0 = 0$$

und gelte  $[L_u, B_u] = 0$ , dann gibt es eine eindeutig bestimmte Lösung  $\psi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  des Anfangswertproblems

$$L_u\psi = 0, \quad B_u\psi = 0 \quad \text{mit} \quad \psi(x, t_0) = \psi_0(x).$$

Dieser Satz definiert folgendermaßen den mKdV-Fluß einer konform parametrisierten Drehfläche  $(\mathbb{C}, \mathbf{i}, f)$ . Sei  $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung der mKdV-Gleichung und  $f$  eine Drehfläche mit dem Potential  $u(x, 0)$ . Dann wird durch die WEIERSTRASS-Darstellung von  $f$  (Satz 13.3) eine Lösung  $\psi_0$  von  $L_{u(x,0)}\psi_0 = 0$  gegeben. Nach obigem Satz gibt es nun eine Spin-Transformation

$$\lambda(x + \varphi\mathbf{i}, t) = (\psi_1(x, t) + \psi_2(x, t)\mathbf{k})e^{-\frac{\varphi}{2}\mathbf{i}},$$

die für jede Zeit  $t \in \mathbb{R}$  durch die WEIERSTRASS-Darstellung eine Drehfläche  $(\mathbb{C}, \mathbf{i}, f(z, t))$  mit

$$df = \bar{\lambda} dz \mathbf{j} \lambda$$

und der Meridiankurve

$$\gamma = (\psi_1^2 + \psi_2^2)\mathbf{j} + 2 \int \psi_1 \psi_2 dx \mathbf{i}$$

definiert. Die Familie  $\{f(z, t)\}_{t \in \mathbb{R}}$  ist der sogenannte mKdV-Fluß von  $f(z) = f(z, 0)$ .

<sup>9</sup>Die Formel für den Operator  $B_u$  habe ich aus der Formel (26) in [Tai 97b, S. 5] und einer Variablentransformation berechnet.

*Beweis.* Sei  $\psi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  beliebig, dann folgt

$$\begin{aligned} [L_u, B_u]\psi &= \left[ \frac{\partial}{\partial x} - M_u, \frac{\partial}{\partial t} - K_u \right] \psi \\ &= \left[ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right] \psi - \left[ \frac{\partial}{\partial x}, K_u \right] \psi - \left[ M_u, \frac{\partial}{\partial t} \right] \psi + [M_u, K_u] \psi. \end{aligned}$$

Für die ersten drei Summanden gilt:

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right] \psi &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} = 0 \\ \left[ \frac{\partial}{\partial x}, K_u \right] \psi &= \frac{\partial K_u}{\partial x} \psi + K_u \frac{\partial \psi}{\partial x} - K_u \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial K_u}{\partial x} \psi \\ \left[ M_u, \frac{\partial}{\partial t} \right] \psi &= M_u \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial M_u}{\partial t} \psi - M_u \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\partial M_u}{\partial t} \psi. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} [L_u, B_u] &= -\frac{\partial K_u}{\partial x} + \frac{\partial M_u}{\partial t} + [M_u, K_u] \\ &= \begin{pmatrix} -2uu_x & -u_{xxx} - u_{xx} - 6u^2u_x - u_x \\ u_{xxx} - u_{xx} + 6u^2u_x + u_x & 2uu_x \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 & u_t \\ -u_t & 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(u^2 + \frac{1}{2}) & \frac{1}{2}(u_{xx} + u_x + 2u^3 + u) \\ +u(-u_{xx} + u_x - 2u^3 - u) & +u(-u^2 - \frac{1}{2}) \\ -u(u^2 + \frac{1}{2}) & -u(u_{xx} + u_x + 2u^3 + u) \\ -\frac{1}{2}(-u_{xx} + u_x - 2u^3 - u) & -\frac{1}{2}(-u^2 - \frac{1}{2}) \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(u^2 + \frac{1}{2}) & u(u^2 + \frac{1}{2}) \\ -u(u_{xx} + u_x + 2u^3 + u) & -\frac{1}{2}(u_{xx} + u_x + 2u^3 + u) \\ \frac{1}{2}(-u_{xx} + u_x - 2u^3 - u) & u(-u_{xx} + u_x - 2u^3 - u) \\ -u(-u^2 - \frac{1}{2}) & -\frac{1}{2}(-u^2 - \frac{1}{2}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & u_t - u_{xxx} - 6u^2u_x \\ -(u_t - u_{xxx} - 6u^2u_x) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit ist  $[L_u, B_u] = 0$  äquivalent zu  $u_t - u_{xxx} - 6u^2u_x = 0$ .

Seien nun  $L_u$  und  $B_u$  kompatibel. Die beiden Gleichungen  $L_u\psi = 0$  und  $B_u\psi = 0$  kann man in der für gewöhnliche, lineare Differentialgleichungen üblichen Art und Weise schreiben:

$$1) \psi' = M_u\psi \quad \text{und} \quad 2) \dot{\psi} = K_u\psi$$

mit  $' = \frac{\partial}{\partial x}$  und  $\dot{\phantom{x}} = \frac{\partial}{\partial t}$ .

Die gegebene Abbildung  $\psi_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  bestimmt durch  $\psi(x, t_0) = \psi_0(x)$  einen Anfangswert für die Differentialgleichung 2), dabei ist  $x \in \mathbb{R}$  als Parameter zu verstehen. Dieses Anfangswertproblem besitzt für jedes  $x \in \mathbb{R}$  eine eindeutig bestimmte, auf ganz  $\mathbb{R}$  definierte Lösung.<sup>10</sup> Bezeichne mit  $\psi(x, t)$  die für jedes feste  $x \in \mathbb{R}$  eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung 2) mit  $\psi(x, t_0) = \psi_0(x)$ . Diese Abbildung ist nach dem Satz von der Differenzierbarkeit nach der Anfangsbedingung<sup>11</sup> glatt.

Damit haben wir für  $\psi$ :

$$B_u \psi = 0 \quad \text{für alle } x, t \in \mathbb{R}$$

und

$$L_{u(x, t_0)} \psi = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$

Es bleibt zu zeigen, daß  $L_u \psi = 0$  nun automatisch für beliebige  $t \in \mathbb{R}$  erfüllt ist.

Aus der Kompatibilität der beiden Operatoren  $L_u$  und  $B_u$  und  $B_u \psi = 0$  folgt allerdings

$$B_u(L_u \psi) = L_u(B_u \psi) - [L_u, B_u] \psi = 0$$

für alle  $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . D.h.  $\varphi_x(t) := (L_{u(x, t)} \psi)(x, t)$  ist für jedes  $x \in \mathbb{R}$  eine Lösung von 2) mit dem Anfangswert  $\varphi_x(t_0) = (L_{u(x, t_0)} \psi)(x, t_0) = 0$ , also ist  $\varphi \equiv 0$  die eindeutig bestimmte Lösung dieses Anfangswertproblems, d.h.  $L_u \psi = 0$  für alle  $x, t \in \mathbb{R}$ .  $\square$

## 15. Symmetrien der mKdV-Gleichung und Drehflächen

**15.1.** Wie man leicht sieht, besitzt die mKdV-Gleichung folgende Symmetrien.

**Satz.** Ist  $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung der mKdV-Gleichung

$$u_t - u_{xxx} - 6u^2 u_x = 0,$$

dann lösen

$$\tilde{u}(x, t) := au(ax, a^3 t)$$

für jedes  $a \in \mathbb{R}$  und

$$\hat{u}(x, t) := -u(x, t)$$

auch die mKdV-Gleichung.

**15.2.** Es stellt sich nun die Frage: Welche Transformationen von Drehflächen erzeugen bei den Potentialen  $u$  dieser Drehflächen die Transformationen aus obigem Satz? Das Potential der lokalen WEIERSTRASS-Darstellung (Theorem 11.4) in der holomorphen Koordinate  $z$  einer konform parametrisierten Fläche  $(\mathbb{C}, \mathbf{i}, f)$  wird durch die Gleichung  $H|df| = u|dz|$  bestimmt.

<sup>10</sup>Den Existenz- und Eindeutigkeitsatz für gewöhnliche Differentialgleichungen findet man z.B. in [Arnol'd, Folgerung 3, S.94], genauso wie den Satz von der beliebigen Fortsetzbarkeit der Lösung einer linearen Differentialgleichung [Arnol'd, S. 246].

<sup>11</sup>[Arnol'd, S. 94, Folgerung 4].

Daran erkennt man, daß sich das Potential von  $f$  bei Umparametrisierungen ändert. Sei  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , dann ist

$$\tilde{f}(z) := f(az)$$

eine konforme Parametrisierung derselben Drehfläche mit  $|d_z \tilde{f}| = |a||dz|$  und  $\tilde{H}(z) = H(az)$ , weil die mittlere Krümmung als halbe Spur des WEINGARTEN-Operators von der Parametrisierung unabhängig ist. Das Potential transformiert sich dann mit

$$\tilde{u}(z) = |a|u(az).$$

Dies ergibt den folgenden Satz.

**Satz.** Sei  $(\mathbb{C}, \mathbf{i}, f(z, t))_{t \in \mathbb{R}}$  eine Familie von Drehflächen, und genügen ihre Potentiale  $u(x, t)$  der  $mKdV$ -Gleichung, dann erfüllen auch die Potentiale der Umparametrisierungen

$$\tilde{f}(z, t) := f(az, a^3 t)$$

für  $a \in \mathbb{R}$  die  $mKdV$ -Gleichung. Die Potentiale berechnen sich aus

$$\tilde{u}(x, t) = |a|u(ax, a^3 t).$$

**15.3.** In 13.5 wurde für das Potential einer nach der hyperbolischen Bogenlänge parametrisierten Kurve  $\gamma$  die Formel  $-2u = \varphi' + \sin \varphi$  hergeleitet. Sei nun  $\gamma^a(x) := \gamma(ax)$  für  $a \in \mathbb{R}_{>0}$  eine andere Parametrisierung derselben Kurve, dann haben wir für das Potential  $u^a$  dieser Kurve:

$$\begin{aligned} -2u^a(x) &= -2au(ax) = a(\varphi'(ax) + \sin \varphi(ax)) = (\varphi(ax))' + a \sin \varphi(ax) \\ \Leftrightarrow -2u^a &= (\varphi^a)' + a \sin \varphi^a, \end{aligned}$$

dabei ist  $\varphi^a(x) = \varphi(ax)$  der Anstellwinkel der Parametrisierung  $\gamma^a$ .

## 16. Die Poincarésche Halbebene

**16.1.** Per Definition wird eine Drehfläche durch ihre Meridiankurve bestimmt. Ist  $\gamma$  eine nach der hyperbolischen Bogenlänge parametrisierte Kurve in der POINCARÉschen Halbebene

$$H = \mathbb{R}_{>0} \mathbf{j} \oplus \mathbb{R} \mathbf{i} = \{ r \mathbf{j} + h \mathbf{i} \mid r, h \in \mathbb{R}, r > 0 \}$$

mit der Metrik

$$\langle x, y \rangle_H = r^{-2} \langle x, y \rangle = -r^{-2} \operatorname{Re}(xy),$$

so ist  $f(x + \varphi \mathbf{i}) = e^{\frac{\varphi}{2} \mathbf{i}} \gamma(x) e^{-\frac{\varphi}{2} \mathbf{i}}$  eine konforme Parametrisierung der zu  $\gamma$  gehörenden Drehfläche. Im Sinne von Satz 15.2 gehören zu dieser Parametrisierung die Parametrisierungen  $f^a(z) = f(az)$  für

$$a \in \mathbb{R}_{>0}$$

derselben Drehfläche. Diese erhält man aus der Meridiankurve  $\gamma$  durch

$$f^a(x + \varphi \mathbf{i}) = e^{a \frac{\varphi}{2} \mathbf{i}} \gamma(ax) e^{-a \frac{\varphi}{2} \mathbf{i}}.$$

**16.2.** Die Parametrisierung  $\gamma^a(x) := \gamma(ax)$  der Kurve  $\gamma$  ist gerade die Bogenlängenparametrisierung von  $\gamma$ , wenn man  $H$  mit der Metrik

$$\langle x, y \rangle_{H_a} := a^{-2} \langle x, y \rangle_H = (ar)^{-2} \langle x, y \rangle = -(ar)^{-2} \operatorname{Re}(xy)$$

versieht. Die GAUSSsche Krümmung der RIEMANNschen Mannigfaltigkeit  $H_a := (H, \langle \cdot, \cdot \rangle_{H_a})$  ist dann<sup>12</sup>

$$K_{H_a} = e^{2u}(K_{\mathbb{R}^3} - \Delta u) = -(ra)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = -a^2.$$

Wenn man also Drehflächen zur Untersuchung der mKdV-Gleichung verwendet, ist es naheliegend sich die Drehfläche als Kurve in  $H$  vorzustellen, deren Bogenlängenparametrisierungen in den Räumen  $H_a$ ,  $a \in \mathbb{R}_{>0}$  gerade die Schar der Potentiale  $au(ax)$  repräsentiert, welche als Anfangsbedingungen für eine Lösung der mKdV-Gleichung nach Satz 15.1 gleichwertig sind. In diesem Abschnitt soll deshalb die Kurve  $\gamma$  als Kurve in  $H_a$  und ihre geodätische Krümmung untersucht werden.

**16.3.** Die geodätische Krümmung einer Kurve  $\gamma$  in der RIEMANNschen Mannigfaltigkeit  $H_a$  ist folgendermaßen definiert

$$\kappa := \langle \nabla_T^{H_a} T, N \rangle_{H_a},$$

dabei ist  $T = \|\gamma'\|_{H_a}^{-1} \gamma'$  der Tangenteneinheitsvektor und  $N = T \mathbf{k}$  der Normaleneinheitsvektor von  $\gamma$ . Der LEVI-CIVITA-Zusammenhang  $\nabla^{H_a}$  von  $H_a$  wird durch die Formel<sup>13</sup>:

$$\nabla_X^{H_a} Y = dY(X) + du(Y)X + du(X)Y - \langle X, Y \rangle_{H_a} G$$

beschrieben, wobei  $G$  der Gradient des konformen Faktors  $u = -\ln(ar)$  bezogen auf die Metrik  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_a}$  ist, d.h.  $G = (ar)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial h} \mathbf{i} \right) = -a^2 r \mathbf{j}$ . Damit gilt für die Krümmung  $\kappa$  von  $\gamma(x) = r(x) \mathbf{j} + h(x) \mathbf{i}$ , falls  $\gamma$  nach der Bogenlänge in  $H_a$  parametrisiert ist:

$$\begin{aligned} \kappa &= \langle \nabla_{\gamma'}^{H_a} \gamma', N \rangle_{H_a} = \langle \gamma'' + 2du(\gamma')\gamma' - \langle \gamma', \gamma' \rangle_{H_a} G, N \rangle_{H_a} \\ &= \langle \gamma'' - G, N \rangle_{H_a} = (ar)^{-2} \langle r'' \mathbf{j} + h'' \mathbf{i} + a^2 r \mathbf{j}, -h' \mathbf{j} + r' \mathbf{i} \rangle_{H_a} \\ &= (ar)^{-2} (-a^2 r h' + r' h'' - r'' h'). \end{aligned}$$

**16.4.** Entsteht nun  $\gamma^a(x) = \gamma(ax) = r(ax) \mathbf{j} + h(ax) \mathbf{i}$  aus einer Bogenlängenparametrisierung  $\gamma$  einer Kurve in  $H_1$ , dann erhält man die Krümmung  $\kappa^a$  der Kurve in  $H_a$  aus der Krümmung  $\kappa$  derselben Kurve in  $H_1$  wie folgt:

$$\begin{aligned} \kappa^a(x) &= (ar(ax))^2 (-a^2 r(ax) ah'(ax) + ar'(ax) a^2 h''(ax) - a^2 r''(ax) ah'(ax)) \\ &= a\kappa(ax). \end{aligned}$$

Betrachtet man die Bogenlängenparametrisierung  $\gamma(x)$  der Kurve  $\gamma$  in  $H_1$  als eine Referenzparametrisierung mit der Krümmung  $\kappa$  und dem Potential  $u$  der zugehörigen Drehfläche, dann transformieren sich demnach die Krümmung und das Potential auf ein und dieselbe Weise, wenn wir  $\gamma$  anstatt als Kurve in  $H_1$  als Kurve in  $H_a$  betrachten (s.a. Satz 15.2).

**16.5.** Wie in 15.3 läßt sich auch für  $\kappa^a$  eine Formel angeben, in die nur  $\varphi^a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , der auf die  $\mathbf{j}$ -Achse bezogene Anstellwinkel des Tangentialvektors von  $\gamma^a$ , eingeht. Vergleicht man die Formel in 13.5 für das Potential  $u$  mit der oben für  $\kappa^a$  berechneten, erhält man sofort

$$\kappa^a(x) = (\varphi^a)' - \sin \varphi^a.$$

<sup>12</sup>[Willmore, Formel (3.24), S.106]:  $n = 2$ ,  $\bar{\tau} = 2K_{H_a}$ ,  $\tau = 2K_{\mathbb{R}^3} = 0$ ,  $u = -\ln(ar)$ .

<sup>13</sup>[Willmore, Formel (3.29), S.109]:  $\alpha = du$ ,  $\alpha^* = G$ ,  $\nabla_X Y = \nabla_X^{\mathbb{R}^3} Y = dY(X)$ .

**16.6.** Die geodätische Krümmung  $\kappa^a$  einer Kurve ist invariant unter den Isometrien von  $H_a$ .

**Satz.** Die folgenden Abbildungen der POINCARÉschen Halbebene  $H$  in sich sind Isometrien von  $H_a$  für beliebiges  $a \in \mathbb{R}_{>0}$ .

- (i) Translationen parallel zur  $\mathbf{i}$ -Achse:  $T_c: H \rightarrow H, x \mapsto x + c\mathbf{i}, c \in \mathbb{R}$ .
- (ii) Streckungen im Nullpunkt:  $S_c: H \rightarrow H, x \mapsto cx, c \in \mathbb{R}_{>0}$ .
- (iii) Spiegelung an der  $\mathbf{j}$ -Achse:  $R: H \rightarrow H, x = r\mathbf{j} + h\mathbf{i} \mapsto r\mathbf{j} - h\mathbf{i}$ .
- (iv) Inversion am Einheitskreis:  $I: H \rightarrow H, x \mapsto \frac{x}{|x|^2} = -\frac{1}{x}$ .

Die Translationen und die Streckungen erhalten die Orientierung von  $H$ , die Spiegelung und die Inversion hingegen kehren die Orientierung um.

*Beweis.* Wir identifizieren die Tangentialräume  $T_{r\mathbf{j}+h\mathbf{i}}H$  auf kanonische Weise mit  $\mathbb{R}\mathbf{j} \oplus \mathbb{R}\mathbf{i}$ . Dann ist das Differential der Translation, der Streckung und der Spiegelung unabhängig vom Punkt  $p = r\mathbf{j} + h\mathbf{i} \in H$  und es gilt:

- (i)  $dT_c = \text{Id}_{\mathbb{R}\mathbf{j} \oplus \mathbb{R}\mathbf{i}}$  für alle  $c \in \mathbb{R}$ ,
- (ii)  $dS_c = c \text{Id}_{\mathbb{R}\mathbf{j} \oplus \mathbb{R}\mathbf{i}}$  für alle  $c \in \mathbb{R}_{>0}$ ,
- (iii)  $dR = R$

Das Differential der Inversion ist:

$$(iv) \quad d_p I(X) = \frac{1}{|p|^2} \left( X - 2 \langle X, \frac{p}{|p|} \rangle \frac{p}{|p|} \right).$$

Die Abbildung  $d_p I$  ist also die Komposition einer Spiegelung an der zu  $p$  senkrechten Geraden durch Null in  $\mathbb{R}\mathbf{j} \oplus \mathbb{R}\mathbf{i}$  und einer Streckung in Null mit dem Streckungsfaktor  $|p|^{-2}$ .

Da es nun auf die Abhängigkeit der Metrik vom Punkt  $p = r\mathbf{j} + h\mathbf{i} \in H$  ankommt, notieren wir

$$g_p(X, Y) = \langle X, Y \rangle_{H_a} = (ar)^{-2} \langle X, Y \rangle$$

für alle  $X, Y \in \mathbb{R}\mathbf{j} \oplus \mathbb{R}\mathbf{i} \cong T_p H$ . Dann gilt

- (i)  $g_{T_c(p)}(dT_c(X), dT_c(Y)) = g_{r\mathbf{j}+(h+c)\mathbf{i}}(X, Y) = g_p(X, Y)$ ,
- (ii)  $g_{S_c(p)}(dS_c(X), dS_c(Y)) = g_{cp}(cX, cY) = c^{-2} g_p(cX, cY) = g_p(X, Y)$ ,
- (iii)  $g_{R(p)}(dR(X), dR(Y)) = g_{r\mathbf{j}-h\mathbf{i}}(R(X), R(Y)) = g_p(X, Y)$ ,
- (iv)  $g_{I(p)}(d_p I(X), d_p I(Y)) = g_{\frac{p}{|p|^2}}(d_p I(X), d_p I(Y))$   
 $= |p|^4 g_p(|p|^{-2} X, |p|^{-2} Y) = g(X, Y)$ .

Die Wirkung der Abbildungen auf die Orientierung folgt direkt aus den Gleichungen für ihre Differentiale.  $\square$

**16.7.** Abschließend sollen die Geodäten von  $H_a$  bestimmt werden. Dazu verwenden wir die Tatsache, daß jede Kurve, die unter einer orientierungsumkehrenden Isometrie punktweise fest bleibt, eine Geodäte ist. Denn unter einer solchen Isometrie wechselt die geodätische Krümmung von Kurven ihr Vorzeichen. Da die Kurve aber unter der Isometrie fest bleiben soll, ändert sich ihre Krümmung nicht. Dies ist nur dann möglich, wenn die geodätische Krümmung dieser Kurve Null ist.

Die Abbildungen  $T_{c_1} \circ S_{c_2} \circ I \circ S_{\frac{1}{c_2}} \circ T_{-c_1}$  für  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ,  $c_2 > 0$  sind orientierungsumkehrende Isometrien, die jeweils den Halbkreis mit Mittelpunkt  $c_1 \mathbf{i}$  und Radius  $c_2$  in  $H$  fest lassen. Die Abbildung  $T_c \circ I \circ T_{-c}$  ist eine orientierungsumkehrende Isometrie, die den Strahl  $\mathbb{R} \mathbf{j} \oplus \{c \mathbf{i}\}$  fest läßt. Damit haben wir die Geodäten von  $H_a$  gefunden:

**Satz.** *Die senkrecht auf der  $\mathbf{i}$ -Achse stehenden Kreise und Strahlen in  $H$  sind die Geodäten von  $H_a$ ,  $a \in \mathbb{R}_{>0}$ .*

## 17. Dualflächen

In diesem Abschnitt soll eine geometrische Transformation von Flächen eingeführt werden, die auf eine Drehfläche angewandt, eine BÄCKLUND-Transformation der mKdV-Gleichung darstellt.

**17.1. Definition.** Sei  $(M, J, f)$  eine konform parametrisierte Fläche mit dem Normalenvektor  $N: M \rightarrow S^2$ . Eine weitere konform parametrisierte Fläche  $(M, J, f^*)$  heißt *Dualfläche* von  $f$ , falls  $-N$  der zu  $f^*$  gehörende Normalenvektor ist.

**17.2. Lemma.** *Seien  $(M, J, f)$  und  $(M, J, f^*)$  zwei konform parametrisierte Flächen und  $N: M \rightarrow S^2$  der Normalenvektor von  $f$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

- (i) Die Fläche  $(M, J, f^*)$  ist eine Dualfläche von  $f$ .
- (ii)  $*df^* + Ndf^* = 0$ .
- (iii)  $df \wedge df^* = 0$ .

*Beweis.* “(i)  $\Leftrightarrow$  (ii)”: Nach Lemma 9.1 und Definition 17.1 ist  $f^*$  genau dann eine Dualfläche von  $f$ , wenn  $*df^* = -Ndf^*$  gilt.

“(ii)  $\Leftrightarrow$  (iii)”: Faßt man  $df \wedge df^*$  als quadratische Form auf, so folgt:

$$df \wedge df^* = df *df^* - *df df^* = df *df^* - Ndf df^* = df (*df^* + Ndf^*).$$

Da  $f$  eine Immersion ist, folgt daraus die Behauptung.  $\square$

**17.3. Bemerkung.** Sei  $c \in \mathbb{H} \setminus \{-f^*(p) \mid p \in M\}$  eine Konstante. Dann ist  $(f^* + c): M \rightarrow \mathbb{H}_*$  wegen (ii) eine Spin-Transformation zu  $f$  mit dem Potential  $u = 0$ .

Allgemein heißt eine Spin-Transformation  $\lambda: M \rightarrow \mathbb{H}_*$  einer konformen Immersion  $(M, J, f)$  *isopotential*, wenn  $\lambda$  die DIRAC-Gleichung zu  $f$  mit dem Potential  $u = 0$  löst, d.h. es gilt  $*d\lambda + Nd\lambda = 0$  bzw.  $df \wedge d\lambda = 0$ .

Eine Dualfläche  $f^*$  einer konformen Immersion  $f$  auf einer einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit liefert also eine 4-Parameterfamilie von Flächen  $df_c = \overline{(f^* + c)} df (f^* + c)$ , für die das Produkt  $H_c |df_c|$  unabhängig von  $c$  ist.

**17.4.** Ein Punkt  $p \in M$  heißt *Nabelpunkt* der Fläche  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ , falls die beiden Eigenwerte des WEINGARTEN-Operators  $A = df^{-1} \circ dN$  von  $f$  in  $p$  gleich sind. Dies ist wegen  $dN = Hdf + dN_-$  (vgl. 9.4) äquivalent zu  $dN_- = 0$ . Zur Eindeutigkeit der Dualfläche einer nabelpunktfreien Fläche findet sich in der Vorlesung von Ulrich PINKALL [Pinkall 96] das folgende Lemma.

**Lemma.** Sei  $(M, J, f)$  eine konform parametrisierte, nabelpunktfreie Fläche mit dem Normalenvektor  $N: M \rightarrow S^2$ . Besitzt  $f$  eine Dualfläche  $f^*$ , dann ist sie bis auf eine Translation und eine Streckung (mit möglicherweise negativem Faktor) eindeutig bestimmt. Es gilt  $dN_- = -H^*df^*$ , wobei  $H^*$  die nicht verschwindende mittlere Krümmung von  $f^*$  ist.

*Beweis.* Für den Normalenvektor  $N^* = -N$  von  $f^*$  gilt

$$dN_+^* = \frac{1}{2}(dN^* - N^* * dN^*) = \frac{1}{2}(-dN - N * dN) = -dN_-.$$

In 9.4 wurde gezeigt, daß  $dN_+^* = H^*df^*$  ist. Also ist  $dN_- = -H^*df^*$ .

Da die 1-Formen  $dN_-$  und  $df$  nicht verschwinden, ist  $H^* \neq 0$  auf ganz  $M$ . Die Transformation  $f^* \mapsto -f^*$  verändert den Normalenvektor nicht, d.h.  $dN_+ = H^*df^*$  ist invariant unter dieser Transformation, daher transformiert sich  $H^* \mapsto -H^*$ . Man kann deshalb annehmen, daß  $H^* < 0$  ist. Dann existiert eine Funktion  $\varrho: M \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $e^\varrho = -H^*$ .

Sei nun  $(M, J, \tilde{f}^*)$  eine weitere Dualfläche von  $f$ . Dann gilt genauso  $dN_- = -\tilde{H}^*d\tilde{f}^*$ . Sei  $\tilde{\varrho}: M \rightarrow \mathbb{R}$  so gewählt, daß  $e^{\tilde{\varrho}} = -\tilde{H}^*$  gilt. Dann folgt aus  $e^{\tilde{\varrho}}d\tilde{f}^* = e^\varrho df^* = dN_-$ :

$$\begin{aligned} 0 &= (e^{\tilde{\varrho}}d\tilde{\varrho}) \wedge d\tilde{f}^* - (e^\varrho d\varrho) \wedge df^* = d\tilde{\varrho} \wedge dN_- - d\varrho \wedge dN_- \\ &= d(\tilde{\varrho} - \varrho) \wedge dN_- = d(\tilde{\varrho} - \varrho) * dN_- - *d(\tilde{\varrho} - \varrho) dN_- \end{aligned}$$

Da  $dN_-$  antikonform ist, sind die Vektoren  $dN_-(X)$  und  $dN_-(JX)$  für jedes  $X \in TM \setminus \{0\}$  linear unabhängig. Damit ist  $d(\tilde{\varrho} - \varrho) = 0$ , und es gibt eine Konstante  $c \in \mathbb{R}$ , so daß  $\tilde{\varrho} = \varrho + c$  ist. Es gilt also  $d\tilde{f}^* = e^{-c}df^*$ .  $\square$

**17.5. Bemerkung.** Aus diesem Lemma und der Symmetrie der Gleichung  $df \wedge df^* = 0$  folgt, daß das Bilden der Dualfläche für nabelpunktfreie Flächen mit nicht verschwindender mittlerer Krümmung eine Involution ist. Modulo Translation und Streckung gilt somit

$$(f^*)^* = f.$$

**17.6.** Zu einer Drehfläche gibt es immer eine duale Drehfläche. Ihre Meridiankurve läßt sich explizit angeben.

**Lemma.** Sei  $\gamma = r\mathbf{j} + h\mathbf{i}: \mathbb{R} \rightarrow H$  eine nach der hyperbolischen Bogenlänge parametrisierte Kurve in der POINCARÉschen Halbebene  $H$ . Dann ist die durch die Meridiankurve

$$\gamma^* = r^*\mathbf{j} + h^*\mathbf{i} \quad \text{mit} \quad r^* = \frac{1}{r} \quad \text{und} \quad (h^*)' = -\frac{1}{r^2} h'$$

definierte Drehfläche  $f^* = e^{\frac{\varrho}{2}\mathbf{i}}\gamma^*e^{-\frac{\varrho}{2}\mathbf{i}}$  eine Dualfläche zu  $f = e^{\frac{\varrho}{2}\mathbf{i}}\gamma e^{-\frac{\varrho}{2}\mathbf{i}}$ . Die mittlere Krümmung von  $f^*$  ist durch folgende Formel gegeben

$$H^* = \frac{1}{r} (h'r - r'h'' + r''h').$$

Bei Drehflächen, auch bei denen, deren Dualfläche nicht eindeutig bestimmt ist, werden wir von der Dualfläche  $f^*$  sprechen, und die in diesem Lemma angegebene Fläche meinen. In diesem Sinne ist die hier angegebene Kurve  $\gamma^*$  die duale Kurve von  $\gamma$ .

*Beweis.* Wir zeigen  $N^* = -N$ . Für den Normalenvektor einer Drehfläche  $f$  gilt nach Lemma 12.4 (i):

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{r} (r' \mathbf{i} - h' e^{\varphi} \mathbf{j}) = -r \left( -\frac{r'}{r^2} \mathbf{i} + \frac{h'}{r^2} e^{\varphi} \mathbf{j} \right) = -\frac{1}{r^*} ((r^*)' \mathbf{i} - (h^*)' e^{\varphi} \mathbf{j}) \\ &= -N^*, \end{aligned}$$

wenn  $r^*$  und  $h^*$  durch obige Gleichungen definiert sind. Die Formel für die mittlere Krümmung folgt mit den Formeln für  $r^*$  und  $(h^*)'$  aus Lemma 12.4 (iii):

$$\begin{aligned} H^* &= -\frac{1}{2(r^*)^3} ((h^*)' r^* + (r^*)' (h^*)'' - (r^*)'' (h^*)') \\ &= -\frac{1}{2} r^3 \left( -\frac{h'}{r^2} \frac{1}{r} + \frac{r'}{r^2} \frac{(h'' r - 2h' r')}{r^3} - \frac{(r'' r - 2(r')^2) h'}{r^3} \frac{1}{r^2} \right) \\ &= -\frac{1}{2r} (-h' r + r' h'' - r'' h') \end{aligned}$$

□

**17.7.** Aus der Formel für die mittlere Krümmung der dualen Drehfläche erhält man

$$-2u^* = -2H^* r^* = -\frac{1}{r^2} (-h' r + r' h'' - r'' h') = \kappa,$$

die hyperbolische Krümmung der Meridiankurve  $\gamma$  von  $f$  (vgl. 16.3). Für die auf die  $\mathbf{j}$ -Achse bezogenen Anstellwinkel  $\varphi$ ,  $\varphi^*: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  der Tangentialvektoren von  $\gamma$  und  $\gamma^*$  gilt

$$\varphi^* = \varphi + \pi,$$

denn diese Gleichung bedeutet, daß der Tangentialvektor von  $\gamma$  und damit ebenfalls der Normalenvektor von  $\gamma$  um  $180^\circ$  gedreht werden. Das ist gerade die Definition der Dualfläche von  $f$ .

Damit erhält man folgende Beziehungen zwischen dem Anstellwinkel  $\varphi$  von  $\gamma$ , den hyperbolischen Krümmungen  $\kappa$ ,  $\kappa^*$  sowie den Potentialen  $u$ ,  $u^*$  von  $\gamma$  und  $\gamma^*$ :

$$\begin{aligned} -2H^* r^* = -2u^* = \kappa &= \varphi' - a \sin \varphi, \\ -2Hr = -2u = \kappa^* &= \varphi' + a \sin \varphi, \end{aligned}$$

wenn man  $\gamma$  als Kurve in  $H_a$  betrachtet (vgl. 15.3).

## 18. Die 1. Variationsgleichung der hyperbolischen Biegeenergie

**18.1.** Sei  $\gamma: [0, L] \rightarrow H = \mathbb{R}_{>0} \mathbf{i} \oplus \mathbb{R} \mathbf{j}$  eine Kurve in der POINCARÉschen Halbebene  $H_1$ . Bezeichne  $v = \|\gamma'\|_{H_1}$  ihre Geschwindigkeit,  $T = v^{-1} \gamma'$  ihren Tangenteneinheitsvektor und  $N = T \mathbf{k}$  ihren Normaleneinheitsvektor. Dann ist

$$E = \frac{1}{2} \int_0^L \kappa^2 ds = \frac{1}{2} \int_0^L \kappa^2 v dx$$

die (*hyperbolische*) Biegeenergie von  $\gamma$ , wobei  $\kappa = \langle \nabla_T T, N \rangle_{H_1}$  die Krümmung von  $\gamma$  in  $H_1$  ist. In diesem Abschnitt sollen kritische Punkte dieses Funktionals auf dem Raum aller Kurven in  $H$  untersucht werden. Eine Kurve

$\gamma: [0, L] \rightarrow H$  heißt *kritischer Punkt* der Biegeenergie  $E$ , wenn für jede Variation der Kurve  $\gamma$

$$\gamma: [0, L] \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow H$$

mit  $\gamma(x, 0) = \gamma(x)$ , der Punkt  $t = 0$  ein kritischer Punkt der Funktion

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \kappa^2(x, t) v(x, t) dx$$

ist, d.h.  $\dot{E}(t) = 0$ . Da der Integrand eine glatte Funktion eines kompakten Rechtecks ist, kann man Integration und Differentiation vertauschen. Es folgt:

$$\dot{E}(t) = \frac{\partial}{\partial t} \int_0^L \frac{1}{2} \kappa^2 v dx = \int_0^L \dot{\kappa} \kappa v + \frac{1}{2} \kappa^2 \dot{v} dx. \quad (18.1)$$

Diese Gleichung kann man auch als die Richtungsableitung von  $E$  in Richtung von  $\dot{\gamma}$  im Punkt  $\gamma$  ansehen.

**18.2.** Es gilt nun Formeln für  $\dot{\kappa}(x, 0)$  und  $\dot{v}(x, 0)$  in Abhängigkeit von  $\dot{\gamma}(x, 0)$  zu finden. Dazu schreiben wir

$$\dot{\gamma}(x, t) = \alpha(x, t) T(x, t) + \beta(x, t) N(x, t) \quad (18.2)$$

für zwei glatte Funktionen  $\alpha, \beta: [0, L] \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir notieren wie zuvor  $' = \frac{\partial}{\partial x}$  und  $\dot{\phantom{x}} = \frac{\partial}{\partial t}$ . Wir schreiben weiterhin  $\nabla_T \nu$ ,  $\nabla_{\dot{\gamma}} \nu$  und  $\nabla_{\dot{\gamma}} \nu$  für Vektorfelder  $\nu$  entlang  $\gamma$  und meinen die eindeutig bestimmte kovariante Ableitung entlang  $\gamma$  (s. [Spivak, Vol. I, Chapter 6, Proposition 2]), d.h.  $\nabla_T \nu = v^{-1} \nabla_{\gamma'} \nu = \frac{D\nu}{dx}$  und  $\nabla_{\dot{\gamma}} \nu = \frac{D\nu}{dt}$ . Ein Abbildung  $\nu: [0, L] \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow TH$  heißt dabei ein *Vektorfeld entlang von  $\gamma$* , wenn  $\nu(x, t) \in T_{\gamma(x, t)} H$  ist. Mit diesen Bezeichnungen gilt:

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \gamma' - \nabla_{\gamma'} \dot{\gamma} = [\dot{\gamma}, \gamma'] = 0.$$

Sei o.B.d.A.  $\|\gamma'(x, 0)\| = 1$  und  $\epsilon$  so klein, daß  $v(x, t) \neq 0$  ist, für alle  $(x, t) \in [0, L] \times (-\epsilon, \epsilon)$ . Dann haben wir

$$\dot{\kappa} = \frac{\partial}{\partial t} \langle \nabla_T T, N \rangle_{H_1} = \langle \nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_T T, N \rangle_{H_1} + \langle \nabla_T T, \nabla_{\dot{\gamma}} N \rangle_{H_1}. \quad (18.3)$$

Aus  $\nabla_T T = \kappa N$  und  $\langle \nabla_{\dot{\gamma}} N, N \rangle_{H_1} = 0$  folgt

$$\langle \nabla_T T, \nabla_{\dot{\gamma}} N \rangle_{H_1} = 0. \quad (18.4)$$

Bezeichne  $\mathcal{R}$  den Krümmungstensor von  $H_1$ , dann erhält man aus den Formeln (18.3) und (18.4):

$$\dot{\kappa} = \langle \nabla_{\dot{\gamma}} \nabla_T T, N \rangle_{H_1} = \langle \mathcal{R}(\dot{\gamma}, T) T, N \rangle_{H_1} + \langle \nabla_T \nabla_{\dot{\gamma}} T, N \rangle_{H_1} + \langle \nabla_{[\dot{\gamma}, T]} T, N \rangle_{H_1}. \quad (18.5)$$

Für die einzelnen Summanden dieser Formel ergibt sich

$$\langle \mathcal{R}(\dot{\gamma}, T) T, N \rangle_{H_1} = \beta \langle \mathcal{R}(N, T) T, N \rangle_{H_1} = -\beta, \quad (18.6)$$

da die GAUSSsche Krümmung von  $H_1$  gleich  $-1$  ist (nach 16.2),

$$\begin{aligned} [\dot{\gamma}, T] &= [\dot{\gamma}, v^{-1} \gamma'] = v^{-1} [\dot{\gamma}, \gamma'] - \dot{v} v^{-2} \gamma' = -\dot{v} v^{-1} T \\ \implies \langle \nabla_{[\dot{\gamma}, T]} T, N \rangle_{H_1} &= -\dot{v} v^{-1} \langle \nabla_T T, N \rangle_{H_1} = -\dot{v} v^{-1} \kappa \end{aligned} \quad (18.7)$$

und

$$\begin{aligned}\nabla_{\dot{\gamma}}T &= \nabla_{\dot{\gamma}}(v^{-1}\gamma') = -\dot{v}v^{-2}\gamma' + v^{-1}\nabla_{\gamma'}\dot{\gamma} \\ &= -\dot{v}v^{-1}T + v^{-1}(\alpha'T + \beta'N + \alpha v\kappa N - \beta v\kappa T) \\ &= (-\dot{v} + \alpha' - v\beta\kappa)v^{-1}T + (\beta' + v\alpha\kappa)v^{-1}N.\end{aligned}\quad (18.8)$$

Aus den Gleichungen (18.8) und  $\langle \nabla_{\dot{\gamma}}T, T \rangle_{H_1} = 0$  erhält man die beiden Gleichungen

$$\dot{v} = \alpha' - v\beta\kappa \quad (18.9)$$

$$\nabla_{\dot{\gamma}}T = (\beta'v^{-1} + \alpha\kappa)N \quad (18.10)$$

Setzt man nun (18.6), (18.7), (18.9) und (18.10) in (18.5) ein, so folgt:

$$\begin{aligned}\dot{\kappa} &= -\beta + \langle \nabla_T((\beta'v^{-1} + \alpha\kappa)N), N \rangle_{H_1} - \dot{v}v^{-1}\kappa \\ &= -\beta + \beta''v^{-1} - \beta'v'v^{-2} + \alpha'\kappa + \alpha\kappa' - \alpha'v^{-1}\kappa + \beta\kappa^2\end{aligned}\quad (18.11)$$

Mit  $v(x, 0) = 1$  folgt (18.9) und (18.11):

$$\dot{v} = \Big|_{t=0} \alpha' - \beta\kappa \quad (18.12)$$

$$\dot{\kappa} = \Big|_{t=0} \beta'' + \beta(\kappa^2 - 1) + \alpha\kappa' \quad (18.13)$$

**18.3.** Die Gleichungen (18.12) und (18.13) in (18.1) eingesetzt führen zu

$$\begin{aligned}\dot{E}(0) &= \int_0^L (\beta'' + \beta(\kappa^2 - 1) + \alpha\kappa')\kappa + \frac{1}{2}\alpha'\kappa^2 - \frac{1}{2}\beta\kappa^3 dx \\ &= \int_0^L \beta''\kappa + \beta\left(\frac{1}{2}\kappa^3 - \kappa\right) + \frac{1}{2}(\alpha\kappa^2)' dx\end{aligned}$$

Sind die Kurven  $\gamma$  geschlossen oder beschränkt man sich auf Variationen mit festen Endpunkten, d.h. auf solche Variationen für die es ein  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$  gibt, so daß  $\gamma(x, t) = \gamma(x)$  für alle  $(x, t) \in [0, \delta) \times (-\delta, \delta) \cup (L - \delta, L] \times (-\delta, \delta)$ . Dann folgt mit partieller Integration

$$\dot{E}(0) = \int_0^L \beta(\kappa'' + \frac{1}{2}\kappa^3 - \kappa) dx$$

**18.4.** Für jede Kurve  $\gamma: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  und jede Funktion  $\beta: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ , die nahe 0 und  $L$  konstant ist, gibt es eine Variation von  $\gamma$ , so daß die Funktion  $\beta(x, t)$  in (18.2) zur Zeit  $t = 0$  mit  $\beta(x)$  übereinstimmt. Damit ist  $\dot{E}(0) = 0$  genau dann, wenn  $\kappa'' + \frac{1}{2}\kappa^3 - \kappa = 0$  ist.

**Lemma.** *Eine Kurve  $\gamma: [0, L] \rightarrow H$  ist genau dann ein kritischer Punkt der hyperbolischen Biegeenergie (unter den geschlossenen oder nahe 0 und  $L$  identischen Kurven), wenn die hyperbolische Krümmung  $\kappa$  von  $\gamma$  die Gleichung*

$$\kappa'' + \frac{1}{2}\kappa^3 - \kappa = 0 \quad (18.14)$$

erfüllt.

**18.5.** Ist  $\kappa$  eine Lösung der Gleichung (18.14), dann ist

$$u(x, t) := \frac{1}{2}c\kappa(cx + c^3t)$$

für jede Konstante  $c \in \mathbb{R}$  eine Lösung der mKdV-Gleichung  $u_t - u_{xxx} - 6u^2u_x = 0$ . Denn aus (18.14) folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{2}{c^3}u_{xx} + \frac{4}{c^3}u^3 - \frac{2}{c}u \\ \implies 0 &= u_{xxx} + 6u^2u_x - c^2u_x \\ \implies 0 &= u_t - u_{xxx} - 6u^2u_x. \end{aligned}$$

Diese Lösungen der mKdV-Gleichung sind mit der Geschwindigkeit  $c^2$  wandernde Wellen, deren Form aus der Krümmung  $\kappa$  der für die Biegeenergie kritischen Kurve  $\gamma$  durch Streckung um  $\frac{1}{c}$  in  $x$ -Richtung und um  $c$  in  $u$ -Richtung entsteht. Solche wandernden Wellen werden auch stationäre Lösungen der mKdV-Gleichung genannt, da ihre Form zu allen Zeiten unverändert bleibt.

## 19. Der mKdV-Fluß der Meridiankurve

Mit den Formeln aus dem letzten Abschnitt läßt sich der folgende Satz beweisen.

**19.1. Satz.** Sei  $\gamma: \mathbb{R} \times [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow H$  eine glatte Kurvenschar in der POINCARÉschen Halbebene  $H$  und  $\gamma(x, 0)$  nach der hyperbolischen Bogenlänge parametrisiert. Bezeichne  $T$  den Tangenteneinheitsvektor und  $N$  den Normaleneinheitsvektor der Kurven  $\gamma(x, t = \text{const})$ . Erfüllt  $\gamma$  die Differentialgleichung

$$\dot{\gamma} = \left(\frac{1}{2}\kappa^2 + 1\right)T + \kappa' N, \quad (19.1)$$

dann sind alle Kurven  $\gamma(x, t = \text{const})$  nach der hyperbolischen Bogenlänge parametrisiert und ihre hyperbolischen Krümmungen  $\kappa(x, t)$  erfüllen

$$\dot{\kappa} - \kappa' - \frac{3}{2}\kappa^2\kappa' = 0. \quad (19.2)$$

**19.2. Bemerkung.** Mit der Substitution  $\kappa = -2u$  ist die Gleichung (19.2) äquivalent zur mKdV-Gleichung

$$u_t - u_{xxx} - 6u^2u_x = 0.$$

Deshalb wird (19.2) oft genauso wie  $u_t - u_{xxx} - 6u^2u_x = 0$  als mKdV-Gleichung bezeichnet.

Es gibt eine Reihe weiterer Gleichungen, die über eine "triviale" Lösungstransformation aus der mKdV-Gleichung in der Form  $u_t - u_{xxx} - 6u^2u_x = 0$  hervorgehen, jede dieser Gleichungen wird "mKdV-Gleichung" genannt.

Sei beispielsweise  $\tilde{u}(x, t) = au(bx - ct, et) + f$  mit  $a, b, c, e, f \in \mathbb{R}$  und  $a \neq 0, b \neq 0$  sowie  $e \neq 0$ . Dann ist  $\tilde{u}_t - \tilde{u}_{xxx} - 6\tilde{u}^2\tilde{u}_x = 0$  äquivalent zu

$$\begin{aligned} 0 &= a(-cu_x + eu_t) - ab^3u_{xxx} - 6a^2(u + f)^2abu_x \\ \iff 0 &= eu_t - b^3u_{xxx} - 6a^2bu^2u_x - 12a^2bfuu_x - (6a^2bf^2 + c)u_x \end{aligned}$$

Es lassen sich also beliebige Koeffizienten vor den einzelnen Termen realisieren, nur das Vorzeichen der Koeffizienten vor  $v_{xxx}$  und  $v^2v_x$  ist in allen Fällen gleich.

*Beweis.* Wir können die im vorigen Abschnitt hergeleiteten Gleichungen verwenden. Die Gleichung (18.2) wird (19.1) wenn wir

$$\alpha = \frac{1}{2}\kappa^2 + 1 \quad \text{und} \quad \beta = \kappa'$$

setzen. Aus (18.9) folgt dann

$$\dot{v} = \alpha' - v\beta\kappa = \kappa'\kappa - v\kappa'\kappa$$

Diese Gleichung ist für jedes  $x$  eine gewöhnliche Differentialgleichung in  $t$  mit dem Anfangswert  $v(x, 0) = 1$ . Also ist  $v(x, t) = 1$  ihre eindeutig bestimmte Lösung. Damit sind die Kurven  $\gamma(x, t = \text{const})$  nach der hyperbolischen Bogenlänge parametrisiert.

Mit  $v = 1$  und Gleichung (18.11) folgt

$$\begin{aligned} \dot{\kappa} &= \beta'' + \beta(\kappa^2 - 1) + \alpha\kappa' = \kappa''' + \kappa'\kappa^2 - \kappa' + \frac{1}{2}\kappa^2\kappa' + \kappa' \\ &= \kappa''' + \frac{3}{2}\kappa'\kappa^2. \end{aligned}$$

□

**19.3.** Der vorangehende Satz wird dadurch interessant, daß unter den selben Voraussetzungen auch das Potential  $u$  der Kurvenschar die mKdV-Gleichung löst.

**Satz.** Sei  $\gamma: \mathbb{R} \times [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow H$  eine glatte Kurvenschar und  $\gamma(x, 0)$  nach der hyperbolischen Bogenlänge parametrisiert. Erfüllt  $\gamma$  die Differentialgleichung

$$\dot{\gamma} = \left(\frac{1}{2}\kappa^2 + 1\right)T + \kappa'N, \quad (19.3)$$

dann erfüllt das Potential  $u(x, t)$  der Kurven  $\gamma(x, t = \text{const})$  die mKdV-Gleichung

$$\dot{u} - u''' - 6u^2u' = 0.$$

*Beweis.* Die Differentialgleichung (19.1) ergibt für die Komponenten  $r$  und  $h$ :

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \alpha r' - \beta h' \\ \dot{h} &= \alpha h' + \beta r', \end{aligned}$$

dabei ist wie zuvor  $\alpha = \frac{1}{2}\kappa^2 + 1$  und  $\beta = \kappa'$ .

Sei  $\varphi: \mathbb{R} \times [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}$  der Anstellwinkel des Tangentialvektors der Kurven  $\gamma(x, t = \text{const})$ , dann gilt nach 17.7:

$$-2u = \varphi' + \sin \varphi \quad \implies \quad -2\dot{u} = \dot{\varphi}' + \dot{\varphi} \cos \varphi.$$

Wir berechnen zuerst  $\dot{\varphi}$ . Da die Kurven  $\gamma(c, t = \text{const})$  nach Satz 19.1 für alle Zeiten nach der hyperbolischen Bogenlänge parametrisiert sind, können

wir  $r'^2 + h'^2 = r^2$  und die Ableitung dieser Gleichung  $r'r'' + h'h'' = rr'$  verwenden.

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= \frac{\partial}{\partial t} \arctan\left(\frac{h'}{r'}\right) = \frac{r'\dot{h}' - \dot{r}'h'}{r^2} \\ &= \frac{\alpha'r'h' + \alpha r'h'' + \beta'r'^2 + \beta r'r'' - \alpha'r'h' - \alpha r''h' + \beta'h'^2 + \beta h'h''}{r^2} \\ &= \alpha \frac{r'h'' - r''h'}{r^2} + \beta' + \beta \frac{r'}{r} = \alpha\varphi' + \beta' + \beta \cos \varphi.\end{aligned}$$

Für die Ableitung von  $u$  nach der Zeit ergibt sich mit

$$\begin{aligned}-2\dot{u} &= \alpha'\varphi' + \alpha\varphi'' + \beta'' + \beta' \cos \varphi - \beta\varphi' \sin \varphi \\ &\quad + \alpha\varphi' \cos \varphi + \beta' \cos \varphi + \beta \cos^2 \varphi \quad (19.4) \\ &= \alpha(\varphi'' + \varphi' \cos \varphi) + \alpha'\varphi' + \beta(\cos^2 \varphi - \varphi' \sin \varphi) + 2\beta' \cos \varphi + \beta''\end{aligned}$$

Mit  $\kappa = \varphi' - \sin \varphi$  (s. 17.7) erhalten wir für die Ableitungen von  $\alpha$  und  $\beta$ :

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2}\kappa^2 + 1 = \frac{1}{2}(\varphi' - \sin \varphi)^2 + 1 = \frac{1}{2}\varphi'^2 - \varphi' \sin \varphi + \frac{1}{2}\sin^2 \varphi + 1, \\ \alpha' &= \varphi'\varphi'' - \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^2 \cos \varphi + \varphi' \sin \varphi \cos \varphi, \\ \beta &= \kappa' = \varphi'' - \varphi' \cos \varphi, \\ \beta' &= \varphi''' - \varphi'' \cos \varphi + \varphi'^2 \sin \varphi, \\ \beta'' &= \varphi'''' - \varphi'''' \cos \varphi + 3\varphi'\varphi'' \sin \varphi + \varphi'^3 \cos \varphi.\end{aligned}$$

Setzen wir diese Gleichungen in (19.4) ein, so folgt

$$\begin{aligned}-2\dot{u} &= \frac{1}{2}\varphi'^2\varphi'' - \varphi'\varphi'' \sin \varphi + \frac{1}{2}\varphi'' \sin^2 \varphi + \varphi'' \\ &\quad + \frac{1}{2}\varphi'^3 \cos \varphi - \varphi'^2 \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{2}\varphi' \sin^2 \varphi \cos \varphi + \varphi' \cos \varphi \\ &\quad + \varphi'^2\varphi'' - \varphi'\varphi'' \sin \varphi - \varphi'^3 \cos \varphi + \varphi'^2 \sin \varphi \cos \varphi \\ &\quad + \varphi'' \cos^2 \varphi - \varphi' \cos^3 \varphi - \varphi'\varphi'' \sin \varphi + \varphi'^2 \sin \varphi \cos \varphi \\ &\quad + 2\varphi''' \cos \varphi - 2\varphi'' \cos^2 \varphi + 2\varphi'^2 \sin \varphi \cos \varphi \\ &\quad + \varphi'''' - \varphi'''' \cos \varphi + 3\varphi'\varphi'' \sin \varphi + \varphi'^3 \cos \varphi \\ &= \frac{3}{2}\varphi'^2\varphi'' + \frac{1}{2}\varphi'' \sin^2 \varphi + \varphi'' + \frac{1}{2}\varphi'^3 \cos \varphi + 3\varphi'^2 \sin \varphi \cos \varphi \\ &\quad + \frac{1}{2}\varphi' \sin^2 \varphi \cos \varphi + \varphi' \cos \varphi - \varphi'' \cos^2 \varphi - \varphi' \cos^3 \varphi + \varphi'''' \cos \varphi + \varphi'''' \\ &= \frac{3}{2}\varphi'^2\varphi'' + \frac{3}{2}\varphi'' \sin^2 \varphi + \frac{1}{2}\varphi'^3 \cos \varphi + 3\varphi'^2 \sin \varphi \cos \varphi \\ &\quad + \frac{3}{2}\varphi' \sin^2 \varphi \cos \varphi + \varphi'''' \cos \varphi + \varphi''''\end{aligned}$$

In der letzten Gleichung wurde zweimal  $\cos^2 \varphi$  durch  $1 - \sin^2 \varphi$  ersetzt. Mit  $-2u = \varphi' + \sin \varphi$  erhält man andererseits

$$\begin{aligned}
 -2u''' - 12u^2 u' &= (\varphi' + \sin \varphi)''' + \frac{3}{2}(\varphi' + \sin \varphi)^2(\varphi' + \sin \varphi)' \\
 &= \varphi'''' + \varphi''' \cos \varphi - 3\varphi' \varphi'' \sin \varphi - \varphi'^3 \cos \varphi + \frac{3}{2}\varphi'^2(\varphi'' + \varphi' \cos \varphi) \\
 &\quad + 3\varphi' \sin \varphi(\varphi'' + \varphi' \cos \varphi) + \frac{3}{2}\sin^2 \varphi(\varphi'' + \varphi' \cos \varphi) \\
 &= \varphi'''' + \varphi''' \cos \varphi + \frac{1}{2}\varphi'^3 \cos \varphi + \frac{3}{2}\varphi'^2 \varphi'' \\
 &\quad + 3\varphi'^2 \sin \varphi \cos \varphi + \frac{3}{2}\varphi'' \sin^2 \varphi + \frac{3}{2}\varphi' \sin^2 \varphi \cos \varphi
 \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

## IV. Eine BÄCKLUND–Transformation der mKdV–Gleichung

Im ersten Abschnitt dieses Kapitels werden die 1–Solitonen der mKdV–Gleichung bestimmt. Wir leiten dann unter der Annahme, daß der Übergang von einer Drehfläche zu ihrer dualen Drehfläche Lösungen der mKdV–Gleichung in Lösungen der mKdV–Gleichung überführt, eine BÄCKLUND–Transformation dieser Gleichung her und beweisen, daß dieser Übergang wirklich eine BÄCKLUND–Transformation der mKdV–Gleichung ist.

Wie bei der BÄCKLUND–Transformation der sine–GORDON–Gleichung gilt hier der BIANCHISCHE Vertauschbarkeitsatz, mit dem sich die aufeinanderfolgenden BÄCKLUND–Transformationen einer gegebenen Lösung der mKdV–Gleichung nach dem ersten Schritt ohne weiteres Lösen von Differentialgleichungen berechnen lassen. Diesen Satz wenden wir im letzten Abschnitt auf die triviale Lösung  $u = 0$  der mKdV–Gleichung an und erhalten die von Ryogo HIROTA in [Hirota 74] angegebene Formel für die  $N$ –Solitonen–Lösungen der mKdV–Gleichung.

Die BÄCKLUND–Transformation der mKdV–Gleichung hat die Eigenschaft, daß eine Lösung der mKdV–Gleichung und ihre BÄCKLUND–Transformierte eine Kurve in der POINCARÉschen Halbebene bestimmen, deren Krümmung mit der Ausgangslösung und deren Potential mit der transformierten Lösung der mKdV–Gleichung übereinstimmt. Dieser Satz bedeutet, auf die  $N$ –Solitonen angewandt, daß zu jedem  $N$ –Soliton und jedem aus ihm durch eine BÄCKLUND–Transformation hervorgehenden  $(N + 1)$ –Soliton eine Kurve in der POINCARÉschen Halbebene gehört, deren Krümmung das  $N$ –Soliton und deren Potential das  $(N + 1)$ –Soliton ist. Der Anstellwinkel des Tangentialvektors dieser Kurve ist, wie die  $N$ –Solitonen der mKdV–Gleichung, durch eine explizite Formel gegeben.

### 20. Die 1–Solitonen der mKdV–Gleichung

In diesem Abschnitt sollen solitäre Wellen bzw. wandernde Wellenlösungen der mKdV–Gleichung untersucht werden. Das sind die Lösungen der mKdV–Gleichung, welche aus einer Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$u(x, t) = f(x + ct)$$

hervorgehen. Dabei ist  $c \in \mathbb{R}$  die konstante Wanderungsgeschwindigkeit der Welle.

**20.1.** Setzt man diese Gleichung in die mKdV-Gleichung ein, so läßt sich das Ergebnis folgendermaßen integrieren:

$$\begin{aligned} 0 &= u_t - u_{xxx} - 6u^2u_x \\ \iff 0 &= cf' - f''' - 6f^2f' \\ \iff a &= cf - f'' - 2f^3. \end{aligned}$$

Dabei ist  $a \in \mathbb{R}$  eine Integrationskonstante. Schließen wir lokal konstante Lösungen aus, dann ist  $\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid f'(x) = 0\}$  dicht in  $\mathbb{R}$  und die Multiplikation mit  $f'$  eine Äquivalenzumformung:

$$\begin{aligned} a &= cf - f'' - 2f^3 \\ \iff af' &= cff' - f''f' - 2f^3f' \\ \iff af + b &= \frac{1}{2}cf^2 - \frac{1}{2}f'^2 - \frac{1}{2}f^4 \\ \iff f'^2 &= -f^4 + cf^2 - 2af - 2b. \end{aligned} \quad (*)$$

Diese Gleichung ist eine elliptische Differentialgleichung. Fallen Nullstellen des Polynoms  $F(f) = -f^4 + cf^2 - 2af - 2b$  zusammen, so besitzt (\*) explizite Lösungen. Andernfalls sind die Lösungen Umkehrungen elliptischer Integrale und damit elliptische Funktionen.

**20.2.** Wir setzen nun voraus, daß  $f$  mit all seinen Ableitungen für  $x \rightarrow \pm\infty$  gegen Null konvergiert. Dann gilt  $a = b = 0$  und es folgt, daß (\*) nur für positive Geschwindigkeiten  $c$  reelle Lösungen besitzt. D.h. in diesem Fall ist die Gleichung

$$\begin{aligned} f' &= \sqrt{-f^4 + cf^2} = \pm f\sqrt{c - f^2} \\ \iff \int \frac{df}{f\sqrt{c - f^2}} &= \pm x \end{aligned}$$

für  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  zu lösen. Nach [Bronstein, 1.1.3.3, Nr. 258] erhalten wir

$$f(x) = \pm\sqrt{c} \operatorname{sech}(\sqrt{c}x + d)$$

mit einer beliebigen Integrationskonstante  $d \in \mathbb{R}$ . Damit haben wir alle 1-Soliton-Lösungen

$$s_a(x, t) = \pm a \operatorname{sech}(ax + a^3t + d)$$

der mKdV-Gleichung für beliebige Konstanten  $a, d \in \mathbb{R}$  ermittelt. Für jedes feste  $t \in \mathbb{R}$  ist dies das Potential der als Drehfläche parametrisierten  $S^2$  ohne Nord- und Südpol, wenn die Meridiankurve in  $H_a$  nach der Bogenlänge parametrisiert ist (vgl. 13.4).

## 21. Eine Bäcklund-Transformation für die mKdV-Gleichung

**21.1.** In der Literatur findet sich keine allgemein akzeptierte Definition für den Begriff "BÄCKLUND-Transformation". Mehrere Beispiele und allgemeine Beschreibungen von BÄCKLUND-Transformationen findet man in einem von Robert MIURA zusammengestellten Tagungsbericht [Miura].

Die Untersuchung von Flächentransformationen [Bä 1873] und insbesondere von Flächen mit konstanter negativer Krümmung [Bä 1883] führte

Albert V. BÄCKLUND auf eine Verallgemeinerung der BIANCHISCHEN Transformation<sup>14</sup> solcher Flächen. Diese Transformation soll hier als ein Beispiel kurz vorgestellt werden.<sup>15</sup>

**21.2.** Die Flächen  $(M, g)$  konstanter negativer Krümmung  $K = -\frac{1}{\varrho^2}$  besitzen lokal Asymptotenlinienparametrisierungen  $f: \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow M$  mit  $(u, v) \mapsto f(u, v)$  (s. [Spivak, S. 322]), in denen die quadratische Form  $g^2$  der RIEMANNschen Metrik  $g$  die Gestalt

$$g^2 = \varrho^2(du^2 + 2 \cos 2\omega \, dudv + dv^2)$$

annimmt, wobei  $2\omega$  der Winkel zwischen den Asymptotenlinien ist. Jeder Lösung  $\omega$  der partiellen Differentialgleichung

$$2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial u \partial v} = \sin(2\omega)$$

entspricht eine Fläche mit konstanter Krümmung [Bianchi, §67]. Diese Gleichung wird auch die sine–GORDON–Gleichung genannt. Jede Lösung  $\omega(x, t)$  dieser Gleichung erzeugt durch  $\omega(au, \frac{1}{a}v)$  für eine beliebige Konstante  $a \in \mathbb{R}$  eine 1-parametrische Schar von Lösungen. Diese Lösungstransformation wird von BIANCHI als LIESCHE Transformation der sine–GORDON–Gleichung bezeichnet.

Die von Luigi BIANCHI in seiner Dissertation [B 1879] geometrisch eingeführte und von ihm als Komplementärtransformation bezeichnete Flächen-transformation kann man folgendermaßen beschreiben. Genügt die Funktion  $\omega(u, v)$  der sine–GORDON–Gleichung, dann besitzt das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{cases} (\vartheta - \omega)_u = \sin(\vartheta + \omega), \\ (\vartheta + \omega)_v = \sin(\vartheta - \omega) \end{cases}$$

für jeden Anfangswert  $\omega(x_0, t_0) = \omega_0$  eine eindeutig bestimmte Lösung  $\vartheta$ . Diese Lösung ist dann immer auch eine Lösung der sine–GORDON–Gleichung. Sie heißt die Komplementärtransformierte von  $\omega$ . Wendet man zusätzlich die LIESCHE Transformation  $\Theta(u, v) := \vartheta(au, \frac{1}{a}v)$  und  $\Omega(u, v) := \omega(au, \frac{1}{a}v)$  für  $a \in \mathbb{R}$  an, so erhält man die BÄCKLUND–Transformation der sine–GORDON–Gleichung

$$\begin{cases} (\Theta - \Omega)_u = a \sin(\Theta + \Omega), \\ (\Theta + \Omega)_v = \frac{1}{a} \sin(\Theta - \Omega). \end{cases}$$

**21.3.** Wir zeigen nun, daß der Übergang zur Familie der Dualflächen einer gegebenen Familie von Drehflächen eine BÄCKLUND–Transformation der mKdV–Gleichung für die hyperbolische Krümmung  $\kappa(x, t)$  und  $\kappa^*(x, t)$  ihrer Meridiankuven bzw. für ihre Potential  $u^*(x, t)$  und  $u(x, t)$  darstellt. Nach

<sup>14</sup>Diese Flächentransformation wird von Luigi BIANCHI in seiner Dissertation [B 1879] eingeführt. Es existiert auch eine deutsche Zusammenfassung dieser Arbeit [B 1880].

<sup>15</sup>Dabei folge ich den “Vorlesungen über Differentialgeometrie” von Luigi BIANCHI [Bianchi, Kapitel XVII, besonders §268].

17.7 gelten die Formeln

$$\begin{aligned} -2u^* &= \kappa = \varphi_x - a \sin \varphi, \\ -2u &= \kappa^* = \varphi_x + a \sin \varphi, \end{aligned} \quad (*)$$

wobei die Meridiankurven als Kurven in  $H_a$ ,  $a \in \mathbb{R}_{>0}$  betrachtet werden. Die gesuchte BÄCKLUND-Transformation läßt sich am besten mit den in direktem Zusammenhang zu  $\kappa$  und  $\kappa^*$  stehenden Größen

$$\begin{aligned} \omega(x, t) &:= - \int_0^x u(\xi, t) d\xi - \frac{\varphi(0, t)}{2} - l(t) \quad \implies \quad u = -\omega_x, \\ \omega^*(x, t) &:= - \int_0^x u^*(\xi, t) d\xi - \frac{\varphi(0, t)}{2} + l(t) \quad \implies \quad u^* = -\omega_x^* \end{aligned}$$

formulieren.<sup>16</sup> Dabei ist  $l: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine beliebige Funktion, die durch das folgende Lemma näher bestimmt wird. Addieren wir die beiden Gleichungen in (\*) zusammen, so gilt

$$(\omega + \omega^*)_x = \varphi_x \implies \omega + \omega^* = \varphi.$$

Diese Gleichung, in die Differenz der Gleichungen (\*) eingesetzt, ergibt

$$(\omega - \omega^*)_x = a \sin(\varphi) = a \sin(\omega + \omega^*).$$

Man beachte die Ähnlichkeit dieser Gleichung mit denen der BÄCKLUND-Transformation der sine-GORDON-Gleichung 21.2.

**21.4.** Für die vollständige BÄCKLUND-Transformation ist eine weitere Gleichung für die Ableitung nach der Zeit erforderlich. Diese ergibt sich aus der Bedingung, daß  $u$  und  $u^*$  die mKdV-Gleichung lösen sollen. Bevor wir die vollständige BÄCKLUND-Transformation angeben können, ist es wichtig, den Zusammenhang von  $\omega$  und  $u$ , falls  $u$  eine Lösung der mKdV-Gleichung ist, klarzustellen.

**Lemma.** Sei  $u: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Lösung der mKdV-Gleichung

$$u_t - u_{xxx} - 6u^2 u_x = 0.$$

Dann gibt es eine Funktion  $l: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , so daß

$$\omega(x, t) := - \int_0^x u(\xi, t) d\xi - \frac{\varphi(0, t)}{2} - l(t)$$

eine Lösung der Gleichung

$$\omega_t - \omega_{xxx} - 2\omega_x^3 = 0$$

ist.  $\omega$  ist bis auf die Addition einer Konstante eindeutig bestimmt.  $\omega$  wird wegen der Gleichung  $u = -\omega_x$  ein Potential von  $u$  genannt.

*Beweis.* Sei  $\tilde{\omega}(x, t) := - \int_0^x u(\xi, t) d\xi - \frac{\varphi(0, t)}{2}$ , dann gilt  $u = -\omega_x$ . Setzt man diese Gleichung in die mKdV-Gleichung für  $u$  ein, so folgt

$$\omega_{xt} - \omega_{xxx} - 6\omega_x^2 \omega_{xx} = 0,$$

---

<sup>16</sup>Dieses Vorgehen geht auf den Artikel "Bäcklund transformation for solutions of the Korteweg-de Vries equation" von Hugo WAHLQUIST und, Frank ESTABROOK zurück [WaEs 73].

also ist  $\tilde{\omega}_t - \tilde{\omega}_{xxx} - 2\tilde{\omega}_x^3$  unabhängig von  $x$ . Damit folgt die Behauptung genau dann, wenn man

$$l(t) := \int_0^t \tilde{\omega}_t(x, \tau) - \tilde{\omega}_{xxx}(x, \tau) - 2\tilde{\omega}_x^3(x, \tau) d\tau + l_0$$

setzt, wobei  $l_0 \in \mathbb{R}$  eine frei wählbare Konstante ist.  $\square$

**21.5. Satz** (BÄCKLUND–Transformation der mKdV–Gleichung).  
Sei  $\omega^*: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Abbildung, bezeichne  $x$  die erste und  $t$  die zweite Koordinate von  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  und sei  $a \in \mathbb{R}$  eine beliebige Konstante.

Die Abbildung  $\omega^*$  genügt unter diesen Voraussetzungen genau dann der Gleichung

$$\omega_t^* - \omega_{xxx}^* - 2\omega_x^{*3} = 0, \quad (**)$$

wenn das System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\begin{cases} (\omega - \omega^*)_x = a \sin(\omega + \omega^*) \\ (\omega - \omega^*)_t = 2a \omega_{xx}^* \cos(\omega + \omega^*) \\ \quad + (2a \omega_x^{*2} + a^3) \sin(\omega + \omega^*) + 2a^2 \omega_x^* \end{cases} \quad (\text{B})$$

eine Lösung  $\omega: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt. Die Lösung  $\omega$  ist, ebenso wie  $\omega^*$ , eine Lösung der Gleichung (\*\*).

Mit Lemma 21.4 folgt aus diesem Satz:

**21.6. Korollar.** Das System (B) ist eine BÄCKLUND–Transformation der mKdV–Gleichung.

*Beweis des Satzes.* Leitet man die erste Gleichung von (B) nach  $t$ , die zweite nach  $x$  ab, dann erhält man (wobei im folgenden aus Gründen der Übersichtlichkeit das Argument  $\omega + \omega^*$  von  $\sin$  und  $\cos$  weggelassen wird):

$$\begin{aligned} \omega_{xt} &= \omega_{xt}^* + a(\omega + \omega^*)_t \cos \\ &= \omega_{xt}^* + 2a \omega_t^* \cos + a(\omega - \omega^*)_t \cos \\ &= \omega_{xt}^* + a \left( 2\omega_t^* + 2a \omega_{xx}^* \cos + 2a \omega_x^{*2} \sin + 2a^2 \omega_x^* + a^3 \sin \right) \cos, \\ \omega_{tx} &= \omega_{tx}^* + 2a \omega_{xxx}^* \cos - 4a \omega_{xx}^* \omega_x^* \sin - 2a^2 \omega_{xx}^* \sin^2 + 4a \omega_{xx}^* \omega_x^* \sin \\ &\quad + 4a \omega_x^{*3} \cos + 2a^2 \omega_x^{*2} \sin \cos + 2a^3 \omega_x^* \cos + a^4 \sin \cos + 2a^2 \omega_{xx}^* \\ &= \omega_{tx}^* + a \left( 2\omega_{xxx}^* + 2a \omega_{xx}^* \cos + 4\omega_x^{*3} + 2a \omega_x^{*2} \sin + 2a^2 \omega_x^* + a^3 \sin \right) \cos. \end{aligned}$$

Lösen nun  $\omega$  und  $\omega^*$  das Gleichungssystem (B), dann erfüllt wegen  $\omega_{xt} = \omega_{tx}$  die Abbildung  $\omega^*$  die Gleichung (\*\*). Umgekehrt erkennt man, daß (\*\*) die Kompatibilitätsbedingung des Systems (B) im Sinne von Satz 14.3 darstellt.

Weiterhin erhält man für  $\omega$ :

$$\begin{aligned}\omega_x^3 &= (\omega_x^* + a \sin)^3 \\ &= \omega_x^{*3} + 3a\omega_x^{*2} \sin + 3a^2\omega_x^* \sin^2 + a^3 \sin^3, \\ \omega_{xxx} &= (\omega_x^* + a \sin)_{xx} = \omega_{xxx}^* + a((2\omega_x^* + a \sin) \cos)_x \\ &= \omega_{xxx}^* + 2a\omega_{xx}^* \cos + 2a^2\omega_x^* \cos^2 + a^3 \sin \cos^2 \\ &\quad - 4a\omega_x^{*2} \sin - 4a^2\omega_x^* \sin^2 - a^3 \sin^3, \\ \omega_t &= \omega_t^* + 2a\omega_{xx}^* \cos + 2a\omega_x^{*2} \sin + a^3 \sin + 2a^2\omega_x^*.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\omega_t - \omega_{xxx} - 2\omega_x^3 = 0.$$

□

**21.7.** Die BÄCKLUND–Transformation (B) läßt sich dazu verwenden, aus einer Lösung der mKdV–Gleichung  $u$  ein ganzes Gitter von Lösungen dieser Gleichung zu erzeugen. Für jede Folge  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}$  definiert (B) mit Lemma 21.4 eine Folge von Lösungen  $(u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  der mKdV–Gleichung, wobei in jedem Schritt der Anfangswert von  $u_i$  frei wählbar ist. Die Lösung  $u_{i+1}$  heißt die BÄCKLUND–Transformierte von  $u_i$  unter der BÄCKLUND–Transformation  $B_{a_{i+1}}$ . Diese Konstruktion läßt sich mit dem folgenden Schema veranschaulichen:

$$u \xrightarrow{B_{a_1}} u_1 \xrightarrow{B_{a_2}} u_2 \cdots u_i \xrightarrow{B_{a_i}} u_{i+1} \cdots$$

Dabei bedeutet  $u \xrightarrow{B_a} u^*$ , daß  $\omega$  und  $\omega^*$  mit  $u = -\omega_x$  und  $u^* = -\omega_x^*$  das System (B) lösen.

**21.8. Beispiel.** Sei  $u^* = 0$  die triviale Lösung der mKdV–Gleichung. Nach Lemma 21.4 gehört dazu  $\omega^* = 0$ , die triviale Lösung von (\*\*). Das System (B) nimmt dann die Form

$$\begin{cases} \omega_x = a \sin(\omega) \\ \omega_t = a^3 \sin(\omega) \end{cases}$$

an. Die allgemeine Lösung dieses Differentialgleichungssystems ist

$$\begin{aligned}w &= \pm 2 \arctan(e^\theta) \quad \text{mit} \quad \theta = ax + a^3t + c, \\ \implies u &= w_x^* = \pm a \operatorname{sech}(\theta).\end{aligned}$$

Dies sind die 1–Solitonen der mKdV–Gleichung (vgl. 20.2).

**21.9. Satz.** Sei  $\omega$  eine BÄCKLUND–Transformierte von  $\omega^*$  via  $B_a$ . Dann gibt es zu jeder Zeit  $t \in \mathbb{R}$  eine (bis auf Streckung in Null und Translation entlang der  $\mathbf{i}$ –Achse) eindeutig bestimmte Kurve in  $H_a$ , so daß ihre Krümmung  $\kappa$  in  $H_a$  und ihr Potential durch

$$\kappa = 2\omega_x^* \quad \text{und} \quad u = -\omega_x$$

gegeben sind. Der auf die  $\mathbf{j}$ –Achse bezogene Anstellwinkel des Tangentialvektors dieser Kurve ist

$$\varphi = \omega + \omega^*.$$

*Beweis.* Da  $\omega$  eine BÄCKLUND-Transformierte von  $\omega^*$  via  $B_a$  ist, gilt

$$(\omega - \omega^*)_x = a \sin(\omega + \omega^*) = a \sin(\varphi).$$

Daraus und aus 17.7 folgt

$$\begin{aligned} 2\omega_x &= (\omega - \omega^*)_x + (\omega + \omega^*)_x = a \sin(\varphi) + \varphi_x = -2u, \\ 2\omega_x^* &= -(\omega - \omega^*)_x + (\omega + \omega^*)_x = -a \sin(\varphi) + \varphi_x = \kappa. \end{aligned}$$

Sei umgekehrt eine Kurve in  $H_a$  mit der Krümmung  $\kappa$  und dem Potential  $u$  gegeben und sei  $\varphi$  der auf die  $\mathbf{j}$ -Achse bezogene Anstellwinkel ihres Tangentialvektors, dann gelten nach 17.7 die Gleichungen

$$\kappa = -a_{(N+1)} \sin(\varphi) + \varphi_x \quad \text{und} \quad -2u = a_{(N+1)} \sin(\varphi) + \varphi_x.$$

Der Winkel  $\varphi$  ist durch diese Gleichungen eindeutig bestimmt.

Jede Funktion  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$r' = a_{(N+1)} r \cos \varphi, \quad r > 0 \quad \text{und} \quad h' = a_{(N+1)} r \sin \varphi$$

modulo Verschiebung entlang der  $\mathbf{i}$ -Achse und Streckung in Null eindeutig eine Kurve  $\gamma = r\mathbf{j} + h\mathbf{i}$  in  $H_a$ , so daß ihr Anstellwinkel gleich  $\varphi$  ist.  $\square$

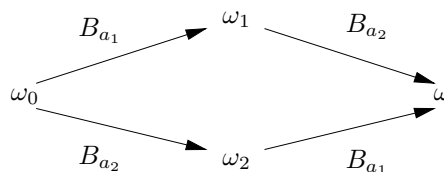
## 22. Der Bianchische Vertauschbarkeitssatz

**22.1.** Wir haben gesehen, daß sich das Differentialgleichungssystem (B) im Falle  $\omega^* = 0$  leicht lösen läßt. Der nächste Schritt  $\omega \xrightarrow{B_{a_2}} ?$  führt bereits auf eine RICATTISCHE Differentialgleichung. Dem Anschein nach wird es immer schwieriger, weitere BÄCKLUND-Transformationen  $B_a$  auf die bereits gefundenen Lösungen anzuwenden. Dies ist jedoch nicht der Fall. Nach dem BIANCHISCHEN Vertauschbarkeitssatz gibt es eine explizite Gleichung, mit der sich alle nach dem ersten Schritt in dem Gitter 21.7 auftretenden BÄCKLUND-Transformationen berechnen lassen.

**Satz** (BIANCHI'S Vertauschbarkeitssatz).  
Seien  $\omega_1$  und  $\omega_2$  BÄCKLUND-Transformierte via  $B_{a_1}$  bzw.  $B_{a_2}$  von  $\omega_0$  mit  $a_1 \neq a_2$ . Dann gibt es eine gemeinsame BÄCKLUND-Transformierte  $\omega$  von  $\omega_1$  via  $B_{a_2}$  und von  $\omega_2$  via  $B_{a_1}$ , die durch folgende Gleichung eindeutig bestimmt ist:

$$\tan\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}\right) = \frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \tan\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right).$$

Dieser Satz läßt sich mit folgendem Schema veranschaulichen:



*Beweis.* Nehmen wir zuerst an, es gibt eine gemeinsame BÄCKLUND-Transformierte  $\omega$  von  $\omega_1$  via  $a_2$  und  $\omega_2$  via  $a_1$ . Dann erfüllen  $\omega_0, \omega_1, \omega_2$  und  $\omega$  die folgenden vier Gleichungen für die Ableitungen nach  $x$ :

$$\begin{aligned} (\omega_1 - \omega_0)_x &= a_1 \sin(\omega_1 + \omega_0), & (\omega_2 - \omega_0)_x &= a_2 \sin(\omega_2 + \omega_0), \\ (\omega - \omega_1)_x &= a_2 \sin(\omega + \omega_1), & (\omega - \omega_2)_x &= a_1 \sin(\omega + \omega_2). \end{aligned}$$

Addieren wir die linken Gleichungen zusammen und ziehen die rechten davon ab, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= (\omega_1 - \omega_0)_x - (\omega_2 - \omega_0)_x + (\omega - \omega_1)_x - (\omega - \omega_2)_x \\ &= a_1 \sin(\omega_1 + \omega_0) - a_2 \sin(\omega_2 + \omega_0) \\ &\quad + a_2 \sin(\omega + \omega_1) - a_1 \sin(\omega + \omega_2) \\ \iff 0 &= a_1 \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2 + \omega_0 - \omega}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2 + \omega_0 + \omega}{2}\right) \\ &\quad + a_2 \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2 - \omega_0 + \omega}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2 + \omega_0 + \omega}{2}\right) \\ \iff 0 &= a_1 \left(\sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}\right) + \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)\right) \\ &\quad + a_2 \left(\sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}\right) - \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)\right) \\ \iff 0 &= (a_1 + a_2) \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}\right) \\ &\quad + (a_1 - a_2) \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right) \\ \iff \tan\left(\frac{\omega - \omega_0}{2}\right) &= \frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \tan\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right). \end{aligned}$$

Gibt es also ein  $\omega$  mit obigen Eigenschaften, dann ist  $\omega$  durch

$$\omega = \omega_0 + 2 \arctan\left(A_{12} \tan\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)\right)$$

mit  $A_{12} = \frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2}$  gegeben.

Wegen der Symmetrie dieser Gleichung in  $\omega_1$  und  $\omega_2$  genügt es zu zeigen, daß  $\omega$  eine BÄCKLUND-Transformierte zu  $\omega_1$  via  $B_{a_2}$  ist, anders gesagt, es bleibt zu zeigen, daß  $\omega$  eine Lösung des Systems

$$\begin{cases} (\omega - \omega_1)_x = a_2 \sin(\omega + \omega_1) \\ (\omega - \omega_1)_t = 2a \omega_{1xx} \cos(\omega + \omega_1) + (2a \omega_1 x^2 + a^3) \sin(\omega + \omega_1) + 2a^2 \omega_{1x} \end{cases} \quad (*)$$

ist.

Für die linke Seite der ersten Gleichung dieses Systems gilt

$$(\omega - \omega_1)_x = (\omega_0 - \omega_1)_x + 2 \frac{A_{12} (1 + \tan^2)}{1 + A_{12}^2 \tan^2} \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)_x,$$

dabei wurde das Argument  $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$  von  $\tan$  aus Gründen der Übersichtlichkeit im folgenden weggelassen. Mit

$$\begin{aligned} \cos(2 \arctan(A_{12} \tan)) &= \frac{1 - A_{12}^2 \tan^2}{1 + A_{12}^2 \tan^2}, \\ \sin(2 \arctan(A_{12} \tan)) &= \frac{2A_{12} \tan}{1 + A_{12}^2 \tan^2} \end{aligned}$$

folgt für die rechte Seite der ersten Gleichung von (\*):

$$\begin{aligned} & a_2 \sin(\omega + \omega_1) \\ &= a_2 \left( \sin(\omega_1 + \omega_0) \frac{1 - A_{12}^2 \tan^2}{1 + A_{12}^2 \tan^2} + \frac{2A_{12} \tan}{1 + A_{12}^2 \tan^2} \cos(\omega_1 + \omega_0) \right). \end{aligned}$$

Setzt man nun die Gleichungen für  $(\omega_0 - \omega_1)_x$  und  $(\omega_0 - \omega_2)_x$  in die erste Gleichung von (\*) ein und multipliziert die ganze Gleichung mit  $(1 + A_{12}^2 \tan^2)$ , so erhält man die folgende, zur ersten Gleichung von (\*) äquivalente Gleichung:

$$\begin{aligned} & -a_1 \sin(\omega_1 + \omega_0) (1 + A_{12}^2 \tan^2) \\ & \quad + A_{12} (1 + \tan^2) (a_1 \sin(\omega_1 + \omega_0) - a_2 \sin(\omega_2 + \omega_0)) \quad (**) \\ &= a_2 \sin(\omega_1 + \omega_0) (1 - A_{12}^2 \tan^2) + 2a_2 \cos(\omega_1 + \omega_0) A_{12} \tan \end{aligned}$$

Aus  $A_{12} - 1 = 2 \frac{a_2}{a_2 - a_1}$  folgt:

$$A_{12}(1 + \tan^2) - (1 + A_{12}^2 \tan^2) = 2 \frac{a_2}{a_1 - a_2} (1 - A_{12} \tan^2).$$

Damit ist (\*\*) äquivalent zu

$$\begin{aligned} & 2 \frac{a_1 a_2}{a_1 - a_2} \sin(\omega_1 + \omega_0) (1 - A_{12} \tan^2) - a_2 A_{12} \sin(\omega_2 + \omega_0) (1 + \tan^2) \\ & \quad = a_2 \sin(\omega_1 + \omega_0) (1 - A_{12}^2 \tan^2) + 2a_2 A_{12} \cos(\omega_1 + \omega_0) \tan \\ \iff & \quad a_2 \sin(\omega_1 + \omega_0) (2a_1 - 2a_1 A_{12} \tan^2) \\ & \quad \quad - a_2 (a_1 + a_2) \sin(\omega_2 + \omega_0) (1 + \tan^2) \\ & \quad = a_2 \sin(\omega_1 + \omega_0) (a_1 - a_2 - (a_1 + a_2) A_{12} \tan^2) \\ & \quad \quad \quad + 2a_2 (a_1 + a_2) \cos(\omega_1 + \omega_0) \tan \\ \iff & \quad a_2 (a_1 + a_2) \sin(\omega_1 + \omega_0) (1 - \tan^2) \\ & \quad \quad - a_2 (a_1 + a_2) \sin(\omega_2 + \omega_0) (1 + \tan^2) \\ & \quad = 2a_2 (a_1 + a_2) \cos(\omega_1 + \omega_0) \tan \\ \iff & \quad 2 \cos(\omega_1 + \omega_0) \tan = \sin(\omega_1 + \omega_0) - \sin(\omega_2 + \omega_0) \\ & \quad \quad - (\sin(\omega_1 + \omega_0) + \sin(\omega_2 + \omega_0)) \tan^2 \\ \iff & \quad \cos(\omega_1 + \omega_0) \tan = \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2 + 2\omega_0}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right) \\ & \quad \quad - \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2 + 2\omega_0}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right) \tan \\ \iff & \quad \cos(\omega_1 + \omega_0) = \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2 + 2\omega_0}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right) \\ & \quad \quad - \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2 + 2\omega_0}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right). \end{aligned}$$

Damit ist die erste Gleichung von (\*) bewiesen. Die zweite läßt sich analog zeigen. Der Beweis ist entsprechend länger, da man die eben vollzogenen Schritte für die Koeffizienten von  $\omega_{0x}$ ,  $\omega_{0xx}$ ,  $\omega_{0x}^2$  und die verbleibenden Terme auszuführen hat. Darauf soll hier jedoch verzichtet werden.  $\square$

### 23. N–Solitonen der mKdV–Gleichung und die zugehörigen Drehflächen

In diesem Abschnitt soll das im Beispiel 21.8 begonnene Gitter von BÄCKLUND–Transformierten der trivialen Lösung  $u = 0$  der mKdV–Gleichung fortgesetzt werden. Es stellt sich heraus, daß der  $N$ -te Gitterpunkt die  $N$ –Solitonen der mKdV–Gleichung beschreibt.

**23.1.** In 21.8 haben wir bereits die 1–Solitonen

$$s_a(x, t) = \pm \frac{\partial}{\partial x} \omega_a(x, t) = \pm \frac{\partial}{\partial x} (2 \arctan(e^\theta)) = \pm a \operatorname{sech}(\theta)$$

mit  $\theta = ax + a^3t + c$  sowie  $a, c \in \mathbb{R}$ ,

der mKdV–Gleichung als die BÄCKLUND–Transformierten der trivialen Lösung  $u = 0$  via  $B_a$  erkannt. Diese bilden den Ausgangspunkt für die Anwendung des BIANCHISCHEN Vertauschbarkeitssatzes 22.1.

Um die Formeln einfacher zu gestalten, verwenden wir neue Notationen. Das Vorzeichen  $\pm$  läßt sich in der frei wählbaren Konstante  $c$  verstecken, indem man  $c \in \mathbb{R} \cup \mathbb{R} + \{\mathbf{i}\pi\}$  beliebig variiert. Für die Potentiale  $\omega$  von Lösungen der mKdV–Gleichung  $u$  führen wir folgende Darstellung ein.

**Definition.** Eine Abbildung  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt ein *Repräsentant* von  $\omega$  bzw.  $u = -\omega_x$ , falls

$$\omega(x, t) = \mathbf{i} \ln \left( \frac{\bar{f}(x, t)}{f(x, t)} \right)$$

gilt.<sup>17</sup>

Die Funktion  $f$  ist durch  $\omega$  nur bis auf einen reellen, von  $x$  und  $t$  abhängigen Faktor bestimmt.

**23.2.** Die 1–Solitonen lassen sich folgendermaßen darstellen:

$$f_1 = 1 + \mathbf{i}e^\theta$$

$$s_1(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} \ln \left( \frac{1 - \mathbf{i}e^\theta}{1 + \mathbf{i}e^\theta} \right) = a \operatorname{sech}(\theta).$$

Schließlich soll der Faktor  $\mathbf{i}$  vor  $e^\theta$  noch in der Variable  $\theta$  untergebracht werden. Im folgenden verwenden wir

$$\theta = ax + a^3t + c + \frac{\mathbf{i}}{2}\pi$$

anstelle obiger Definition von  $\theta$ . Dann ist  $f_1 = 1 + e^\theta$ .

**23.3.** Der Sinn dieser Vorarbeit ist, die Formel aus dem BIANCHISCHEN Vertauschbarkeitssatz

$$\tan \left( \frac{\omega - \omega_0}{2} \right) = \frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2} \tan \left( \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right)$$

---

<sup>17</sup>Diese Darstellung wurde von Ryogo HIROTA in [Hirota 74] verwendet, um mit anderen Mitteln als den hier vorgestellten eine Formel für die  $N$ –Solitonen der mKdV–Gleichung herzuleiten.

einer Hintereinanderausführung etwas zugänglicher zu machen. Seien also  $g_0, g_1, g_2$  und  $g$  Repräsentanten von  $\omega_0, \omega_1, \omega_2$  und  $\omega$ . Dann ist die obige Gleichung mit  $\tan(x) = -\mathbf{i} \tanh(\mathbf{i}x)$  äquivalent zu:

$$\begin{aligned} \tanh\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\bar{g}}{g}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\bar{g}_0}{g_0}\right)\right) &= \tanh\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\bar{g}_1}{g_1}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\bar{g}_2}{g_2}\right)\right) \\ \iff \frac{1 - \frac{\bar{g}\bar{g}_0}{g g_0}}{1 + \frac{\bar{g}\bar{g}_0}{g g_0}} &= \frac{1 - \frac{\bar{g}_1\bar{g}_2}{g_1 g_2}}{1 + \frac{\bar{g}_1\bar{g}_2}{g_1 g_2}} \\ \iff \frac{\bar{g}}{g} &= \frac{\bar{g}_0 g_1 \bar{g}_2 + \bar{g}_1 g_2 - A_{12}(g_1 \bar{g}_2 - \bar{g}_1 g_2)}{g_0 g_1 \bar{g}_2 + \bar{g}_1 g_2 + A_{12}(g_1 \bar{g}_2 - \bar{g}_1 g_2)}. \end{aligned}$$

Damit ist

$$g = g_0(g_1 \bar{g}_2 + \bar{g}_1 g_2 + A_{12}(g_1 \bar{g}_2 - \bar{g}_1 g_2))$$

ein Repräsentant der gemeinsamen BÄCKLUND-Transformierten der durch  $g_1$  und  $g_2$  repräsentierten Lösung der mKdV-Gleichung. Mit dieser Formel können wir nun den folgenden Satz beweisen.

**23.4. Satz.** *Die sukzessive durch 21.5 bestimmten BÄCKLUND-Transformierten der trivialen Lösung  $u = 0$  der mKdV-Gleichung werden durch*

$$f_N = \sum_{\mu \in \{0,1\}^N} \prod_{i=1}^N e^{\mu_i \theta_i} \prod_{j=i+1}^N A_{ij}^{|\mu_i - \mu_j|} \quad (*)$$

repräsentiert, dabei ist

$$\theta_i = a_i x + a_i^3 t + c_i + \frac{\mathbf{i}}{2}\pi, \quad a_i \in \mathbb{R} \quad \text{paarweise verschieden}$$

$$\text{sowie } c_i \in \mathbb{R} \cup \mathbb{R} + \{\mathbf{i}\pi\}, \quad A_{ij} = \frac{a_i + a_j}{a_i - a_j}$$

$$\text{für } i \neq j \quad \text{und } i, j = 1, \dots, N.$$

Die Laufvariable  $\mu$  der Summation (\*) kann man sich als natürliche Zahl in Binärschreibweise mit  $N$  Stellen vorstellen. Dann ist  $\mu_i$  ihre  $i$ -te Stelle bzw. ihr  $i$ -tes Bit und  $|\mu_i - \mu_j|$  steht für das exklusive Oder zwischen dem  $i$ -ten und  $j$ -ten Bit. Diese Formel stimmt mit der von Ryogo HIROTA in [Hirota 74] angegebenen Formel für die  $N$ -Solitonen der mKdV-Gleichung überein.

**23.5.** Wir beweisen den folgenden, etwas genaueren Satz.

**Satz.** *Sei  $N \in \mathbb{N}$ ,  $N \geq 2$ . Seien*

$$a_i \in \mathbb{R}, \quad c_i \in \mathbb{R} \cup \mathbb{R} + \{\mathbf{i}\pi\}, \quad \text{für } i, j = 1, \dots, N$$

beliebig, aber fest gewählt und sei

$$\theta_i = a_i x + a_i^3 t + c_i + \frac{\mathbf{i}}{2}\pi, \quad \text{für } i, j = 1, \dots, (N-1),$$

$$\theta_N = a_N x + a_N^3 t + c_N - \frac{\mathbf{i}}{2}\pi,$$

$$A_{ij} = \frac{a_i + a_j}{a_i - a_j} \quad \text{für } i \neq j.$$

Seien weiterhin  $g_0 = f_{(N-2)}$ ,  $g_1 = f_{(N-1)}$  und  $g_2 = f_{(N-1)}$  durch die Formel (\*) gegeben, wobei in der Formel für  $g_2$  die Variable  $\theta_{(N-1)}$  durch  $\theta_N$  ersetzt wurde.

Dann sind  $g_1$  und  $g_2$  Repräsentanten der BÄCKLUND-Transformierten via  $B_{a_{(N-1)}}$  bzw.  $B_{a_N}$  der durch  $g_0$  repräsentierten Lösung der mKdV-Gleichung. Die Abbildung  $g = f_N$  repräsentiert die nach dem BIANCHISCHEN Vertauschbarkeitssatz 22.1 zu  $g_1$  und  $g_2$  via  $B_{a_N}$  bzw.  $B_{a_{(N-1)}}$  gehörende gemeinsame BÄCKLUND-Transformierte, dabei wird in der Formel für  $g$  wieder die übliche Form der Variable

$$\theta_N = a_N x + a_N^3 t + c_N + \frac{\mathbf{i}}{2}\pi$$

verwendet.

**23.6. Korollar.** Sei  $N \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \kappa(x, t) &= 2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \mathbf{i} \ln \left( \frac{\bar{f}_N(x, t)}{f_N(x, t)} \right) \right) \quad \text{ein } N\text{-Soliton und} \\ u(x, t) &= -\frac{\partial}{\partial x} \left( \mathbf{i} \ln \left( \frac{\bar{f}_{(N+1)}(x, t)}{f_{(N+1)}(x, t)} \right) \right) \quad \text{ein } (N+1)\text{-Soliton} \end{aligned}$$

mit den selben Konstanten  $a_i$  und  $c_i$ . Dann ist

$$\varphi(x, t) = \mathbf{i} \ln \left( \frac{\bar{f}_N(x, t) f_{(N+1)}(x, t)}{f_N(x, t) \bar{f}_{(N+1)}(x, t)} \right)$$

zu jeder Zeit  $t \in \mathbb{R}$  der auf die  $\mathbf{j}$ -Achse bezogene Anstellwinkel des Tangentialvektors einer Kurve, deren Krümmung in  $H_{a_{(N+1)}}$  gleich  $\kappa$  und deren Potential gleich  $u$  ist. Die Kurve ist durch  $\kappa$  und  $u$  (bis auf Streckung in Null und Translation entlang der  $\mathbf{i}$ -Achse) eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Das Korollar folgt mit Satz 21.9 direkt aus Satz 23.5.  $\square$

**23.7. Korollar.** Seien  $\kappa$  und  $u$  wie in Korollar 23.6 gegeben. Dann entspricht die Variation der Konstanten  $c_{(N+1)} \in \mathbb{R} \cup \mathbb{R} + \{\mathbf{i}\pi\}$  einer MÖBIUS-Transformation<sup>18</sup> der zu  $\kappa$  und  $u$  zu jedem Zeitpunkt  $t \in \mathbb{R}$  gehörenden Kurve.

*Beweis.* Da  $\kappa$  bei dieser Variation der Konstanten fest bleibt, folgt die Aussage aus der Tatsache, daß eine Kurve im hyperbolischen Raum  $H_{a_{(N+1)}}$  durch ihre Krümmung bis auf eine MÖBIUS-Transformation eindeutig bestimmt ist.  $\square$

*Beweis des Satzes.* Wir beweisen diesen Satz durch vollständige Induktion. Der Induktionsanfang ist mit der Bestimmung der 1-Solitonen als BÄCKLUND-Transformierte der trivialen Lösung  $u = 0$  der mKdV-Gleichung, die durch  $f_0 = 1$  repräsentiert wird, erledigt worden (vgl. 21.8 und 23.2).

Es bleibt also zu zeigen, daß  $g = f_N$  bis auf einen reellen Faktor der Gleichung

$$g = g_0(g_1 \bar{g}_2 + \bar{g}_1 g_2 + A_{(N-1)N}(g_1 \bar{g}_2 - \bar{g}_1 g_2))$$

<sup>18</sup>Eine Abbildung des hyperbolischen Raumes in sich heißt MÖBIUS-Transformation, falls sie eine Komposition der in Satz 16.6 angegebenen Isometrien von  $H_a$ ,  $a \in \mathbb{R}$  ist.

genügt (s. 23.3). Die Formel für  $g_0$  ist

$$g_0 = \sum_{\mu \in \{0,1\}^{N-2}} \prod_{i=1}^{N-2} e^{\mu_i \theta_i} \prod_{j=i+1}^{N-2} A_{ij}^{|\mu_i - \mu_j|}.$$

In den Formeln für  $g_1$  und  $g_2$  spalten wir die Summanden ab, die  $e^{\theta_{N-1}}$  bzw.  $e^{\theta_N}$  enthalten:

$$\begin{aligned} g_1 &= \sum_{\mu \in \{0,1\}^{N-2}} \prod_{i=1}^{N-2} A_{i(N-1)}^{\mu_i} e^{\mu_i \theta_i} \prod_{j=i+1}^{N-2} A_{ij}^{|\mu_i - \mu_j|} \\ &\quad + \left( \sum_{\mu \in \{0,1\}^{N-2}} \prod_{i=1}^{N-2} A_{i(N-1)}^{1-\mu_i} e^{\mu_i \theta_i} \prod_{j=i+1}^{N-2} A_{ij}^{|\mu_i - \mu_j|} \right) e^{\theta_{N-1}} \\ g_2 &= \sum_{\mu \in \{0,1\}^{N-2}} \prod_{i=1}^{N-2} A_{iN}^{\mu_i} e^{\mu_i \theta_i} \prod_{j=i+1}^{N-2} A_{ij}^{|\mu_i - \mu_j|} \\ &\quad + \left( \sum_{\mu \in \{0,1\}^{N-2}} \prod_{i=1}^{N-2} A_{iN}^{1-\mu_i} e^{\mu_i \theta_i} \prod_{j=i+1}^{N-2} A_{ij}^{|\mu_i - \mu_j|} \right) e^{\theta_N} \end{aligned}$$

Damit können wir das Produkt von  $g_1$  und  $\bar{g}_2$  berechnen, wobei jetzt die Summe in vier Summandengruppen aufgeteilt wird.

$$\begin{aligned} g_1 \bar{g}_2 &= \sum_{\mu, \nu} \prod_{i=1}^{N-2} (-1)^{\nu_i} A_{i(N-1)}^{\mu_i} A_{iN}^{\nu_i} e^{(\mu_i + \nu_i) \theta_i} \prod_{j=i+1}^{N-2} A_{ij}^{|\mu_i - \mu_j| + |\nu_i - \nu_j|} \\ &\quad - \left( \sum_{\mu, \nu} \prod_{i=1}^{N-2} (-1)^{\nu_i} A_{i(N-1)}^{1-\mu_i} A_{iN}^{1-\nu_i} e^{(\mu_i + \nu_i) \theta_i} \prod_{j=i+1}^{N-2} A_{ij}^{|\mu_i - \mu_j| + |\nu_i - \nu_j|} \right) e^{\theta_{N-1} + \theta_N} \\ &\quad - \left( \sum_{\mu, \nu} \prod_{i=1}^{N-2} (-1)^{\nu_i} A_{i(N-1)}^{\mu_i} A_{iN}^{1-\nu_i} e^{(\mu_i + \nu_i) \theta_i} \prod_{j=i+1}^{N-2} A_{ij}^{|\mu_i - \mu_j| + |\nu_i - \nu_j|} \right) e^{\theta_N} \\ &\quad + \left( \sum_{\mu, \nu} \prod_{i=1}^{N-2} (-1)^{\nu_i} A_{i(N-1)}^{1-\mu_i} A_{iN}^{\nu_i} e^{(\mu_i + \nu_i) \theta_i} \prod_{j=i+1}^{N-2} A_{ij}^{|\mu_i - \mu_j| + |\nu_i - \nu_j|} \right) e^{\theta_{N-1}} \end{aligned}$$

Die Summen gehen hier über alle  $\mu, \nu \in \{0,1\}^{N-2}$ .

Jetzt berechnen wir  $g_0(g_1 \bar{g}_2 + \bar{g}_1 g_2 + A_{(N-1)N}(g_1 \bar{g}_2 - \bar{g}_1 g_2))$ . Der Realteil von  $g_1 \bar{g}_2$  wird dabei mit  $g_0$ , der Imaginärteil mit  $A_{(N-1)N} g_0$  multipliziert. Aus der Formel für  $\theta_i$  folgt, daß ein Summand in  $g_1 \bar{g}_2$  reell ist, wenn er eine gerade Anzahl von Faktoren  $e^{\theta_i}$  enthält, d.h. wenn

$$\sum_{i=1}^{N-2} \mu_i + \nu_i$$

gerade ist. Andernfalls ist der Summand imaginär. Wir definieren die folgende Hilfsfunktion

$$h(\mu, \nu) := \left( \sum_{i=1}^{N-2} \mu_i + \nu_i \right) \pmod{2},$$

welche gerade dann Null ist, wenn der entsprechende Summand reell, und Eins, falls er imaginär ist. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
& g_0(g_1\bar{g}_2 + \bar{g}_1g_2 - A_{(N-1)N}(g_1\bar{g}_2 - \bar{g}_1g_2)) \\
&= \sum_{\mu, \nu, \tau \in \{0,1\}^{N-2}} A_{(N-1)N}^{h(\mu, \nu)} \prod_{i=1}^{N-2} (-1)^{\nu_i} A_{i(N-1)}^{\mu_i} A_{iN}^{\nu_i} e^{(\mu_i + \nu_i + \tau_i)\theta_i} \\
&\quad \prod_{j=i+1}^{N-2} A_{ij}^{|\mu_i - \mu_j| + |\nu_i - \nu_j| + |\tau_i - \tau_j|} \\
&+ \left( \sum_{\mu, \nu, \tau \in \{0,1\}^{N-2}} A_{(N-1)N}^{h(\mu, \nu)} \prod_{i=1}^{N-2} (-1)^{\nu_i} A_{i(N-1)}^{1-\mu_i} A_{iN}^{1-\nu_i} e^{(\mu_i + \nu_i + \tau_i)\theta_i} \right. \\
&\quad \left. \prod_{j=i+1}^{N-2} A_{ij}^{|\mu_i - \mu_j| + |\nu_i - \nu_j| + |\tau_i - \tau_j|} \right) e^{\theta_{N-1} + \theta_N} \\
&+ \left( \sum_{\mu, \nu, \tau \in \{0,1\}^{N-2}} A_{(N-1)N}^{1-h(\mu, \nu)} \prod_{i=1}^{N-2} (-1)^{\nu_i} A_{i(N-1)}^{\mu_i} A_{iN}^{1-\nu_i} e^{(\mu_i + \nu_i + \tau_i)\theta_i} \right. \\
&\quad \left. \prod_{j=i+1}^{N-2} A_{ij}^{|\mu_i - \mu_j| + |\nu_i - \nu_j| + |\tau_i - \tau_j|} \right) e^{\theta_N} \\
&+ \left( \sum_{\mu, \nu, \tau \in \{0,1\}^{N-2}} A_{(N-1)N}^{1-h(\mu, \nu)} \prod_{i=1}^{N-2} (-1)^{\nu_i} A_{i(N-1)}^{1-\mu_i} A_{iN}^{\nu_i} e^{(\mu_i + \nu_i + \tau_i)\theta_i} \right. \\
&\quad \left. \prod_{j=i+1}^{N-2} A_{ij}^{|\mu_i - \mu_j| + |\nu_i - \nu_j| + |\tau_i - \tau_j|} \right) e^{\theta_{N-1}}
\end{aligned}$$

Die Formel für  $g$  nimmt mit der Variable  $\theta_N = a_N x + a_N^3 t + c_N - \frac{1}{2}\pi$  die Form

$$\begin{aligned}
g &= \sum_{\mu \in \{0,1\}^{N-2}} \prod_{i=1}^{N-2} A_{i(N-1)}^{\mu_i} A_{iN}^{\mu_i} e^{\mu_i \theta_i} \prod_{j=i+1}^{N-2} A_{ij}^{|\mu_i - \mu_j|} \\
&- \left( \sum_{\mu \in \{0,1\}^{N-2}} \prod_{i=1}^{N-2} A_{i(N-1)}^{1-\mu_i} A_{iN}^{1-\mu_i} e^{\mu_i \theta_i} \prod_{j=i+1}^{N-2} A_{ij}^{|\mu_i - \mu_j|} \right) e^{\theta_{N-1} + \theta_N} \\
&- \left( \sum_{\mu, \nu \in \{0,1\}^{N-2}} \prod_{i=1}^{N-2} A_{i(N-1)}^{\mu_i} A_{iN}^{1-\mu_i} e^{\mu_i \theta_i} \prod_{j=i+1}^{N-2} A_{ij}^{|\mu_i - \mu_j|} \right) A_{(N-1)N} e^{\theta_N} \\
&+ \left( \sum_{\mu, \nu \in \{0,1\}^{N-2}} \prod_{i=1}^{N-2} A_{i(N-1)}^{1-\mu_i} A_{iN}^{\mu_i} e^{\mu_i \theta_i} \prod_{j=i+1}^{N-2} A_{ij}^{|\mu_i - \mu_j|} \right) A_{(N-1)N} e^{\theta_{N-1}}
\end{aligned}$$

an. Die beiden Minuszeichen entsprechen genau der Tatsache, daß wir hier  $g$  mit der Variable  $\theta_N$  von  $g_2$  geschrieben haben.

Multipliziert man diese Formel mit dem reellen Faktor  $|g_0|^2$  so erhält man

$$\begin{aligned}
g_0 \bar{g}_0 g &= \sum_{\mu, \nu, \tau \in \{0,1\}^{N-2}} \prod_{i=1}^{N-2} (-1)^{\nu_i} A_{i(N-1)}^{\mu_i} A_{iN}^{\mu_i} e^{(\mu_i + \nu_i + \tau_i) \theta_i} \\
&\quad \prod_{j=i+1}^{N-2} A_{ij}^{|\mu_i - \mu_j| + |\nu_i - \nu_j| + |\tau_i - \tau_j|} \\
&- \left( \sum_{\mu \in \{0,1\}^{N-2}} \prod_{i=1}^{N-2} (-1)^{\nu_i} A_{i(N-1)}^{1-\mu_i} A_{iN}^{1-\mu_i} e^{(\mu_i + \nu_i + \tau_i) \theta_i} \right. \\
&\quad \left. \prod_{j=i+1}^{N-2} A_{ij}^{|\mu_i - \mu_j| + |\nu_i - \nu_j| + |\tau_i - \tau_j|} \right) e^{\theta_{N-1} + \theta_N} \\
&- \left( \sum_{\mu, \nu \in \{0,1\}^{N-2}} \prod_{i=1}^{N-2} (-1)^{\nu_i} A_{i(N-1)}^{\mu_i} A_{iN}^{1-\mu_i} e^{(\mu_i + \nu_i + \tau_i) \theta_i} \right. \\
&\quad \left. \prod_{j=i+1}^{N-2} A_{ij}^{|\mu_i - \mu_j| + |\nu_i - \nu_j| + |\tau_i - \tau_j|} \right) e^{\theta_N} \\
&+ \left( \sum_{\mu, \nu \in \{0,1\}^{N-2}} \prod_{i=1}^{N-2} (-1)^{\nu_i} A_{i(N-1)}^{1-\mu_i} A_{iN}^{\mu_i} e^{(\mu_i + \nu_i + \tau_i) \theta_i} \right. \\
&\quad \left. \prod_{j=i+1}^{N-2} A_{ij}^{|\mu_i - \mu_j| + |\nu_i - \nu_j| + |\tau_i - \tau_j|} \right) e^{\theta_{N-1}}.
\end{aligned}$$

Vergleicht man nun die Koeffizienten der Summanden, in denen gleiche Produkte von  $e^{\theta_i}$  auftreten in den Summen  $g_0(g_1 \bar{g}_2 + \bar{g}_1 g_2 + A_{(N-1)N}(g_1 \bar{g}_2 - \bar{g}_1 g_2))$  und  $|g_0|^2 g$ , sortiert nach  $h(\mu, \nu) = 0$  und  $h(\mu, \nu) = 1$  unter Verwendung der Identität

$$1 - A_{lm} A_{ln} = A_{mn} (A_{lm} - A_{ln})$$

für beliebige, paarweise verschieden  $m, n, l \in \mathbb{N}$ , so folgt

$$|g_0|^2 g = g_0(g_1 \bar{g}_2 + \bar{g}_1 g_2 - A_{(N-1)N}(g_1 \bar{g}_2 - \bar{g}_1 g_2)).$$

Damit ist der Satz bewiesen.  $\square$



## Literatur

- [AbloSe] Mark J. ABLOWITZ, Harvey SEGUR, *Solitons and the inverse scattering transform*, Society for industrial and applied mathematics (SIAM), Philadelphia, 1981.
- [Arnol'd] Vladimir I. ARNOL'D, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Hochschulbücher für Mathematik, 2. Auflage, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1991 (Übersetzung von: obyknovnyye differencial'nye uravnenia, Nauka, Moskwa, 1984).
- [Bä 1873] Albert Victor BÄCKLUND, Einiges über Curven und Flächen-Transformationen, *Lunds universitets års-skrift*, II Afdelningen för Matematik och Naturvetenskap **10** (1873).
- [Bä 1883] Albert Victor BÄCKLUND, Om ytor med konstant negativ krökning, *Lunds universitets års-skrift*, IV Afdelningen för Matematik och Naturvetenskap **19** (1883).
- [B 1879] Luigi BIANCHI, Ricerche sulle superficie a curvatura costante e sulle elicoidi, Tesi del Dott., *Annali della r. scuola normale superiore di Pisa, della serie Vol. IV., scienze fisiche e matematiche* **2** (1879), 285–340.
- [B 1880] Luigi BIANCHI, Ueber die Flächen mit constanter negativer Krümmung, *Mathematische Annalen* **16** (1880), 577–582.
- [Bianchi] Luigi BIANCHI, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, 2. Auflage, B.G. Teubner, Leipzig, Berlin, 1910, (Übersetzung von: *Lezioni di geometria differenziale*, Pisa, 1902).
- [Bredon] Glen E. BREDON, *Topology and geometry*, Graduate texts in mathematics **139**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1993.
- [Bronstein] Ilja N. BRONSTEIN, Konstantin A. SEMENDJAJEW, *Taschenbuch der Mathematik*, 25. Auflage, B.G. Teubner, Stuttgart, Leipzig, 1991.
- [DKN 85] B.A. DUBROVIN, I.M. KRICHEVER, S.P. NOVIKOV, Integrable Systems I, in *Dynamical systems*, **IV**, V.I. Arnol'd, S.P. Novikov eds., Encyclopaedia of mathematical sciences **4**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1990, 173–280, (Übersetzung von: *Itoqi nauki i tekhniki, Sovremennye problemy matematiki, Fundamental'nye napravleniya* **4**, Dinamicheskie sistemy 4, VINITI, Moscow, 1985).
- [DEGM] Roger DODD, Chris EILBECK, John GIBBON, Hedley MORRIS, *Solitons and nonlinear wave equations*, Academic Press, London, New York, 1982.
- [DraJo] P.G. DRAZIN, R.S. JOHNSON, *Solitons: an introduction*, Cambridge texts in applied mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, New York, 1989.
- [Friedrich] Thomas FRIEDRICH, *Dirac-Operatoren in der Riemannschen Geometrie*, Advanced Lectures in Mathematics, Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1997.
- [FaTa] Ludwig D. FADDEEV, Leon A. TAKHTAJAN, *Hamiltonian methods in the theory of solitons*, Springer series in Soviet mathematics, Springer-Verlag,

- Berlin, Heidelberg, New York, 1987, (Übersetzung von: Gamiltonov podkhod v teorii solitonov, Publisher Nauka, Moscow, 1986).
- [GGKM 67] Clifford S. GARDNER, John M. GREENE, Martin D. KRUSKAL, Robert M. MIURA, Method for solving the Korteweg–de Vries equation, (s.a. [Miura 68], [MGK 68], [GGKM 74]), *Physical review letters* **19** (1967), 1095–1097.
- [GGKM 74] Clifford S. GARDNER, John M. GREENE, Martin D. KRUSKAL, Robert M. MIURA, Korteweg–de Vries equation and generalisations. VI. Methods for exact solution, (s.a. [GGKM 67], [Miura 68], [MGK 68]), *Communications on pure and applied mathematics* **27** (1974), 97–133.
- [Hirota 74] Ryogo HIROTA, Direct method of finding exact solutions of nonlinear evolution equations, in *Bäcklund Transformations*, Robert M. MIURA ed., Lecture notes in mathematics **515**, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1974, 40–68.
- [Jänich] Klaus JÄNICH, *Topologie*, Springer–Lehrbuch, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980, (5. Auflage, 1996).
- [KPP 98] George KAMBEROV, Franz PEDIT, Ulrich PINKALL, Bonnet pairs and isothermic surfaces, *Duke mathematical journal* **92** (1998), 637–644.
- [Kon 96] Boris G. KONOPELCHENKO, Induced surfaces and their integrable dynamics, *Studies in applied mathematics* 1996, 9–51.
- [KdV 1895] D.J. KORTEWEG, G. DE VRIES, On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, *The London, Edinburgh, and Dublin philosophical magazine, and journal of science*, 5. Ser. **39** (1895), 422–443.
- [Lamb] George L. LAMB, Jr., *Elements of soliton theory*, Pure and applied mathematics, John Wiley & Sons, New York, 1980.
- [LawMi] H. Blaine LAWSON, Marie–Louise MICHELSON, *Spin geometry*, Princeton University Press, New Jersey, 1989.
- [Lax 68] Peter D. LAX, Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, *Communications on pure and applied mathematics* **21** (1968), 467–590.
- [Miura 68] Robert M. MIURA, Korteweg–de Vries equation and generalizations. I. A remarkable explicit nonlinear transformation, (s.a. [GGKM 67], [MGK 68], [GGKM 74]), *Journal of mathematical physics* **9** (1968), 1202–1204.
- [MGK 68] Robert M. MIURA, Clifford S. GARDNER, Martin D. KRUSKAL, Korteweg–de Vries equation and generalizations. II. Existence of Conservation Laws and Constants of Motion, (s.a. [GGKM 67], [Miura 68], [GGKM 74]), *Journal of mathematical physics* **9** (1968), 1202–1204.
- [Miura] Robert M. MIURA ed., *Bäcklund Transformations*, Lecture notes in mathematics **515**, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1974.
- [Pinkall 96] Ulrich PINKALL, *Quaternionen in der Differentialgeometrie*, Vorlesung gehalten im SS 1996 an der TU Berlin.
- [PePi 98] Franz PEDIT, Ulrich PINKALL, Quaternionic analysis on riemann surfaces and differential geometry, in *Proceedings of the international congress of mathematicians, Berlin 1998*, **II**, Documenta Mathematica, Journal der Deutschen Mathematiker–Vereinigung, Extra Volume ICM 1998, 389–400.
- [Ru 1844] J. Scott RUSSELL, Report on waves, *British association for the advancement of science: Report of the fourteenth meeting* **14** (1844), 311–390.
- [Spivak] Michael SPIVAK, *A comprehensive introduction to differential geometry*, **I–V**, Publish or Perish, Houston (Texas), 1970 (new printing, 1979).

- [Tai 97a] Iskander A. TAIMANOV, Modified Novikov–Veselov equation and differential geometry of surfaces, *Translations of the american mathematical society*, 2. Ser. **179** (1997), 133–151.
- [Tai 97b] Iskander A. TAIMANOV, Surfaces of revolution in terms of solitons, *Annals of global analysis and geometry* **15** (1997), 419–435.
- [Tai 98] Iskander A. TAIMANOV, *The Weierstrass representation of spheres in  $\mathbb{R}^3$ , the Willmore numbers, and soliton spheres*, Preprint No. 302, SFB 288, TU Berlin, 1998.
- [WaEs 73] Hugo D. WAHLQUIST, Frank B. ESTABROOK, Bäcklund transformation for solutions of the Korteweg–de Vries equation, *Physical review letters* **31** (1973), 1386–1390.
- [War] Frank W. WARNER, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Graduate texts in mathematics **94**, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1983, (Original bei: Scott, Foresman and Co., Glenview, Illinois, 1971).
- [Willmore] Thomas J. WILLMORE, *Riemannian geometry*, Oxford University Press, Oxford, New York, 1993.
- [ZaKru 65] Norman J. ZABUSKY, Martin D. KRUSKAL, Interaction of “Solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, *Physical review letters* **15** (1965), 240–243.
- [Za 67] Norman J. ZABUSKY, A synergetic approach to problems of nonlinear dispersive wave propagation and interaction, in *Nonlinear partial differential equations*, W.F. Ames ed., Academic Press, New York, 1967, 223–258.
- [Zahlen] Heinz–Dieter EBBINGHAUS, Hans HERMES, Friedrich HIRZEBRUCH, Max KOECHER, Klaus LAMOTKE, Klaus MAINZER, Jürgen NEUKIRCH, Alexander PRESTEL, Reinhold REMMERT, *Zahlen*, Springer–Lehrbuch, Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1983, (3. Auflage, 1992).