§ 12 Kurze Kreisbasen in der Menge aller Kreisbasen

12.1 Vorüberlegungen

ist polynomial (im Gegensatz zu manchen Teilklassen)

zunächst einige Vorbereitungen:

Zielfunktion $\sum_{C \in B} \sum_{a \in C} (u_a - l_a)$ hängt nicht von Orientierung der Kanten ab $\Rightarrow$ kann zugrunde liegenden ungerichteten Graphen verwenden

Bzgl. ungerichteter Graphen betrachtet man in der Regel den Kreisraum über GF(2). Folgendes Lemma zeigt, dass dies auch bzgl. kurzer Basen möglich ist

Vorteil: GF(2) ermöglicht einfaches Rechnen
$1+1=0$, $-1=1$!

12.1 LEMMA: Sei G ein Digraph und G' der zugrundeliegende ungerichtete Graph. Sei B eine Menge von ν Kreisen aus dem Zykelraum von G in $\mathbb{R}^E$ und sei B' die Menge der zugehörigen ungerichteten Kreise in G'. Dann gilt:

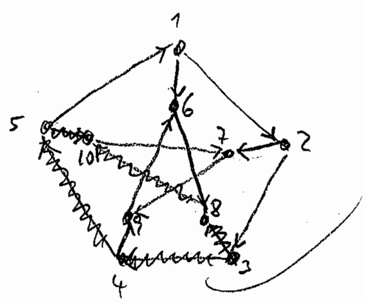
$$\det B \text{ ist ungerade} \iff B' \text{ ist Zykelbasis von } G' \text{ bzgl. } GF(2)$$

Beweis: Betrachte Laplace Entwicklung von $\det B$ und $\det B'$. Dann gilt wegen Rechnung in $GF(2)$

$$\det B = 2k,\ k \in \mathbb{N} \iff \det B' = 0 \qquad \square$$

Beispiel: Es gibt Basen in G über $\mathbb{R}$, die keine Basis von G' über $GF(2)$ induzieren

Petersen Graph:



jede dieser Kreise + innerer Stern bilden Basis

(1,2)	(2,3)	(3,4)	(4,5)	(5,1)	(6,8)	(8,10)	(10,7)	(7,9)	(9,6)	(1,6)	(2,7)	(3,8)	(4,9)	(5,10)
1	1				−1					−1		1		
	1	1						−1			−1		1	
		1	1			−1						−1		1
			1	1					−1	1			−1	
1				1			−1				1			−1
					1	1	1	1	1					

Summe der Kreise $\neq 0$ über $\mathbb{R}$, aber $= 0$ über $GF(2)$

12.2 FOLGERUNG: Jede ganzzahlige Basis in G ist eine (ganzzahlige) Basis in G' über GF(2)

d.h. es reicht, im ungerichteten Graphen eine kurze Basis zu finden und dann zu prüfen, ob sie im gerichteten Sinne über $\mathbb{Q}$ ganzzahlig ist

vorteilhaft, da Linearkombinationen über GF(2) besonders einfach sind.
Alle Vektoren im Zyklenraum sind Eulersch,
d.h. Vereinigung von kantendisjunkten Kreisen

12.2 Der Algorithmus von Horton (1987)

12.3 LEMMA
Sei $G=(V,E)$ ein ungerichteter Graph mit Kantengewichten $w_e \geq 0$

a) Sei $\mathcal{E}$:= Menge aller Inzidenzvektoren von elem. Kreisen von G
Sei $\mathcal{M} := \{ X \subseteq \mathcal{E} \mid$ Vektoren aus X sind linear unabh.$\}$
Dann bildet $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ ein Matroid

b) Der Greedy Algorithmus konstruiert bzgl. $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ und Gewichten $w(C) := \sum_{e \in C} w_e$ minimale Kreisbasis

Beweis:

APM II: • $(\mathcal{E}, M)$ ist ein lineares Matroid

• Basen von $(\mathcal{E}, M)$ sind Kreisbasen des Zykelraums,
(da z.B. die Fundamentalkreise eines spann. Baumes eine Basis bilden, und in $\mathcal{E}$ alle Kreise sind)

• Der Greedy Algorithmus konstruiert eine Basis B mit minimalem Gewicht $w(B) = \sum_{C \in B} w(C) = \sum_{C \in B} \sum_{e \in C} w_e$

Test auf Hinzunahme eines Kreises zur momentanen unabhängigen Menge im Greedy Algorithmus $\hat{=}$ Test auf Unabhängigkeit
↑
Kann mit Gauß-Elimination gemacht werden in $m \times \nu$ Matrix $\Rightarrow O(m^2)$

ABER: $\mathcal{E}$ enthält i.A. exponenziell viele Kreise!
$\Rightarrow$ Algo nicht polynomial.

Idee von Horton: Ermittle zunächst eine Menge $\mathcal{H}$ von nur polynomial vielen Kreisen, die eine minimale Kreisbasis enthält

Dann folgende Überlegungen

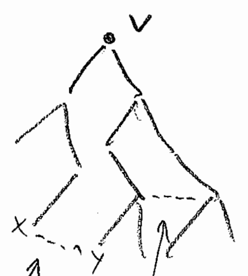
Für $v \in V$ sei • T_v ein Kürzeste-Wege-Baum bzgl. w_e mit Wurzel v

• P_{vw} kürzester Weg von v nach w in T_v

Beachte $P_{vw} \neq \underset{\uparrow \text{ in } T_w}{P_{wv}}$ möglich

Für $v \in V$ und T_v betrachte Kante $e = (x, y)$, so dass die Wege P_{vx}, P_{vy} kantendisjunkt sind

(entscheidet sich bereits bei v)



e ist okay   e kommt nicht in Frage

Dann setze $C_{ve} := P_{vx} + e + \overleftarrow{P}_{vy}$ ← Richtung von y nach v

Horton Menge $\mathcal{H} :=$ Menge aller C_{ve}, $v \in V$, $e \in E$

Beachte: Abb. $(v,e) \mapsto C_{ve}$ ist nicht injektiv

$\Rightarrow$ $\mathcal{H}$ als Liste in Algo kann Kreise mehrfach enthalten, diese werden bei Test auf Unabhängigkeit verworfen

$\mathcal{H}$ is polynomial groß, $|\mathcal{H}| \leq n \cdot m$

12.4 SATZ (Horton 1987)
$\mathcal{H}$ enthält eine minimale Kreisbasis und der Greedy algorithmus berechnet eine in polynomialer Zeit

<u>Dazu Vorüberlegung:</u>

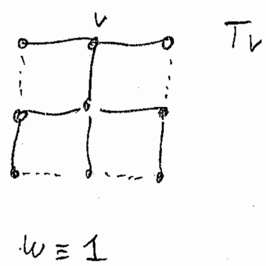
Für elem. Kreis C und $v \in C$ beliebig sei

$n(C,v) := \#$ Nichtbaumkanten von T_v in C

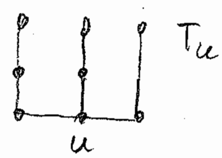
Beachte: $n(C,v) \geq 1 \quad \forall C, \forall v \in C$

Sei $z(C) \in C$ der Knoten, der $n(C,v)$ über alle $v \in C$ minimiert. $z(C)$ heißt <u>Basisknoten von C</u>

Bsp:



äußerer Kreis hat $n(C,v) = 3$



$n(C,u) = 2$

<u>Beweis Satz 12.4</u>

Betrachte den Greedy Algo auf <u>allen</u> elementaren Kreisen C lexikographisch sortiert nach

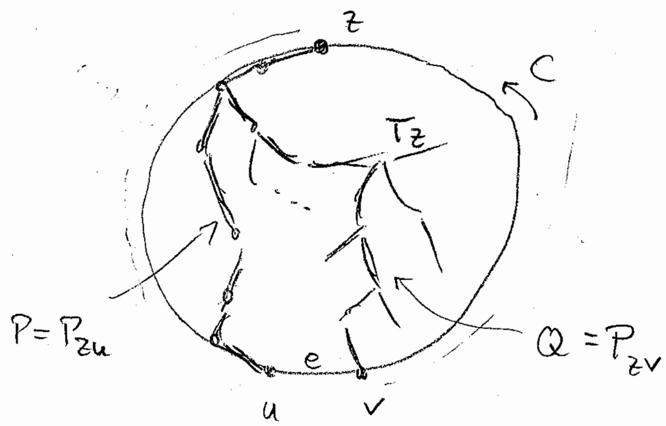
$$(w(C),\ \#\text{ Kanten nicht in } T_{z(C)},\ \#\text{ Kanten in } C)$$

Beachte: Kreise in $\mathcal{H}$ haben 2. Kriterium $= 1$
und kommen in der lexikographischen Ordnung vor allen anderen Kreisen mit gleichem Gewicht $w(C)$

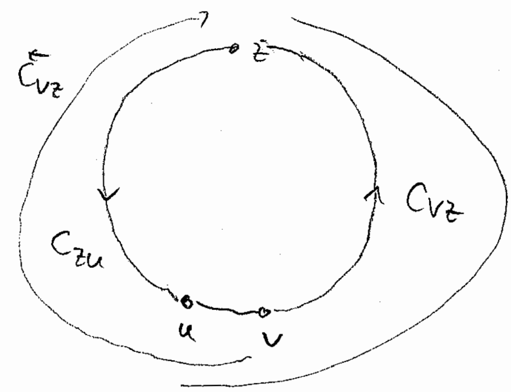
Greedy Algo wählt nur Kreise aus $\mathcal{H}$ $\Rightarrow$ fertig

Sei also C der erste Kreis $\notin \mathcal{H}$, der vom Greedy Algorithmus gewählt wird

Sei $z := z(C)$ und e eine Nichtbaumkante von T_z



$$\Rightarrow C = C_{zu} + e + C_{vz} \qquad (1)$$



$$w(P) \leq w(C_{zu}),\ w(\overleftarrow{C}_{vz}) \qquad (2)$$

$$w(Q) \leq w(\overleftarrow{C}_{vz}),\ w(C_{zv}) = w(C_{zu}) + w_e \qquad (3)$$

Betrachte Linearkombinationen

$$C_1 := C_{zu} + \overleftarrow{P} \Rightarrow w(C_1) \overset{(2)}{\leq} w(C_{zu}) + w_e + w(C_{vz}) \overset{(1)}{=} w(C)$$

$$C_2 := P + e + \overleftarrow{Q} \Rightarrow w(C_2) \overset{(2),(3)}{\leq} w(C_{zu}) + w_e + w(C_{vz}) \overset{(1)}{=} w(C)$$

$$C_3 := Q + C_{vz} \Rightarrow w(C_3) \leq w(C_{zu}) + w_e + w(C_{vz}) = w(C)$$

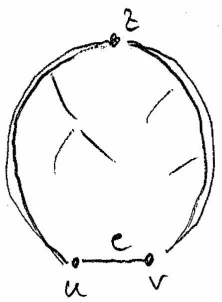
$$\Rightarrow \boxed{C = C_1 + C_2 + C_3} \qquad (4)$$

denn $C_1 + C_2 + C_3 = C_{zu} + \cancel{\overleftarrow{P}} + \cancel{P} + e + \cancel{\overleftarrow{Q}} + \cancel{Q} + \overleftarrow{C}_{vz} \overset{(1)}{=} C$

Also $w(C_1), w(C_2), w(C_3) \le w(C)$

2 Fälle treten auf

(A) e ist einzige Nichtbaumkante bzgl. T_z auf C



$\Rightarrow P = C_{zu}$, $Q = \overleftarrow{C}_{vz}$ $(\Rightarrow C_1 = \emptyset, C_3 = \emptyset$

$\Rightarrow C_{zu}, C_{vz}$ sind in T_z enthalten

C elementarer Kreis, $z \in C$

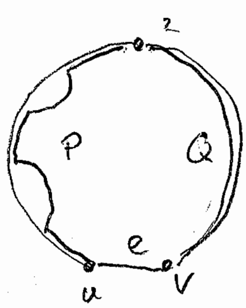
$\Rightarrow$ Wege P, Q haben keine gemeinsame Kante

$\Rightarrow C = C_{zu} \in \mathcal{H}$, Widerspruch

(B) C habe 2 oder mehr Nichtbaumkanten bzgl. T_z

$\Rightarrow$ eine der Linearkombinationen $C_1, C_3 \neq \emptyset$

(B1) $C_1 \neq \emptyset$ und $C_2 = \emptyset$



$\Rightarrow C_1$ = Vereinigung kantendisj. elem. Kreise (evtl. nur einer)

alle diese Kreise haben weniger Nichtbaumkanten als C, da $e \notin C_1$

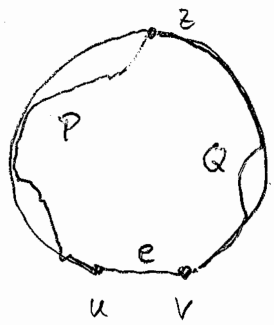
$\Rightarrow$ diese Kreise haben auch weniger Nichtbaumkanten bzgl. ihres Basisknotens

$\Rightarrow$ diese Kreise werden vor C vom Greedy-Algo betrachtet

$w(C_1) \le w(C)$

(B2) $C_1 = \emptyset$ und $C_2 \neq \emptyset$ symmetrisch zu (B1)

(B3) $C_1 \neq \emptyset$ und $C_2 \neq \emptyset$



$\Rightarrow$ $C_2 = P + e + \overleftarrow{Q}$ hat weniger Nichtbaumkanten als C und $w(C_2) \leq w(C)$

$\Rightarrow$ C_2 wird vorher vom Greedy-Algo betrachtet

In den Fällen (B1)-(B3) gilt:

alle der elementaren Kreise $\bar{C}$ von C_1, C_2, C_3 werden vorher vom Greedy betrachtet

und nicht alle können gewählt worden sein

↑ sonst ist $C = C_1 + C_2 + C_3$ lin. abh. von den bereits gewählten Kreisen

Jeder der nicht gewählten muss lin. abh. zu den bereits gewählten gewesen sein

$\bar{C} = C_1 + C_2 + C_3$ lin. abh. von den bereits gewählten

$\Rightarrow$ Widerspruch $\square$

12.3 Der Algorithmus von de Pina

Mischung aus Greedy und lineare Algebra
erweitert momentane Menge von Kreisen um
kürzesten, der Komponenten im orthogonalen Komplement
der bisherigen hat, muss keine Kreismenge vorab
berechnen

12.3 ALGORITHMUS (de Pina 95, Berger et al 04, Kavitha et al 05)

Input: Ein ungerichteter zh. Graph G mit positiven Kantengewichten w_e

Output: eine minimale Kreisbasis $\mathcal{B}$ über $GF(2)$

Methode: (Berechne Kreise aus $\mathcal{B}$ iterativ, indem man einen kürzesten Kreis wählt, der Komponenten im orthogonalen Komplement der bisherigen Kreise hat, mit gewissen Einschränkungen hier)

1. $\mathcal{B} := \emptyset$ [später]
2. **for** $i := 1$ **to** ν **do**
3. **if** $i = 1$ **then** sei $S_1 \in \{0,1\}^m$ beliebig, $S_1 \neq 0$ (*)

   else

4. sei $S_i \neq 0$ in $\{0,1\}^m$ orthogonal zu den bereits berechneten Kreisen $C_1, \dots, C_{i-1}$ aus $\mathcal{B}$ (*)

   d.h., S_i ist nichttriviale Lösung x des linearen Gleichungssystem

$$g(C_k)^T \cdot x = 0 \qquad k = 1, \dots, i-1$$

5. berechne den kürzesten Kreis C_i (d.h. $w(C_i)$ minimal) mit $g(C_i)^T \cdot S_i = 1$
6. $\mathcal{B} := \mathcal{B} \cup \{C_i\}$

12.4 SATZ (de Pina 95; Berger et al 04; Kavitha et al 04)
Algorithmus 12.3 berechnet eine kürzeste Kreisbasis über $GF(2)$

Beweis: Annahme nicht. Betrachte dann das größte i so dass $C_1, \dots, C_{i-1}$ zu einer minimalen Kreisbasis B^* erweiterbar ist, aber nicht $C_1, \dots, C_{i-1}, C_i$ $\quad (i-1 = 0$ möglich$)$

B^* Basis $\Rightarrow$ C_i ist durch Kreise aus B^* linear kombinierbar,

etwa $\underbrace{C_i = D_1 + \dots + D_k}_{\text{Inzidenzvektoren und Kreise identifiziert}} \qquad D_\ell \in B^* \qquad (1)$

$C_i^T \cdot S_i = 1$ ergibt $\sum_{\ell=1}^{k} D_\ell^T \cdot S_i = 1$

$\Rightarrow$ $(GF(2))$ mindestens ein $D_j^T \cdot S_i = 1$

$\Rightarrow$ $(C_i$ kürzester Kreis mit $C_i^T S_i = 1)$ $\quad w(C_i) \le w(D_j)$

Betrachte $B' := B^* - \{D_j\} \cup \{C_i\}$

(1) $\Rightarrow$ $D_j \overset{GF(2)}{=} C_i + D_1 + \dots + D_{j-1} + D_{j+1} + \dots + D_k$

$\Rightarrow$ D_j durch B' ausdrückbar, $\quad |B'| = |B^*| = \nu$

$\Rightarrow$ B' ist ebenfalls Basis

Claim: $B' \supseteq \{C_1, \dots, C_{i-1}\}$

Beweis Claim: $\{C_1, \dots, C_{i-1}\} \subseteq B^*$ nach Annahme

$$\left.\begin{array}{l}\text{Aus } B^* \text{ weggelassener Kreis } D_j \notin \{C_1, \dots, C_{i-1}\} \\ \text{da } D_j^T S_i = 1, \text{ aber } C_\ell^T S_i = 0 \text{ für } \ell = 1, \dots, i-1\end{array}\right\} \Rightarrow \text{Claim}$$

$w(C_i) \le w(D_j) \;\Rightarrow\; B'$ ist minimale Basis (B^* minimal)

Claim $\;\Rightarrow\; B'$ erweitert $C_1, \dots, C_i$ zu minimale Basis

$\;\Rightarrow\;$ Widerspruch $\square$

<u>Aufwand des Algorithmus:</u>

Kritisch sind Schritte 4: Gleichungssystem lösen

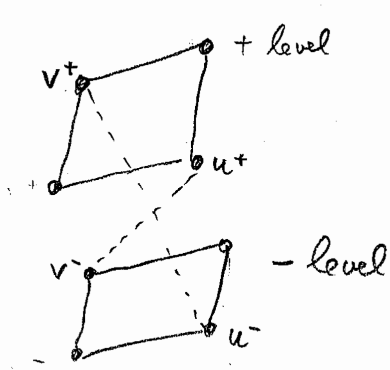
5: kürzesten Kreis mit Nebenbed. berechnen (*)

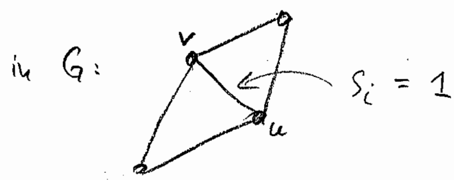
zu 5: über Kürzeste-Wege Berechnung im Hilfsgraphen G_i in Iteration i

$G_i = (V_i, E_i)$ und $V_i := \{v^+, v^- \mid v \in V\}$

$E_i := \{(u^+, v^+), (u^-, v^-) \mid e = (u,v) \in E,\ (S_i)_{(u,v)} = 0\} \;\cup$

$\{(u^+, v^-), (u^-, v^+) \mid (S_i)_{(u,v)} = 1\}$





Kanten bekommen das Gewicht der sie erzeugenden Kante (u,v)

Jeder (elementare) v^+, v^- - Weg in G_i entspricht in G einem Kreis C (nach Kürzung 2x durchlaufener Kanten), der eine ungerade Anzahl von S_i-Kanten benutzt. Ein kürzester solcher Weg entspricht einem kürzesten Kreis C mit $\varphi(C)^T \cdot S \neq 0$

$\Rightarrow$ Schritt 5 kann durch kürzeste Wege Suche mit Dijkstra von jedem Knoten v_t aus in G_i behandelt werden

$\Rightarrow O(n \cdot SP(n,m))$ für Iteration i

$\Rightarrow O(m \cdot n\, SP(n,m))$ insgesamt

Ein Problem bleibt: Hilfsgraph G_i muss zusammenhängend sein!

↑

Hängt von Wahl des Zeugen S_i ab!

↑

hängt von Lösung des Gleichungsystems $\varphi(C_k^T)\,x = 0 \quad k = 1,\dots,i-1$ ab

Wissen: Können uns auf Kanten eines Co-Baums bzgl. G beschränken (max lin unabh. Teilmatrix)

Ergänze nichttriviale Lösung dieses beschränkten Gleichungssystem durch Baumkanten aus Baum T zu dem Cobaum mit Wert 0.

$\Rightarrow$ Zeuge S_i erfüllt $S_i \cap T = \emptyset$

$\Rightarrow$ T liegt in beiden "Teilen" des Hilfsgraphen G_i

$\Rightarrow$ diese Teile sind zusammenhängend

$\Rightarrow$ (über die Zusatzkanten) G_i ist zusammenhängend

zu 4: Gleichungssystem hat maximal ν Gleichungen und m Variablen $\Rightarrow O(m^3)$ per Gauss-Elimination
$\Rightarrow O(m^4)$ insgesamt

Verbesserung möglich

12.5 SATZ (Kavitha et al 04): Algorithmus 8.8 kann in $O(m \cdot n \cdot SP(n,m))$ implementiert werden

ohne Beweis

Bemerkung: Algorithmus 12.3 folgt auch dem Greedy-Prinzip: wähle in jeder Iteration einen kürzesten Kreis, der Kanten im orthogonalen Komplement der bisherigen Kreise enthält, für die Orthogonalität ist der Vektor S_i der "Zeuge"