§12 Kurze Kreisbasen in der Menge aller Kreisbasen

12.1 Einleitung

ist polynomial lösbar (werden 2 Lösungswege kennen lernen)

zunächst einige Vorbereitungen

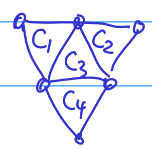
Zielfunktion $\sum_{C \in \mathcal{B}} \sum_{a \in C} \underbrace{(u_a - l_a)}_{w_a \geq 0}$ hängt nicht von der Orientierung der Kanten ab

$\Rightarrow$ kann den zugrunde liegenden ungerichteten Graphen betrachten

Bzgl. ungerichteter Graphen betrachtet man in der Regel den Kreisraum über GF(2). Folgendes Lemma zeigt, dass dies auch bzgl. kurzer Basen möglich ist.

Vorteil: GF(2) ermöglicht einfaches Rechnen: $1+1=0$, $-1=1$

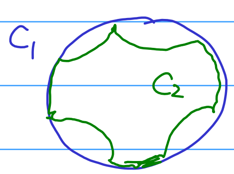
Linearkombinationen von Kreisen sind

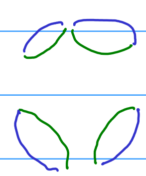


$C_5 + C_3 \mathrel{\hat{=}} G$ kantendisj. Vereinigung von Kreisen

C_5 = äußerer Kreis

$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = C_5$



$C_1 + C_2 =$ 

alle Vektoren im Kreisraum haben diese Gestalt

12.1 Lemma: Sei G ein Digraph und G' der zugehörige ungerichtete Graph. Sei $\mathcal{B}$ eine Menge von ν Kreisen aus dem Zyklraum von G über $\mathbb{R}^E$ und sei $\mathcal{B}'$ die Menge der zugehörigen ungerichteten Kreise aus G'.
Dann gilt

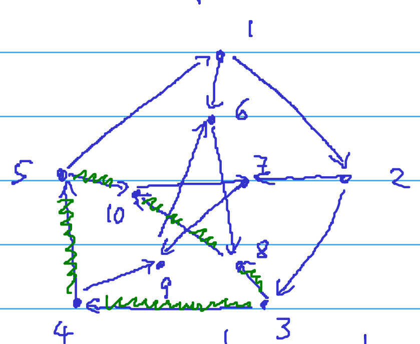
$$\det \mathcal{B} \text{ ist ungerade} \iff \mathcal{B}' \text{ ist Kreisbasis von } G' \text{ über } GF(2)$$

Beweis: Betrachte Laplace Entwicklung von $\det \mathcal{B}$ und $\det \mathcal{B}'$.
Dann gilt wegen Rechnung in $GF(2)$

$$\det \mathcal{B} = 2k \quad k \in \mathbb{Z} \iff \det \mathcal{B}' = 0 \qquad \square$$

Beispiel: Es gibt Basen von G über $\mathbb{R}$, die keine Basen von G' über $GF(2)$ sind

Petersen Graph



nehme jeden dieser Kreise + inneren Stern
diese bilden eine Basis

(1,2)	(2,3)	(3,4)	(4,5)	(5,1)	(6,8)	(8,10)	(10,7)	(7,9)	(9,6)	(1,6)	(2,7)	(3,8)	(4,9)	(5,10)
1	1				−1					−1		1		
	1	1						−1			−1		1	
		1	1			−1						−1		1
			1	1					−1	1			−1	
1				1			−1				1			−1
					1	1	1	1	1					

$= T^T$

Summe der Kreise $\neq 0$ über $\mathbb{R}$, aber $= 0$ über $GF(2)$

12.2 Folgerung: jede ganzzahlige Basis in G ist eine (ganzzahlige) Basis in G' über $GF(2)$

d.h. es reicht, im ungerichteten Graphen eine kurze Basis zu berechnen und dann zu prüfen, ob sie im gerichteten Sinne über $\mathbb{R}$ ganzzahlig ist

vorteilhaft wegen $GF(2)$

12.2 Der Algorithmus von Horton (1987)

12.3 Lemma

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit Kantengewichten $w_e \geq 0$

Sei $\mathcal{E} :=$ die Menge aller Inzidenzvektoren von elementaren Kreisen von G

Sei $\mathcal{M} := \{ X \subseteq \mathcal{E} \mid$ Vektoren aus X sind linear unabhängig $\}$

a) $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ bilden ein Matroid

b) der Greedy-Algorithmus konstruiert bzgl. $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ und Gewichten $w(C) := \sum_{e \in C} w_e$ eine minimale Kreisbasis

Beweis: ADM II:
- $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ ist ein lineares Matroid
- Basen von $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ sind Kreisbasen des Zykelraums von G (da z.B. die Fundamentalkreise eines spann. Baumes eine Basis bilden, die in $\mathcal{E}$ enthalten ist)
- Der Greedy Algo konstruiert eine Basis $\mathcal{B}$ des Matroids mit minimalem Gewicht

$$w(\mathcal{B}) = \sum_{C \in \mathcal{B}} w(C) = \sum_{C \in \mathcal{B}} \sum_{e \in C} w_e \qquad \square$$

Test auf Unabh. bei Hinzunahme eines Kreises zur momentanen unabh. Menge im Greedy Algo geht z.B. mit Gauss-Elimination in $m \times \nu$ Matrix $\Rightarrow$ $O(m^3)$

ABER: $\mathcal{C}$ enthält i.A. exponentiell viele Kreise
(und die müssen erzeugt und sortiert werden!)
$\Rightarrow$ Algo nicht polynomial

Idee von Horton: Ermittle zunächst eine Menge $\mathcal{H}$ von polynomial vielen Kreisen, die eine minimale Kreisbasis enthält

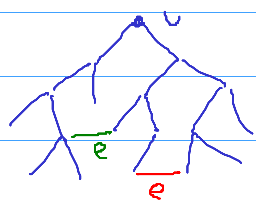
Dazu folgende Überlegungen

Für $v \in V$ sei
- T_v ein Kürzeste-Wege-Baum mit v als Wurzel
- P_{vw} bezeichnet kürzesten Weg von v nach w in T_v

Beachte $\underset{\text{in } T_v}{P_{vw}} \neq \underset{\text{in } T_w}{P_{wv}}$

Für $v \in V$ und T_v betrachte Kante $e = (x, y)$, so dass die Wege P_{vx}, P_{vy} kantendisjunkt sind

entscheidet sich bereits bei v



kommt nicht in Frage

Orientierung von y nach v

Dann setze $C_{ve} := P_{vx} + e + \overleftarrow{P_{vy}}$

Horton Menge $\mathcal{H} :=$ Menge aller C_{ve}, $v \in V$ $e \in E$

Beachte: Abb. $(v, e) \rightarrow C_{ve}$ ist nicht injektiv
(Bsp. G = Kreis $\Rightarrow$ alle $C_{ve} = G$)

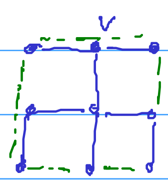
Der Algo erzeugt diese Kreise nacheinander und speichert sie in einer Liste L
die dann sortiert wird nach $w(C)$
L kann Kreise mehrfach enthalten, diese werden vom Greedy-Algo
bei Test auf Unabhängigkeit verworfen

$\mathcal{H}$ ist polynomial groß $|\mathcal{H}| \leq n \cdot m$ (auch als Liste) und in polyn. Zeit erzeugbar

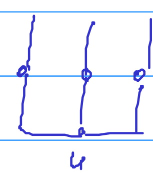
12.4 SATZ (Horton 1987)
$\mathcal{H}$ enthält eine minimale Kreisbasis und der Greedy Algorithmus berechnet ausgehend von $\mathcal{H}$ eine in polynomialer Zeit

Dazu Vorüberlegung:

Für elem. Kreis C und $v \in C$ sei
$n(C,v) :=$ # Nichtbaumkanten von T_v in C
Beachte $n(C,v) \geq 1 \quad \forall\, C, v \in C$
Sei $z(C) \in C$ der Knoten, der $n(C,v)$ über alle $v \in C$ minimiert
$z(C)$ heißt Basisknoten (Basis) von C



Gitter 3×3
$w_e = 1 \;\; \forall e$



$n(C,u) = 2$

$n(C,v) = 4$

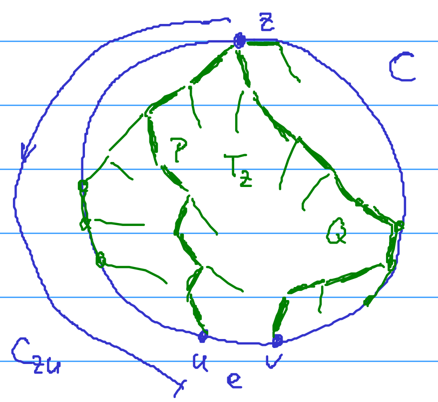
Beweis Satz 12.4
Betrachte den Greedy-Algo auf allen elementaren Kreisen
lexikographisch sortiert nach
$(\; w(C)\;,\;$ # Kanten nicht in $T_{z(C)}\;,\;$ # Kanten von $C\;)$
Beachte: Kreise in $\mathcal{H}$ haben das 2. Kriterium $= 1$
und kommen in der lexikographischen Ordnung
vor allen anderen Kreisen mit gleichem Gewicht

denn alle Kreise mit 2. Kriterium = 1 sind Harten Kreise

Greedy Algo wählt nur Kreise aus $\mathcal{H}$ $\Rightarrow$ fertig

Sei also C der erste Kreis $\notin \mathcal{H}$, der von Greedy Algo gewählt wird

Sei $z := z(C)$ und e eine Nichtbaumkante von C bzgl. T_z



Kann C schreiben als

$$C = C_{zu} + e + C_{vz} \qquad (1)$$

$\uparrow$ Kreisstück von z nach u

Sei $P := P_{zu}$, $Q := P_{zv}$

$$\left.\begin{aligned} w(P) &\leq w(C_{zu}) \\ w(P) &\leq w(\overleftarrow{C}_{uz}) = w(\overleftarrow{C}_{vz}) + w_e \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

$$\left.\begin{aligned} w(Q) &\leq w(\overleftarrow{C}_{vz}) \\ w(Q) &\leq w(C_{zv}) = w(C_{zu}) + w_e \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Betrachte Linearkombinationen

$$C_1 := C_{zu} + \overleftarrow{P} \Rightarrow w(C_1) \overset{(2)}{\leq} w(C_{zu}) + w(C_{vz}) + w_e = w(C)$$

$$C_2 := P + e + \overleftarrow{Q} \Rightarrow w(C_2) \leq w(C_{zu}) + w_e + w(C_{vz}) = w(C)$$

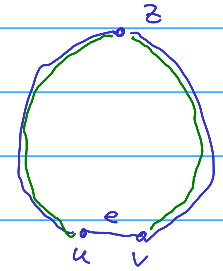
$$C_3 := Q + C_{vz} \Rightarrow w(C_3) \leq w(C_{zu}) + w_e + w(C_{vz}) = w(C)$$

Außerdem $\boxed{C = C_1 + C_2 + C_3}$

Also $w(C_1), w(C_2), w(C_3) \leq w(C)$

2 Fälle treten auf

(A) e ist einzige Nichtbaumkante von C bzgl. T_z



$\Rightarrow P = C_{zu}$, $Q = \overleftarrow{C_{vz}}$ $\Rightarrow C_1 = \emptyset$, $C_3 = \emptyset$

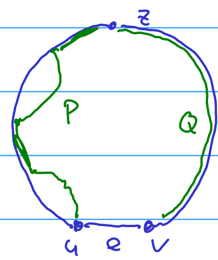
$\Rightarrow C_{zu}, C_{vz}$ sind in T_z enthalten

$\Rightarrow C = C_{ze} \in \mathcal{K}$, Widerspruch

(B) C hat 2 oder mehr Nichtbaumkanten bzgl. T_z

$\Rightarrow$ eine der Linearkombinationen $C_1, C_3 \neq \emptyset$

(B1) $C_1 \neq \emptyset$ und $C_3 = \emptyset$



$\Rightarrow C_1$ ist kantendisjunkte Vereinigung von Kreise

all diese Kreise haben weniger Nichtbaumkanten als C und kleineres Gewicht als C

da Kante e fehlt

$w(C_1) \le w(C)$

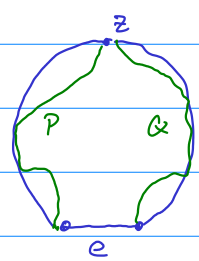
$\Rightarrow$ diese Kreise haben auch weniger Nichtbaumkanten bzgl. ihres Basisknotens

$\Rightarrow$ diese Kreise werden vor C vom Greedy Algo betrachtet

$w(C_1) \le w(C)$

(B2) $C_1 = \emptyset$, $C_3 \neq \emptyset$ symmetrisch zu (B1)

(B3) $C_1 \neq \emptyset$, $C_3 \neq \emptyset$



$\Rightarrow C_2 = P + e + \overleftarrow{Q}$ hat weniger Nichtbaumkanten als C bzgl. T_z und $w(C_2) \le w(C)$

$\Rightarrow C_2$ wird vorher vom Greedy-Algo betrachtet

In allen Fällen (B1)-(B3) gilt: alle elementaren Kreise $\bar{C}_\ell$ von C_1, C_2, C_3 werden vorher vom Greedy betrachtet

Nicht alle können vom Greedy der momentanen unabhängigen Menge hinzugefügt worden sein

denn $C = C_1 + C_2 + C_3 = \sum_\ell \bar{C}_\ell$

und C wäre dann linear abhängig von den bereits gewählten Kreisen

Jeder der nicht vom Greedy gewählten Kreise $\bar{C}_\ell$ ist linear abhängig von den bereits gewählten

$\Rightarrow C = \sum_\ell \bar{C}_\ell$ ist lin. abh. von den bereits vorher gewählten

$\Rightarrow$ Widerspruch zu Greedy Algo $\square$

12.3 Der Algorithmus von de Piña

- Mischung von Greedy und linearer Algebra
- erweitert momentane Menge bereits gewählter Kreise um kürzesten, der Komponenten im orthogonalen Komplement der bisherigen hat
- muss keine Kreismenge vorab berechnen

12.3 ALGORITHMUS (de Piña 1995, Berger et al 2004, Kavitha et al 2005)

Input: Ein ungewichteter Graph (zh) mit Kantengewichten $w_e \geq 0$

Output: eine minimale Kreisbasis B über $GF(2)$

Methode: Berechne Kreise iterativ, indem man einen kürzesten Kreis wählt,

der Komponenten im orthogonalen Komplement der bisherigen hat (mit gewissen Einschränkungen hier)
└ später

1. $\mathcal{B} := \emptyset$
2. <u>for</u> $i := 1$ <u>to</u> ν <u>do</u>
3. <u>if</u> $i = 1$ <u>then</u> sei $S_1 \in \{0,1\}^m$ beliebig, $S_1 \neq 0$
<u>else</u>
4. sei $S_i \neq 0$ in $\{0,1\}^m$ orthogonal zu den bereits berechneten Kreisen $C_1, C_2, \dots, C_{i-1}$ aus $\mathcal{B}$
d.h. S_i ist nicht-triviale Lösung x des Gleichungssystems
$$\varphi(C_k)^T x = 0 \qquad k = 1, \dots, i-1$$
5. berechne den kürzesten Kreis C_i (d.h. $w(C_i)$ minimal) mit $\varphi(C_i)^T \cdot S_i = 1$
6. $\mathcal{B} := \mathcal{B} \cup \{C_i\}$

12.4 SATZ: (de Piña)
Algorithmus 12.3 berechnet eine kürzeste Kreisbasis über $GF(2)$

Beweis: Annahme nicht
Betrachte dann das größte i so dass $C_1, \dots, C_{i-1}$ zu einer minimalen Kreisbasis $\mathcal{B}^*$ erweiterbar ist ($i-1 = 0$ möglich)
aber nicht $C_1, C_2, \dots, C_i$

$\mathcal{B}^*$ Basis $\Rightarrow$ C_i ist durch Kreise aus $\mathcal{B}^*$ linear kombinierbar
$$C_i = D_1 + D_2 + \dots + D_k \qquad D_\ell \in \mathcal{B}^* \qquad (1)$$
↑ Inzidenzvektoren und Kreise identifiziert
Koeff alle 1 wegen $GF(2)$

$$C_i^T \cdot S_i = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{\ell=1}^{k} D_\ell^T \cdot S_i = 1$$

$$\Rightarrow (GF(2)) \text{ mindestens ein } D_j^T \cdot S_i = 1$$

$\Rightarrow$ (C_i kürzester Kreis mit $C_i^T \cdot S_i = 1$) $\quad w(C_i) \leq w(D_j)$

Betrachte $B' := B^* - \{D_j\} \cup \{C_i\}$

(1) $\Rightarrow$ $D_j \underset{\uparrow}{=} C_i + D_1 + \dots + D_{j-1} + D_{j+1} + \dots + D_k$

GF(2)

$\Rightarrow$ D_j ist durch B' darstellbar, $\quad |B'| = |B^*| = \nu$

$\Rightarrow$ B' ist Kreisbasis

Claim: $B' \supseteq \{C_1, \dots, C_{i-1}\}$

Beweis Claim: $C_1, \dots, C_{i-1} \in B^*$ und Annahme aus B^* weggelassene Kreis $D_j \notin \{C_1, \dots, C_{i-1}\}$ da $D_j^T \cdot S_i = 1$ aber $C_\ell^T \cdot S_i = 0$ für $\ell = 1, \dots, i-1$ $\Big\}$ $\Rightarrow$ Claim

$w(C_i) \leq w(D_j)$ $\Rightarrow$ B' minimal

B^* minimal

$\Rightarrow$ B' erweitert $C_1, \dots, C_i$ zu min. Basis

$\Rightarrow$ Widerspruch $\square$

Aufwand des Algorithmus

Kritisch sind die Schritte 4 : Gleichungssystem $C_\ell^T \cdot S_i = 0 \quad \ell = 1, \dots, i-1$ lösen

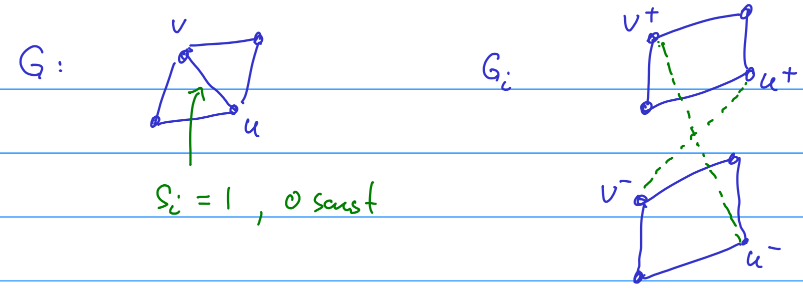
5 : kürzesten Kreis C_i mit $C_i^T S_i = 1$ berechnen

zu 5: über kürzeste Wege Berechnung in Hilfsgraphen G_i in Iteration i

$G_i = (V_i, E_i)$ mit $V_i = \{v^+, v^- \mid v \in V\}$

$E_i = \{(u^+, v^+), (u^-, v^-) \mid e = (u,v) \in E, (S_i)_{(u,v)} = 0\}$

$\cup \{(u^+, v^-) (u^-, v^+) \mid (S_i)_{(u,v)} = 1, (u,v) \in E\}$



Kanten bekommen das Gewicht der sie erzeugenden Kante (u,v)

Jeder elementare v^+,v^--Weg in G_i entspricht in G einem Kreis C (nach Kürzung zweimal durchlaufener Kanten), der eine ungerade Anzahl von S_i-Kanten durchläuft

Ein kürzester solcher Weg entspricht einem kürzesten Kreis C mit $\rho(C)^T \cdot S_i \neq 0$

$\Rightarrow$ Schritt 5 kann durch kürzeste Wege Suche mit Dijkstra von jedem Knoten v^+ aus in G_i behandelt werden

$\Rightarrow$ $O(n \cdot SP(n,m))$ insgesamt für Iteration i

$\Rightarrow$ $O(m \cdot n \cdot SP(n,m))$ insgesamt

Ein Problem bleibt: Hilfsgraph G_i muss zusammenhängend sein

$\uparrow$

hängt von Wahl von S_i ab

$\uparrow$

hängt von Lösung des Gleichungssystem $\rho(C_\ell)^T x = 0$, $\ell = 1,..,i-1$

$\nearrow$

Wissen: können uns auf Kanten eines Cobaums = Nichtbaumkanten zu einem spann. Baum T beschränken

$\Rightarrow$ S_i hat Wert 0 auf Baumkanten

$\Rightarrow$ T liegt auf beiden Seiten des Hilfsgraphen G_i

$\Rightarrow$ füge diese Kanten ggf. mit Gewicht 0 hinzu

$\Rightarrow$ diese Teile sind zusammenhängend

$\Rightarrow$ über die (v^+,v^-) Kanten ist dann G_i zusammenhängend zu 4: Gleichungssystem hat maximal ν-1 Gleichungen und m Variablen

$\Rightarrow$ $O(m^3)$ per Gauss Elimination

$\Rightarrow$ $O(m^4)$ insgesamt

$\boxed{\text{12.5 SATZ (Kavitha et al 2004): Algorithmus 5.3 kann in } O(m \cdot n \cdot SP(n,m)) \text{ implementiert werden}}$

ohne Beweis

Bemerkung: Algo 12.3 folgt auch dem Greedy Prinzip
und wählt in jeder Iteration einen kürzesten Kreis
der Kanten im orthogonalen Komplement der bisherigen Kreise enthält
↑
für die Orthogonalität wird der Vektor S_i konstruiert
dieser wird auch Zeuge für die Orthogonalität genannt