

§ 11 Schranken für f_c und kurze Kreisbasen

(haben durch die bisherigen MIP Formulierungen 2 verschiedene "Suchräume")

(1) zulässige periodische Potentiale

$$= \underbrace{\text{gzz. Periodenoffsets } p_a}_{\text{Suchraum, } p_a \text{ sind schwer zu finden}} + \underbrace{\text{zulässiges Potential}}_{\text{einfach bei gegebenem } p_a}$$

Suchraum, p_a sind schwer zu finden

einfach bei gegebenem p_a

(2) zulässige periodische Spannungen

$$= \underbrace{\text{gzz. Vielfache } f_c \text{ von } T}_{\text{Suchraum, schwer zu finden}} + \underbrace{\text{zulässiger Vektor } x}_{\text{d.h. } l_a \leq x_a \leq u_a \quad \forall a}$$

Suchraum, schwer zu finden

einfach bei geg. f_c

Welcher Suchraum ist besser? kleiner?

Maß für "Güte" könnte die Verteilung von oberen und unteren Schranken für die p_a bzw. f_c sein

Ist $\underline{f}_c \leq f_c \leq \bar{f}_c$ so gilt für den Suchraum der f_c

$$\{ \text{mögliche Vektoren } f \} \subseteq \prod_{c \in \mathcal{C}} [\underline{f}_c, \bar{f}_c] \quad \text{Quader in } \mathbb{R}^V$$

$$\Rightarrow \text{Größe Suchraum} \leq \prod_{c \in \mathcal{C}} (\bar{f}_c - \underline{f}_c - 1) \quad \text{Maß für "Güte"}$$

11.1 Schranken an die q_c durch Kreisungleichungen

11.1 SATZ (Odijk '94)

Es gibt zulässige periodische Spannung x zu Kreisvielfacher q_c

$$\Leftrightarrow q_c \leq \frac{1}{T} \left(\sum_{a \in C^+} u_a - \sum_{a \in C^-} l_a \right)$$

für jeden elementaren Kreis C

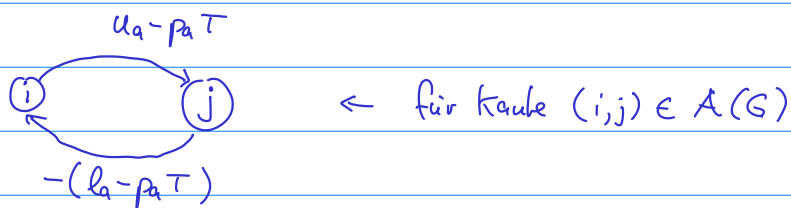
Beweis:

Sei x zulässige periodische Spannung

$$\Leftrightarrow \exists \text{ Periodenoffsets } p_a \text{ mit } l_a \leq x_a + p_a \cdot T \leq u_a \quad \forall a$$

$\Leftrightarrow x_a$ ist zulässig aperiodische Potenzialdifferenz bzgl. der Restriktionen $[l_a - p_a \cdot T, u_a - p_a \cdot T]$

\Leftrightarrow (Satz 9.1) Digraph \vec{G} mit Kantengewichten



hat keinen gerichteten Kreis negativer Länge

$$\Leftrightarrow \sum_{a \in C^+} (u_a - p_a \cdot T) - \sum_{a \in C^-} (l_a - p_a \cdot T) \geq 0 \quad \forall \text{ elementaren ungerichteten Kreise von } G$$

$$\Leftrightarrow \sum_{a \in C^+} u_a - \sum_{a \in C^-} l_a - p^T \mathcal{G}(C) \cdot T \geq 0$$

\uparrow
 Vektor der p_a

$$\Leftrightarrow p^T \cdot \mathcal{G}(C) \leq \frac{1}{T} \left(\sum_{a \in C^+} u_a - \sum_{a \in C^-} l_a \right)$$

bleibt zu klären: wie verhält sich q_c zu $p^T \mathcal{P}(C)$?

$$q_c \stackrel{\text{Def}}{=} x^T \cdot \mathcal{P}(C) = z \quad \text{mit } z = \underbrace{\sum_{a \in C^+} p_a - \sum_{a \in C^-} p_a}_{p^T \mathcal{P}(C)}$$

↑
Beweis Satz 10.2
(1) \Leftrightarrow (2)

$$\Rightarrow q_c = p^T \cdot \mathcal{P}(C) \quad \square$$

11.2 Korollar: Die Kreiswertpaare q_c eines zulässigen periodischen Spannung erfüllen die Kreisungleichungen

$$\underbrace{\left[\frac{1}{T} \left(\sum_{a \in C^+} l_a - \sum_{a \in C^-} u_a \right) \right]}_{=: \underline{q}_c} \leq q_c \leq \underbrace{\left[\frac{1}{T} \left(\sum_{a \in C^+} u_a - \sum_{a \in C^-} l_a \right) \right]}_{=: \bar{q}_c}$$

für jeden elementaren Kreis von G

Beweis:

$$q_c \leq \bar{q}_c \text{ folgt aus Satz 11.1 und } q_c \text{ gzz}$$

Sei \overleftarrow{C} der Kreis zu C mit umgekehrter Orientierung
 $\Rightarrow \overleftarrow{C}^+ = C^-$, $\overleftarrow{C}^- = C^+$ $q_{\overleftarrow{C}} = -q_c$

$$\text{Satz 11.1 } \Rightarrow q_{\overleftarrow{C}} \leq \frac{1}{T} \left(\sum_{a \in \overleftarrow{C}^+} u_a - \sum_{a \in \overleftarrow{C}^-} l_a \right)$$

$$\Leftrightarrow -q_c \leq \frac{1}{T} \left(\sum_{a \in C^-} u_a - \sum_{a \in C^+} l_a \right)$$

$$\Leftrightarrow q_c \geq \frac{1}{T} \left(\sum_{a \in C^+} l_a - \sum_{a \in C^-} u_a \right)$$

$$\begin{aligned} \text{g.z.z.} \\ \Rightarrow \quad \underline{f_c} &\geq \left\lceil \frac{1}{T} (\dots) \right\rceil = \underline{f_c} \quad \square \end{aligned}$$

11.2 Polyedertheoretische Interpretation der Kreisungleichungen

$$\text{Betrachte Polyeder } Q := \left\{ (\pi, p) \in \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}^m \mid \begin{array}{l} \pi_j - \pi_i + p_a T \leq u_a \\ -(\pi_j - \pi_i + p_a T) \leq -l_a \end{array} \forall a = (i,j) \right\}$$

$$= \text{Polyeder der Form } \{x \mid Ax \leq b\} =: Q$$

Wir sind bzgl. PESP an g.z.z. Hülle Q_I von Q interessiert

Wir wissen aus ADM II, dass Chvatal-Gomory-Schnitte gültige Ungleichungen für Q_I definieren

$$\underbrace{y^T A x}_{\text{g.z.z.}} \leq \lfloor y^T b \rfloor \quad \text{mit } y \geq 0$$

11.3 Proposition: Die Kreisungleichungen

$$\underline{f_c} \leq f_c = p^T \varphi(C) \leq \bar{f}_c$$

sind Chvatal-Gomory Schnitte

Beweis: nicht zu zeigen für $p^T \varphi(C) \leq \bar{f}_c$

entspricht Chvatal-Gomory Schnitt $y^T A x \leq \lfloor y^T b \rfloor$

$$\text{mit } y^T = \left(\underbrace{y_{a_1}, y_{a_1}^-, \dots, y_{a_m}, y_{a_m}^-}_{\text{g.z.z.}} \right) \cdot \frac{1}{T}$$

für jede Kante 2 Komponenten

für die Ungleichungen $\dots \leq u_a$
 $\dots \leq -l_a$

$$\text{und } y_a := \begin{cases} 1 & \text{wenn } a \in C^+ \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad y_a^- := \begin{cases} 1 & a \in C^- \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y^T A x = \frac{1}{T} \left(\sum_{a \in E^+} (\pi_j - \pi_i) - \sum_{a \in E^-} (\pi_j - \pi_i) \right)$$

Potenzialdiff entlang Kreis $E = 0$

$$+ \left(\sum_{a \in E^+} p_a - \sum_{a \in E^-} p_a \right) \leq \frac{1}{T} \left[\sum_{a \in E^+} u_a - \sum_{a \in E^-} l_a \right]$$

$$p^T g(C) = g_c$$

\Rightarrow Kreisgleichung bleibt übrig \square

11.4 Proposition: Der Chvatal-Rang von Q ist unbeschränkt (mit wachsender Graphengröße n)

Speziell ist also $Q_I \not\subseteq Q + \text{Kreisgleichungen}$

Beweis nutzt allgemeines Resultat von Boyd & Puleyblank '84 über Chvatal-Rang und NP-Theorie:

11.5 SATZ: Sei $(P^k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine polynomial lösbare Familie rationaler Polyeder $P^k \subseteq \mathbb{R}^{n_k}$ mit n_k Variablen, so dass das Problem

Gegeben: $k, c \in \mathbb{Q}^{n_k}, \delta \in \mathbb{Q}$

Frage: ist $\max_x \{ c^T x \mid x \in P^k, x \text{ gzz} \} > \delta$

NP-vollständig ist. Ist dann $NP \neq coNP$, so existiert

kein $t \in \mathbb{N}$ mit $(P^k)^{(t)} = (P^k)_I$ für alle $k \in \mathbb{N}$

\uparrow \uparrow ganzzahlige Hülle
 t -te Chvatal-Hülle von P^k

ohne Beweis: (siehe Schrijver-Buch 1986, einfach mit Sätzen der ADM II)

Beweis Proposition 11.4: $P^k := Q^{n+m}$ $k = n+m$
 $\uparrow \quad \uparrow$
 $\pi \quad P$

MAX-Variante von PESP ist NP-vollständig

\Rightarrow Voraussetzungen von Satz 11.5 erfüllt

\Rightarrow $\text{rang}(P^k)$ unbeschränkt bei wachsendem k \square

11.1

Aufgabe 11.1: Finden Sie eine Ungleichung für Q_{\pm} ,
 die nicht von einer Kreisungleichung "dominiert" wird
 (Beispiel reicht)

11.3 kleiner Suchraum durch kurze Kreisbasen

Sei B eine ganzzahlige Kreisbasis (= Basis des Zykelraums)

Korollar 8.2 \Rightarrow

$$\underbrace{\left\lfloor \frac{1}{T} \left(\sum_{a \in C^+} l_a - \sum_{a \in C^-} u_a \right) \right\rfloor}_{q_c} \leq q_c \leq \underbrace{\left\lceil \frac{1}{T} \left(\sum_{a \in C^+} u_a - \sum_{a \in C^-} l_a \right) \right\rceil}_{\bar{q}_c}$$

\Rightarrow mögliche Werte für q_c sind $\underline{q}_c, \underline{q}_c + 1, \dots, \underline{q}_c + k = \bar{q}_c$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\bar{q}_c - \underline{q}_c + 1 \text{ Werte}}$

Maß für Güte des Lösungsraums

$$\prod_{C \in B} (\bar{q}_c - \underline{q}_c + 1) \rightarrow \text{klein}$$

$$\hat{=} \prod \left(\underbrace{\frac{1}{T} \left(\sum_{a \in C^+} u_a - \sum_{a \in C^-} l_a \right) - \frac{1}{T} \left(\sum_{a \in C^+} l_a - \sum_{a \in C^-} u_a \right) + 1}_{\hspace{10em}} \right) \rightarrow \text{klein}$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{a \in C^+} (u_a - l_a) + \sum_{a \in C^-} (u_a - l_a) + 1$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{a \in C} (u_a - l_a) + 1$$

log

$$\hat{=} \sum_{C \in \mathcal{B}} \log \left(\sum_{a \in C} (u_a - l_a) + 1 \right) \rightarrow \text{klein}$$

$\hat{=}$ Länge der Basis \mathcal{B} bzgl. Kantenbewertung $u_a - l_a$ klein

also $\sum_{C \in \mathcal{B}} \sum_{a \in C} (u_a - l_a)$ klein

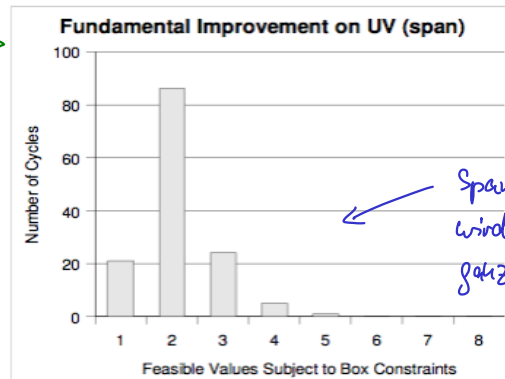
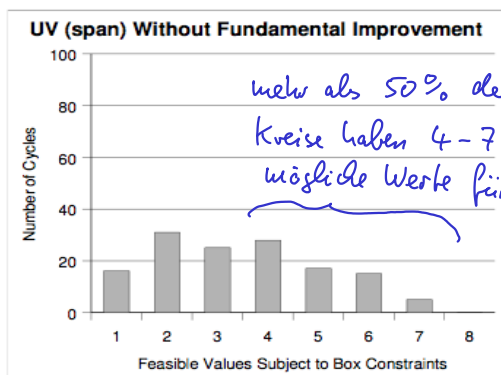
kurze Kreisbasis bzgl. Gewichten $w_a = u_a - l_a \hat{=}$ kleine Länge $w(\mathcal{B})$

$$w(\mathcal{B}) := \sum_{C \in \mathcal{B}} \sum_{a \in C} w_a$$

↑
Länge der Kreisbasis \mathcal{B}

minimale Kreisbasis (in einer bestimmten Klasse von Basen)

= Basis mit kleinster Länge in der Klasse



bessere Basis

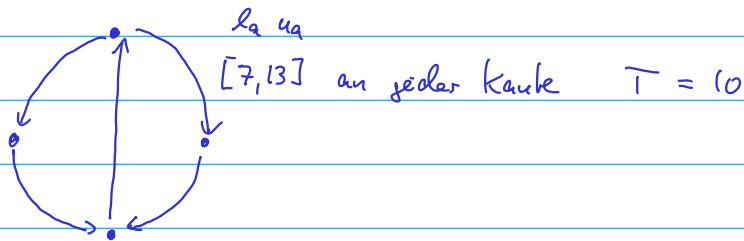
hat enormen Einfluss auf Rechenzeit von CPLEX

da die Spanne $\bar{g}_c - \underline{g}_c + 1$ deutlich kleiner wird

- Rechenzeit sinkt um mehrere 100%
- Instanz lösbar wenn Größe Subraum $\leq 10^{50}$
- Instanz unlösbar ... $\geq 10^{90}$

Staud 2006

Beispiel



Abschätzung Größe Suchraum über Potenzialwerte:

4 Variable $\pi_i \in \{0, 1, \dots, 9\}$

10^4 Kombinationen = 10.000 Größe Suchraum

für jede Kombination pro Kante ein geeignetes p_a finden ist einfach

Abschätzung Größe Suchraum über Spannungen:

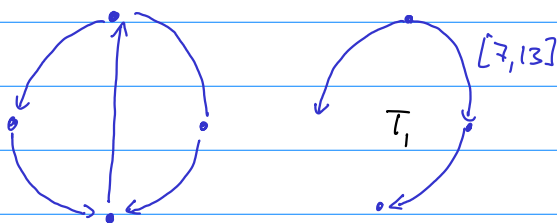
pro Kante Variable $x_a \in \{7, \dots, 13\}$

$\Rightarrow 7^5$ Kombinationen = 16.807 Größe Suchraum

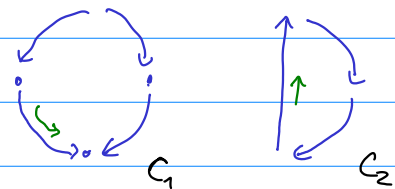
Für jede Kombination x prüfen ob $\tau^T x = z^T$ (leicht)

Abschätzung über Kreisungleichungen

a) Basis durch Baum T_1



Fundamentalkreise



Schranken aus Kreisungleichungen

$$\underline{q}_{C_1} = \left\lceil \frac{1}{10} ((7+7) - (13+13)) \right\rceil = -1$$

$$\bar{q}_{C_1} = \left\lfloor \frac{1}{10} ((13+13) - (7+7)) \right\rfloor = 1$$

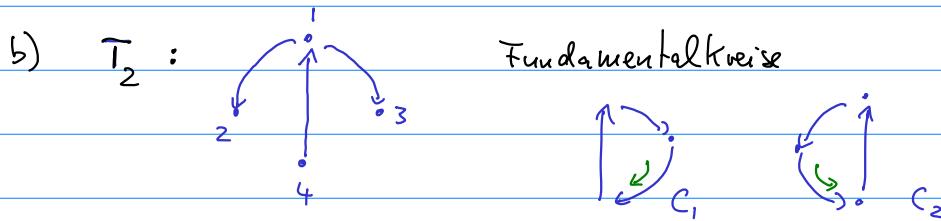
$$\left. \begin{array}{l} \underline{q}_{C_1} = -1 \\ \bar{q}_{C_1} = 1 \end{array} \right\} -1 \leq q_{C_1} \leq 1$$

$$\underline{q}_{C_2} = \left\lceil \frac{1}{10} (7+7+7) \right\rceil = 3$$

$$\bar{q}_{C_2} = \left\lfloor \frac{1}{10} (13+13+13) \right\rfloor = 3$$

$$\left. \begin{array}{l} \underline{q}_{C_2} = 3 \\ \bar{q}_{C_2} = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow q_{C_2} = 3$$

=> nur 3 mögliche Lösungen!



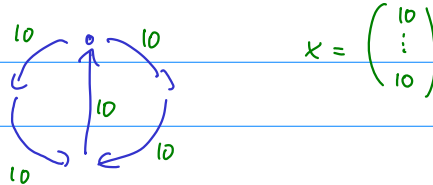
=> wie bei a) : $\underline{q}_c = \bar{q}_c = 3$ für beide Kreise
=> nur eine Lösung für Kreisvielfade

Lösungen x ergeben sich aus $\Gamma^T x = T \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $l \leq x \leq u$

	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,4)$	$(3,4)$	$(4,1)$	
C_1		1		1	-1	$\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{13} \\ x_{24} \\ x_{34} \\ x_{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \end{pmatrix}$
C_2	1		1		1	

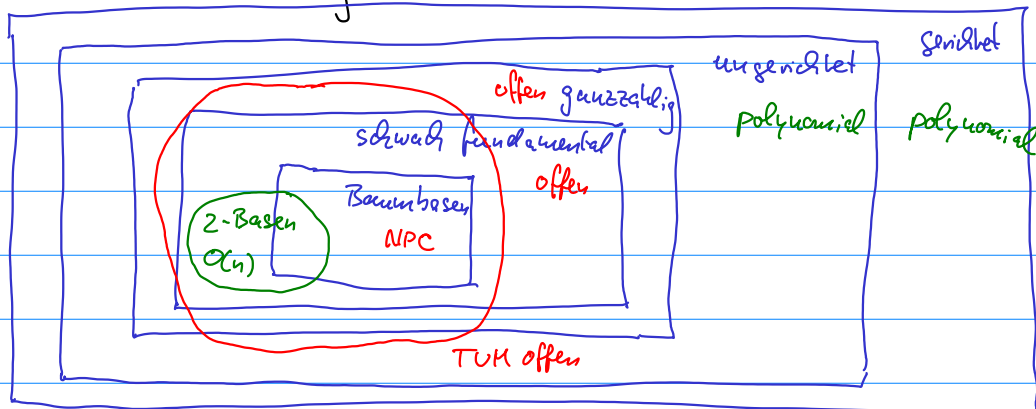
$$7 \leq x_{ij} \leq 13$$

z.B. erfüllt durch



bestes x ergibt sich aus $\min \sum w_{ij} \cdot x_{ij}$ unter diesen Bedingungen

Komplexität der Berechnung minimaler Kreisbasen in verschiedenen Klassen



für Baumbasen sogar MAX-SNP-vollständig

Für das PESP daher Techniken zur Bestimmung einer

"guten" kreisbasis

- z.B.
- Start in Baumbasis
 - iterativ Kreise durch kürzere ersetzen unter Beibehaltung der linearen Unabhängigkeit

↑

lokale Suche

Nachbarn einer Kreisbasis sind alle, die sich nur um einen Kreis unterscheiden

11.2

Aufgabe 11.2 "Elfenstadt"

n^2 Elfen wohnen auf $n \times n$ Gitter (in jedem Knoten eine)

haben Überschwemmung

wollen sich durch Stege verbinden (nur Kanten des Gitter verwenden)

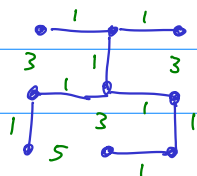
so dass Klaus von außen vom Meer aus erreichbar ist

Summe der Weglängen zwischen je 2 benachbarten Elfen im Gitter soll minimiert werden

a) Bezug zu minimalen Baumbasen herstellen

b) gute Lösung für $n=8$ finden

$n=3$



$$\Sigma = 22$$