§ 11 Schranken für q_c und kurze Kreisbasen

Haben durch die bisherigen MIP-Formulierungen 2 verschiedene "Suchräume"

(1) zulässige periodische Potenziale
= sZZ $\underbrace{\text{Periodenoffsets } p_a}_{\text{Suchraum, schwer zu finden}}$ + $\underbrace{\text{zulässiges Potenzial}}_{\text{einfach bei gegebenem } p_a}$

(2) zulässige periodische Spannungen
= sZZ Vielfache q_C von $\hat{T}$ bzgl. sZZ. Basis des Zykelraums + zulässiger Vektor x d.h. $l_a \le x_a \le u_a$

Suchraum, schwer zu finden — einfach bei gegebenem q_c

Welcher Suchraum ist besser? kleiner?

Maß für "Güte" könnte die Herleitung von unteren oberen Schranken für die p_a bzw q_c sein.

Ist $\underline{q}_c \le q_c \le \overline{q}_c$ so gilt für den Suchraum der q_c

$$\{\text{mögliche Vektoren } q\} \subseteq \prod_{c \in \mathcal{C}} [\underline{q}_c, \overline{q}_c]$$

Kreisbasis

$$\Rightarrow \quad \text{Größe Suchraum} \le \prod_{c \in \mathcal{C}} (\overline{q}_c - \underline{q}_c + 1)$$

Maß für Güte

11.1 Schranken an die q_C durch Kreisungleichungen

> **11.1 SATZ** (Odijk 94): Es gibt eine zulässige periodische Spannung x zu Kreisvielfachen q_C
> $$\iff q_C \le \frac{1}{T}\Big(\sum_{a\in C^+} u_a - \sum_{a\in C^-} l_a\Big) \text{ für jeden elementaren Kreis } C$$

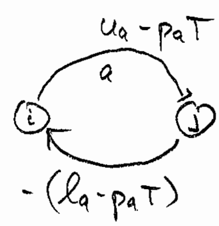
Beweis:

Sei x zulässige periodische Spannung

$\iff \exists$ Periodenoffsets p_a mit: $l_a \le x_a + p_a T \le u_a \quad \forall a \in E(G)$

$\iff x_a$ ist zulässige aperiodische Potenzialdifferenz bzgl. Restriktionen $[l_a - p_a T,\ u_a - p_a T]$ auf Kante a

$\iff$ (Satz 9.1) Digraph $\bar{G}$ mit Kantengewichten



hat keinen gerichteten Kreis negativer Länge

$\iff \sum_{a\in C^+}(u_a - p_a T) - \sum_{a\in C^-}(l_a - p_a T) \ge 0 \quad \forall$ elementaren ungerichteten Kreise von G

$\iff \sum_{a\in C^+} u_a - \sum_{a\in C^-} l_a - p^T \gamma(C)\cdot T \ge 0 \quad$ — " —

(p: Vektor der p_a)

$\iff p^T\cdot\gamma(C) \le \frac{1}{T}\Big(\sum_{a\in C^+} u_a - \sum_{a\in C^-} l_a\Big)$

bleibt zu klären: Wie verhält sich q_C zu $p^T \gamma(C)$?

$$\left.\begin{array}{l} x^T\gamma(C) \underset{\uparrow}{=} zT \quad \text{mit } z = \underbrace{\left(\sum_{a\in C^+} p_a - \sum_{a\in C^-} p_a\right)T}_{=\, p^T\gamma(C)} \\ \qquad \text{Beweis Satz 10.2 } (1) \Rightarrow (2) \\ = q_C \end{array}\right\} \Rightarrow q_C = p^T\gamma(C).$$

11.2 KOROLLAR: Die Kreisvielfachen q_C einer zulässigen periodischen Spannung erfüllen die Kreisungleichungen

$$\underbrace{\left\lceil \frac{1}{T}\left(\sum_{a\in C^+} l_a - \sum_{a\in C^-} u_a\right)\right\rceil}_{=:\, \underline{q}_C} \le q_C \le \underbrace{\left\lfloor \frac{1}{T}\left(\sum_{a\in C^+} u_a - \sum_{a\in C^-} l_a\right)\right\rfloor}_{=:\, \overline{q}_C}$$

Beweis: $q_C \le \overline{q}_C$ folgt aus Satz 11.1 und q_C ganzzahlig

Sei $\overleftarrow{C}$ der Kreis zu C mit umgekehrter Orientierung

$\Rightarrow \overleftarrow{C}^+ = C^-$, $\overleftarrow{C}^- = C^+$, $q_{\overleftarrow{C}} = -q_C$

Satz 11.1. $\Rightarrow$ $q_{\overleftarrow{C}} \le \frac{1}{T}\left(\sum_{a\in\overleftarrow{C}^+} u_a - \sum_{a\in\overleftarrow{C}^-} l_a\right)$

$$\Leftrightarrow -q_C \le \frac{1}{T}\left(\sum_{a\in C^-} u_a - \sum_{a\in C^+} l_a\right)$$

$$\Leftrightarrow q_C \ge \frac{1}{T}\left(\sum_{a\in C^+} l_a - \sum_{a\in C^-} u_a\right)$$

$$\underset{q_C \text{ ganzzahlig}}{\Rightarrow} q_C \ge \lceil \quad \ldots \quad \rceil = \underline{q}_C \qquad \square$$

11.2 Polyedertheoretische Interpretation der Kreisungleichungen

Betrachte das Polyeder

$$Q := \left\{ (\pi, p) \in \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}^m \;\middle|\; \begin{array}{l} \pi_j - \pi_i + p_a T \le u_a \\ -(\pi_j - \pi_i + p_a T) \le -l_a \end{array} \quad \forall a \in E(G) \right\}$$

= Polyeder der Form $\{ x \mid Ax \le b \}$

Sind bzgl. PESP an gzz. Hülle Q_I von Q interessiert

Wissen aus ADM II, dass Chvatal-Gomory Schnitte gültige Ungleichungen für Q_I definieren

$$\underbrace{y^T A}_{\text{gzz}} x \le \lfloor y^T b \rfloor \qquad y \ge 0$$

> **11.3 PROPOSITION:** Die Kreisungleichungen
>
> $$\underline{q}_c \le q_c = p^T \gamma(C) \le \overline{q}_c$$
>
> sind Gomory-Chvatal-Schnitte

Beweis: reicht zu zeigen für $p^T \gamma(C) \le \overline{q}_c$

entspricht Gomory-Chvatal-Schnitt $y^T A x \le \lfloor y^T b \rfloor$

mit $y^T = (y_{a_1}, y_{\bar{a}_1}, \dots, \underbrace{y_{a_m}, y_{\bar{a}_m}}) \cdot \frac{1}{T}$ für jede Kante a 2 Komponenten für die Ungleichungen $\le u_a$, $\le -l_a$

und $y_a := \begin{cases} 1 & \text{falls } a \in C^+ \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\quad y_{\bar{a}} := \begin{cases} 1 & a \in C^- \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$\Rightarrow y^T A x = \frac{1}{T}\Big(\underbrace{\sum_{a \in C^+} (\pi_j - \pi_i) - \sum_{a \in C^-} (\pi_j - \pi_i)}_{=0 \text{ entlang Kreis}}\Big) + 1 \cdot \Big(\underbrace{\sum_{a \in C^+} p_a - \sum_{a \in C^-} p_a}_{p^T \gamma(C) = q_c}\Big) \le \frac{1}{T} \Big\lfloor \sum_{a \in C^+} u_a - \sum_{a \in C^-} l_a \Big\rfloor$$

x as in $Ax \le b$ above

☐

11.4 PROPOSITION: Der Chvátal-Rang von Q ist unbeschränkt (mit wachsender Graphengröße n).
Speziell ist also $Q_I \subsetneqq Q$ + Kreis-Ungleichungen

Beweis nutzt allgemeines Resultat von Boyd & Pulleyblank 84 über Chvátal Rang und NP-Theorie:

11.5 SATZ: Sei $(P^k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine polynomial lösbare Familie rationaler Polyeder $P^k \subseteq \mathbb{R}^{n_k}$ mit n_k Variablen, so dass das Problem

Geg: k, $c \in \mathbb{Q}^{n_k}$, $\delta \in \mathbb{Q}$
Frage: ist $\max_x \{ c^T x \mid x \in P^k, \ x \text{ ganz} \} > \delta$

NP-vollständig ist. Ist dann $NP \neq coNP$, so existiert kein $t \in \mathbb{N}$ mit $(P^k)^{(t)} = (P^k)_I$ für alle $k \in \mathbb{N}$

ohne Beweis (siehe Schrijver-Buch 1986, einfach mit Sachen aus ADM II) □

Beweis Proposition 11.4: $P^k := Q^{\overset{\uparrow}{\pi} \, n \, + \, m \, \overset{\uparrow}{p}}$ $\qquad k = n+m$

$$P^k := Q^{n+m}, \quad n \leftarrow \pi, \ m \leftarrow p$$

MAX Variante von PESP NP-vollständig
$\Rightarrow$ Voraussetzungen von Satz 11.5 erfüllt
$\Rightarrow$ $\text{rang}(P^k)$ unbeschränkt □

11.1 $\boxed{\text{AUFGABE 11.1}}$: Finden einer gültigen Ungleichung für Q_I, die nicht von einer Kreisungleichung "dominiert" wird.

11.3 Kleiner Suchraum durch kurze Kreisbasen

Sei $\mathcal{B}$ eine ganzzahlige <u>Kreisbasis</u> (= Basis des Zykelraums)

Korollar 8.2 $\Rightarrow$

$$\underbrace{\left\lceil \frac{1}{T}\Big(\sum_{a\in C^+} l_a - \sum_{a\in C^-} u_a\Big)\right\rceil}_{\underline{q}_c} \le q_c \le \underbrace{\left\lfloor \frac{1}{T}\Big(\sum_{a\in C^+} u_a - \sum_{a\in C^-} l_a\Big)\right\rfloor}_{\overline{q}_c}$$

$\Rightarrow$ mögliche Werte von q_c sind $\underbrace{\underline{q}_c,\ \underline{q}_c+1, \dots, \underline{q}_c+k = \overline{q}_c}_{\overline{q}_c - \underline{q}_c + 1 \text{ Werte}}$

$\Rightarrow$ Maß für Größe des Lösungsraums ist

$$\prod_{c\in\mathcal{B}} (\overline{q}_c - \underline{q}_c + 1) \longrightarrow \text{klein}$$

$$= \prod \underbrace{\left(\frac{1}{T}\Big(\sum_{a\in C^+} u_a - \sum_{a\in C^-} l_a\Big) - \frac{1}{T}\Big(\sum_{a\in C^+} l_a - \sum_{a\in C^-} u_a\Big) + 1\right)}_{\frac{1}{T}\sum_{a\in C^+}(u_a - l_a) + \sum_{a\in C^-}(u_a - l_a) + 1} \longrightarrow \text{klein}$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{a\in C}(u_a - l_a) + 1$$

$$\overset{\wedge}{\Longleftrightarrow}_{\uparrow\,\log} \quad \underbrace{\sum_{c\in\mathcal{B}}\Big(\log \sum_{a\in C}(u_a - l_a) + 1\Big)}\ \text{klein}$$

$\hat{=}$: <u>Länge der Basis $\mathcal{B}$</u> bzgl. Kantenbewertung $u_a - l_a$ klein

also $\sum_{c\in\mathcal{B}} \sum_{a\in C} (u_a - l_a)$ klein [1 weglassen]

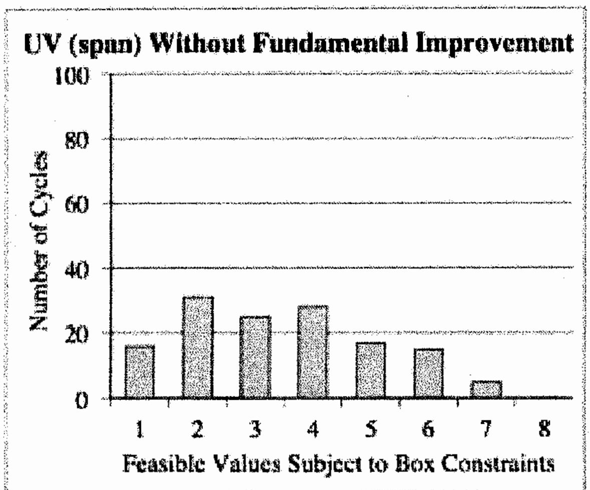
<u>Kurze Kreisbasis</u> $\hat{=}$ kleine Länge

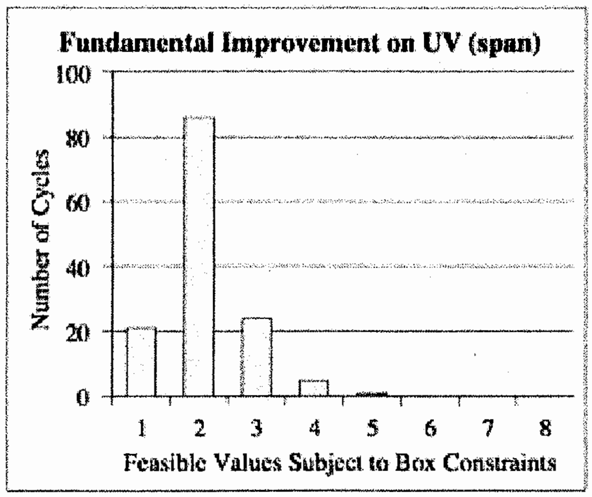
<u>minimale Kreisbasis</u> (in einer bestimmten Klasse)

= Basis mit kleinster Länge aus der Klasse

hat Einfluss auf Rechenzeit von CPLEX

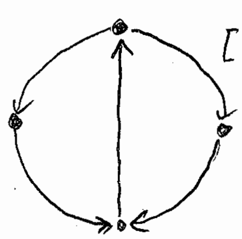
da <u>Spanne</u> $\bar{q}_c - \underline{q}_c + 1$ deutlich kleiner wird





- Rechenzeiten sinken um mehrere 100%
- Instanz lösbar wenn Größe Suchraum $\leq 10^{50}$ (Stand 2006)
- Instanz unlösbar .... $\geq 10^{90}$

<u>Beispiel</u>:



$[7,13]_{10}$ an jeder Kante

Abschätzung über Potenzialwerte: 4 Variable $\pi_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$

$\Rightarrow 10^4$ Kombinationen prüfen = 10.000

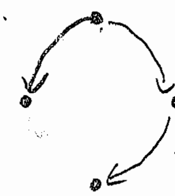
für jede Kombination pro Kante geeignetes pa suchen (leicht)

Abschätzung über Spannungen

pro Kante $x_a \in \{7, \dots, 13\}$ $\Rightarrow$ 7^5 Kombinationen $= 16.807$

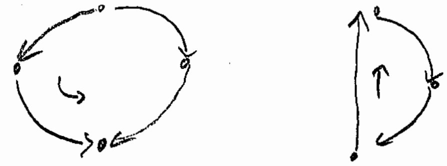
für jede Kombination pro Kante prüfen ob $\Gamma^T x = z \cdot T$ ist (leicht)

Abschätzung über Basis

a) 

7,13

T_1 Basis = Fundamentalkreise bzgl T_1



C_1 C_2

Schranken aus Kreisungleichungen

$$\underline{q}_{C_1} = \left\lceil \frac{1}{10}\left((7+7)-(13+13)\right)\right\rceil = -1$$

$$\overline{q}_{C_1} = \left\lfloor \frac{1}{10}\left((13+13)-(7+7)\right)\right\rfloor = 1$$

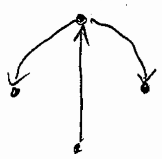
$\Rightarrow -1 \le q_{C_1} \le 1$

$$\underline{q}_{C_2} = \left\lceil \frac{1}{10}(7+7+7)\right\rceil = 3$$

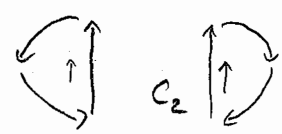
$$\overline{q}_{C_2} = \left\lfloor \frac{1}{10}(13+13+13)\right\rfloor = 3$$

$\Rightarrow q_{C_2} = 3$

$\Rightarrow$ nur 3 mögliche Lösungen!

b) 

T_2 Basis = Fundamentalkreise bzgl. T_2



C_1 C_2

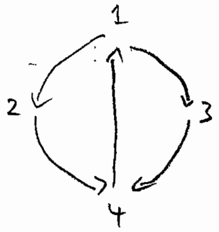
beide liefern dieselben Schranken

$$\underline{q}_{C_1} = \underline{q}_{C_2} = \left\lceil \frac{1}{10}(7+7+7)\right\rceil = 3$$

$$\overline{q}_{C_1} = \overline{q}_{C_2} = \left\lfloor \frac{1}{10}(13+13+13)\right\rfloor = 3$$

$\Rightarrow$ nur 1 Lösung

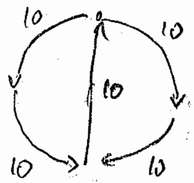
Lösung x ergibt sich aus $\Gamma^T x = T \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$



$$\begin{array}{c|ccccc} & (1,2) & (1,3) & (2,4) & (3,4) & (4,1) \\ \hline C_1 & 1 & & 1 & & 1 \\ C_2 & & 1 & & 1 & 1 \end{array} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{13} \\ x_{24} \\ x_{34} \\ x_{41} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$7 \le x_{ij} \le 13$$

z.B. erfüllt durch

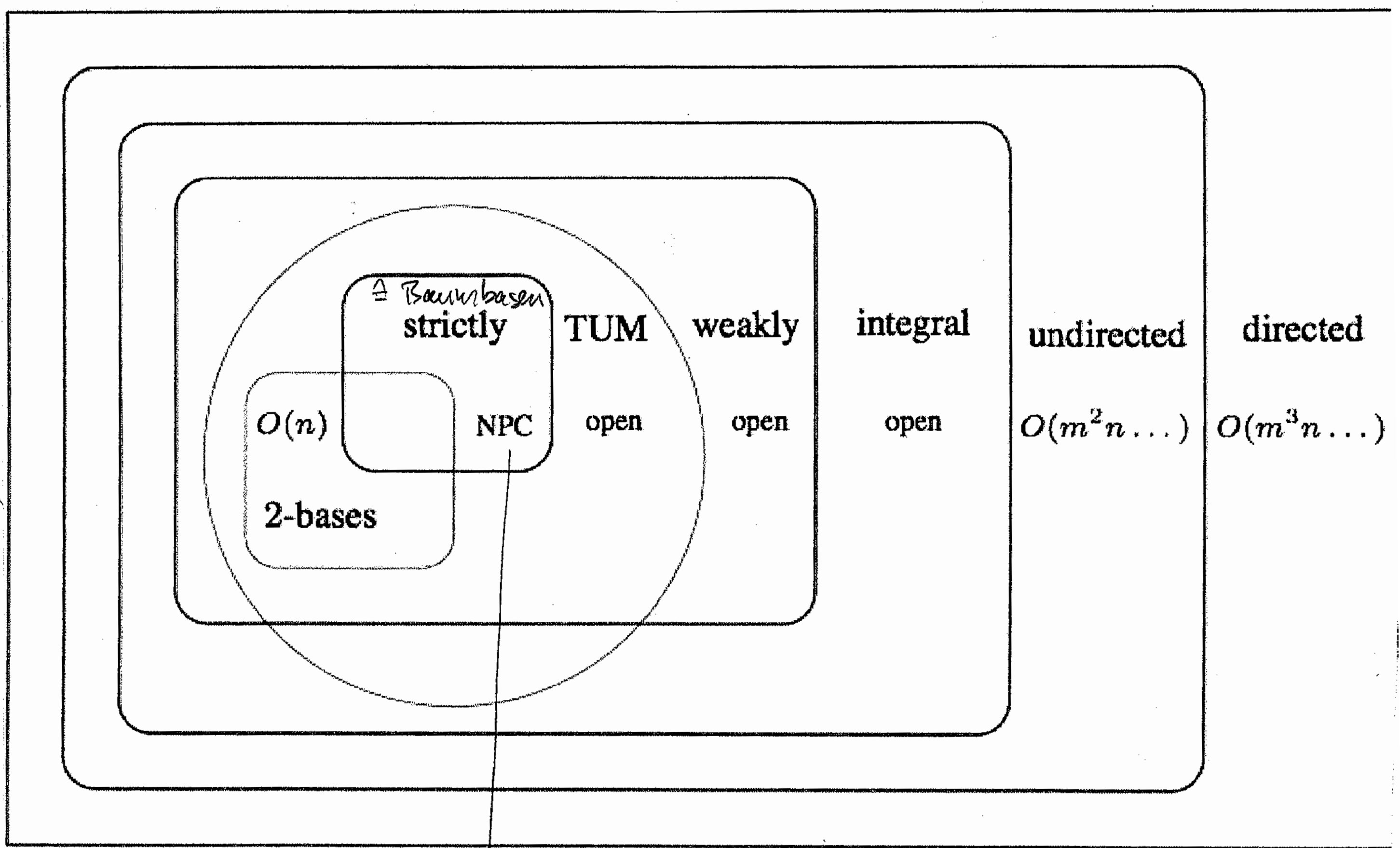


Bestes x ergibt sich aus

$\min \sum w_{ij} x_{ij}$

unter den obigen Bedingungen

Komplexität der Berechnung minimaler Basen in verschiedenen Klassen



sogar MAX-SNP-vollständig!

Für PESP daher nur Heuristiken zur Bestimmung einer "guten" kurzen Basis verwendet

z.B. • Start von Baumbasis
• iterativ Kreise durch kürzere ersetzen unter Beibehaltung der lin. Unabhängigkeit

↑
lokale Suche

11.2 Aufgabe 21: ("Elfenstadt")

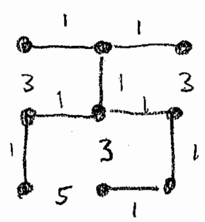
n^2 Elfen wohnen auf $n \times n$ Gitter, haben Überschwemmung
wollen sich durch Stege verbinden, so dass jedes Haus von
jedem aus erreichbar ist

Summe der Weglängen zwischen je 2 im Gitter benachbarten (Häusern)
in horizontaler und vertikaler Richtung → min

a) Bezug zu minimalen Baumbasen herstellen

b) gute Lösung für $n = 8$ finden

Bsp: $n = 3$



$\Sigma = 22$