§10 Charakterisierung periodischer Spannungen

Bisher $\min \sum_a w_a \cdot x_a$

unter $x_a = \pi_j - \pi_i \quad \forall\, a = (i,j)$

$l_a \leq x_a + p_a \cdot T \leq u_a \quad \forall\, a$

$0 \leq x_a \leq T-1$

p_a ganzz. , x_a, π_i reell

Formulierung im Potenzialraum
schlecht für Lösbarkeit mit MIP-Solvern

10.1 Formulierung im Spannungsraum

genauer: im Raum der periodischen Spannungen

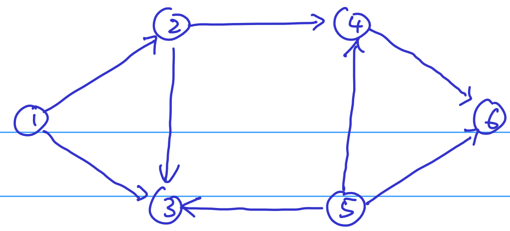
Frage: wie kann man periodische Spannungen unabhängig von periodischen Potenzialen charakterisieren?

zunächst: aperiodische Spannungen = Potenzialdifferenzen

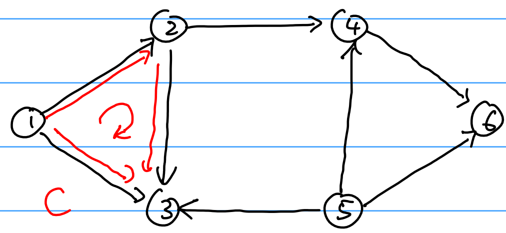
10.1 Lemma: Die Menge der aperiodischen Spannungen eines Digraphen G ist gleich dem Kozykelraum von G

Erinnerung: Zykelraum von G
= der von den Inzidenzvektoren elementarer Kreise aufgespannte Untervektorraum von $\mathbb{R}^{A(G)}$

Kozykelraum = der von den Inzidenzvektoren von Schnitten $S(X)$ aufgespannte Untervektorraum von $\mathbb{R}^{A(G)}$

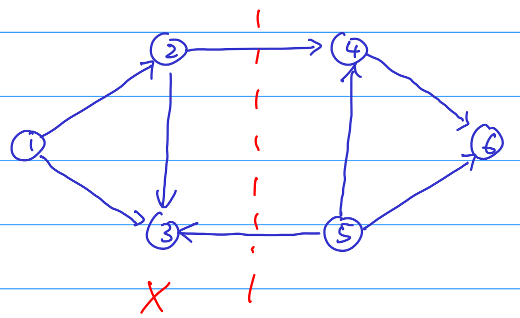
Bsp:  G

Inzidenzvektor $\xi(C)$ eines (elementaren) Zykel von G



$$\xi(C) = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right) & \begin{array}{c} (1,2) \\ (1,3) \\ (2,3) \\ (2,4) \\ (4,6) \\ (5,3) \\ (5,4) \\ (5,6) \end{array} \end{array}$$

Inzidenzvektor $\xi(\delta(X))$ eines Schnittes



$$\delta(X) = \{(2,4)\ (5,3)\}$$

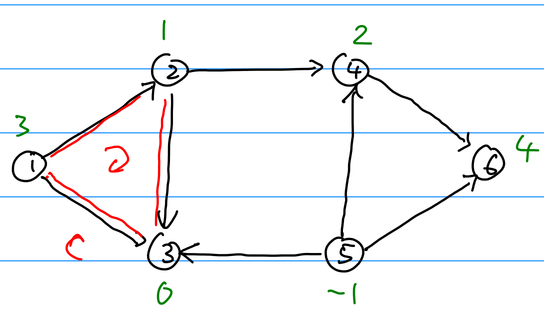
$$\xi(\delta(X)) = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ \\ (2,3) \\ \\ (5,3) \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Werden zeigen:

(A) Zykelraum und Kozykelraum sind zueinander orthogonal

(B) $\dim(\text{Zykelraum}) + \dim(\text{Kozykelraum}) = \dim(\mathbb{R}^{A(G)}) = |A(G)|$

(1) $\left.\begin{array}{l} C \text{ ein elementarer Zykel mit VK } C^+,\ \text{RK } C^- \\ \pi \text{ Potenzial} \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{(i,j)\in C^+} (\pi_j - \pi_i) - \sum_{(i,j)\in C^-} (\pi_j - \pi_i) = 0$

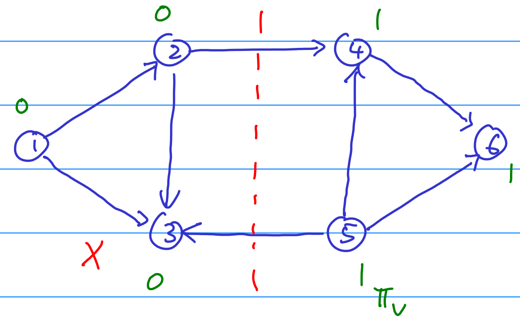


Für C entsteht:

$$\underbrace{1}_{\pi_2} - \underbrace{3}_{\pi_1} + \underbrace{0}_{\pi_3} - \underbrace{1}_{\pi_2} - (\underbrace{0}_{\pi_3} - \underbrace{3}_{\pi_1})$$

(1) $\Rightarrow$ Vektoren von Potenzialdifferenzen sind orthogonal zum Zykelraum

(2) Inzidenzvektoren von Schnitten sind Vektoren von Potenzialdifferenzen



$\Rightarrow$ Vektor der Potenzialdifferenze

= Inzidenzvektor des Schnittes $\delta(X)$

$$\pi(v) = \begin{cases} 0 & v \in X \\ 1 & v \notin X \end{cases}$$

(3) Potenzialdifferenzen bilden Vektorraum

Sei x Potenzialdifferenz zu π, y Potenzialdifferenz zu σ

$$\Rightarrow (x+y)_{(i,j)} = x_{(i,j)} + y_{(i,j)} = (\pi_j - \pi_i) + (\sigma_j - \sigma_i)$$

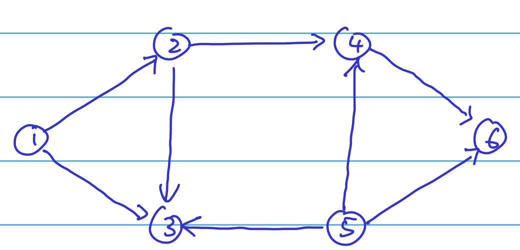
$$= (\pi_j + \sigma_j) - (\pi_i + \sigma_i) = (\pi+\sigma)_j - (\pi+\sigma)_i$$

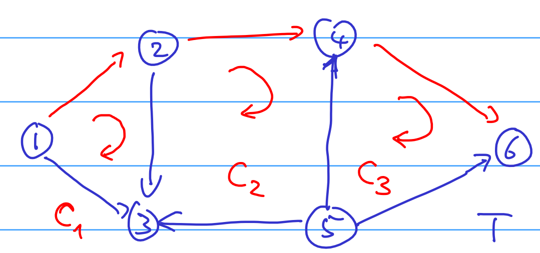
d.h. $x+y$ ist Potenzialdifferenz zu $\pi+\sigma$

entsprechend Abgeschlossenheit unter skalarer Multiplikation

(4) Sei T ein spannender Baum von G (im ungerichteten Sinne)

Dann sind die von den Nicht-Baumkanten erzeugten Kreise (Fundamentalkreise) linear unabhängig



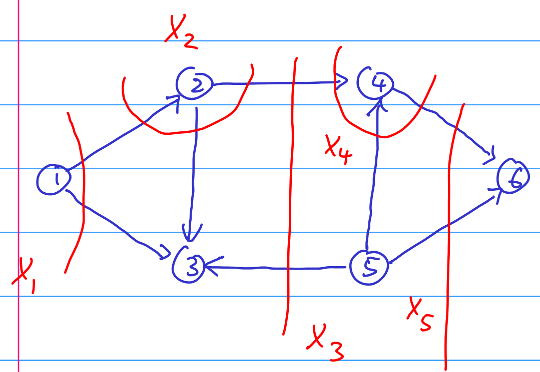


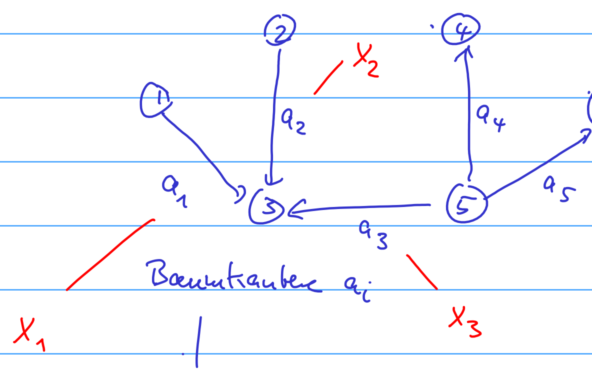
Fundamentalkreise

linear unabhängig, da jeder Inzidenzvektor eines Fundamentalkreis seine private "1" enthält ($\hat{=}$ roter Kante)

(5) Sei T ein spannender Baum von G (im ungerichteten Sinne)
Dann sind die von den Baumkanten erzeugten Schnitte $\delta(X)$ (Fundamentalschnitte) linear unabhängig

dabei ist X die Knotenmenge einer der Zusammenhangs-komponenten in $T - e$
↑ Baumkante





Baumkanten a_i
|
bestimmt Orientierung des Schnittes

linear unabhängig, da jeder Inzidenzvektor seine private "1" enthält
$\hat{=}$ Baumkante, die den Schnitt erzeugt

(6) $\dim(\text{Zykelraum}) + \dim(\text{Kozykelraum}) = \dim(\mathbb{R}^{A(G)}) = m$

$\quad\;\; \geq \qquad\qquad\qquad\quad \geq \qquad\qquad\qquad\quad \|\!\!\!>$

Nicht-Baumkanten $\qquad$ Baumkante $\qquad$ alle Kanten

Damit bilden die Fundamentalkreise zu einem Baum eine Basis des Zykelraums und die Fundamentalschnitte eine Basis des Kozykelraums und

$\dim(\text{Zykelraum}) = m - n + 1 =: \nu$ (zyklomatische Zahl)
$\dim(\text{Kozykelraums}) = n - 1$

(1), (2), (3) $\Rightarrow$ Kozykelraum $\subseteq$ Raum der Potenzialdifferenzen $\perp$ Zykelraum
$\quad$ (6) $\Rightarrow$ Raum der Potenzialdifferenzen = Kozykelraum
und wir haben (A) (B) und Lemma 1.1 gezeigt

Jetzt periodische Spannungen (= Potenzialdifferenzen von periodischen Potenzialen)
erweisen sich als "nahezu" orthogonal zum Zykelraum
werden dies verwenden um zu testen ob ein Vektor $x \in \mathbb{R}^{A(G)}$ ein periodisches Potenzial ist

10.2 SATZ (Serafini & Ukovich 89):
Sei G ein Digraph. Für $x \in \mathbb{R}^{A(G)}$ sind äquivalent

(1) x ist eine periodische Spannung zu T

(2) $x^T \gamma(C)$ ist ganzzahliges Vielfaches der Taktzeit T für jeden Kreis C von G

(3) $x^T \gamma(C)$ ist ganzzahliges Vielfaches der Taktzeit T für jeden Kreis C aus einer "Baum-Basis" des Zykelraums

↑ Fundamentalkreise zu einem spannenden Baum von G

Beweis

(1) ⇒ (2)

Sei π das periodische Potenzial zu x

$$x^T \gamma(C) = \sum_{a=(i,j)\in C^+} (\pi_j - \pi_i + p_a T) - \sum_{a=(i,j)\in C^-} (\pi_j - \pi_i + p_a T)$$

$$= \sum_{C^+} (\pi_j - \pi_i) - \sum_{C^-} (\pi_j - \pi_i) + T \underbrace{\Big(\sum_{C^+} p_a - \sum_{C^-} p_a \Big)}_{z \in \mathbb{Z}}$$

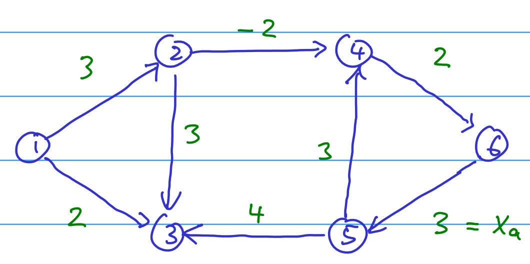
Sei $\tilde{x}$ die Potenzialdifferenz zu π

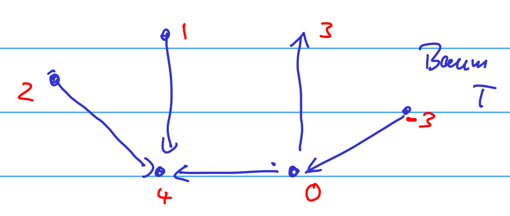
$$= \underbrace{\tilde{x}^T \gamma(C)}_{0} + z \cdot T$$

0, da $\tilde{x}$ ein aperiodische Potenzialdifferenz ist

(2) ⇒ (3) Klar

(3) ⇒ (1)





x erfüllt (3) bzgl $T=4$

Nutze Baum T zur Definition eines Potenzials auf V, so dass
$\pi_j - \pi_i = x_{ij}$ auf Baumkanten
π ist nach Wahl von π_s im Startknoten s eindeutig bestimmt

Für Nichtbaumkanten (u,v) gilt für den von (u,v) erzeugten Fundamentalkreis C

$$\sum_{\substack{a \in C^+ \\ a=(i,j)}} (\pi_j - \pi_i) - \sum_{\substack{a \in C^- \\ a=(i,j)}} \pi_j - \pi_i \overset{\uparrow}{=} 0$$

da Potenzialdiff. orthogonal zu Zykeln sind

$$\Rightarrow \quad 0 = \sum_{\substack{a \in C^+ \\ a \neq (u,v)}} (\pi_j - \pi_i) - \sum_{a \in C^-} (\pi_j - \pi_i) + (\pi_v - \pi_u)$$

$$= \underbrace{\sum_{\substack{a \in C^+ \\ a \neq (u,v)}} x_a - \sum_{a \in C^-} x_a}_{\parallel} + (\pi_v - \pi_u)$$

$$\overset{(3)}{=} \overbrace{y_C \cdot T - x_{uv}} + (\pi_v - \pi_u)$$

Vielfaches der Taktzeit für C laut (3)

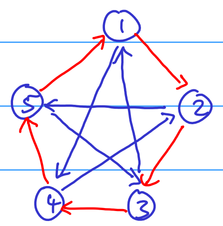
$\Rightarrow \quad x_{uv} = \pi_v - \pi_u + y_C \cdot T$
$\Rightarrow \quad x$ ist periodisches Potenzial $\square$

10.1 Aufgabe 10.1: Zeige:
zu einer zulässigen periodischen Spannung x mit Periodenoffsets p_a
gibt es eine zulässige periodische Spannung y mit Periodenoffsets q_a
und $q_a = 0$ für alle Kanten eines spannenden Baumes

$\Rightarrow$ Reduktion der Suche nach Periodenoffsets auf die $m-n+1$ Nichtbaumkanten!

Die Charakterisierung in (3) gilt nicht für beliebige Basen des Zykelraums

Bsp:

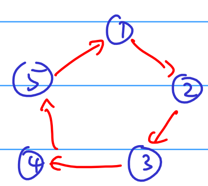


äußere 3-Zykel und der innere 5-Zykel bilden eine Basis des Zykelraums

Γ^T

	(1,2)	(2,3)	(3,4)	(4,5)	(5,1)	(3,1)	(4,2)	(5,3)	(1,4)	(2,5)
C_1	1	1				1				
C_2		1	1				1			
C_3			1	1				1		
C_4				1	1				1	
C_5	1				1					1
C_6						1	1	1	1	1

Γ = Kanten-Kreis-Inzidenzmatrix



$$= \frac{1}{2}\varrho(C_1) + \frac{1}{2}\varrho(C_2) + \ldots + \frac{1}{2}\varrho(C_6)$$

$\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) in Satz 10.2 geht verloren

da Koeff vor den $\varrho(C_i)$ nicht ganzzahlig sind

$\Downarrow$

man braucht i.A. für (3) $\Rightarrow$ (2) die Eigenschaft, dass (3) für jede ganzzahlige Basis gilt

Basis des Zykelraums, so dass jeder Kreis als ganzzahlige Linearkombination von Basiskreisen darstellbar ist

10.3 Folgerung (Liebchen & Peters 2003)
Satz 10.2 bleibt gültig, wenn Eigenschaft (3) für Kreise jeder ganzzahligen Basis erfüllt ist

Beweis: $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)^{\text{neu}}$ wie bisher

Zeige: $(3)^{\text{neu}} \Rightarrow (3)^{\text{alt}} \underset{\text{wie bisher}}{\Rightarrow} (1)$

hierzu: Sei C Kreis einer Baumbasis

$$\Rightarrow \rho(C) = \sum_k \lambda_k \, \rho(C_k)$$

λ_k: ganzz., da Basis ganzzahlig

C_k: Kreise aus ganzzahliger Basis

$$\Rightarrow x^T \rho(C) = \sum_k \lambda_k \underbrace{x^T \rho(C_k)}_{= z_k \cdot T} \quad \text{wegen } (3)^{\text{neu}}$$

$$= \Big(\underbrace{\sum_k \lambda_k \cdot z_k}_{\text{gzz}}\Big) T \qquad \square$$

Frage: Kann man ganzzahlige Basen charakterisieren
(im Sinne eines einfachen Tests ob eine Basis ganzzahlig ist)

Dazu Definition der Zykelmatrix Γ einer Basis des Zykelraums
= Kanten-Basiskreise-Inzidenzmatrix

$$\Gamma = \begin{array}{c|cccccc|} & C_1 & C_2 & \cdots & C_j & \cdots & C_\nu \\ \hline a_1 & & & & & & \\ a_2 & & & & & & \\ \vdots & & & & \rho(C_j) & & \\ a_m & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

$\rho(C_j)$ bzgl. der Reihenfolge $a_1 \ldots a_m$ der Kanten

10.4 Lemma: Seien Γ_1, Γ_2 zwei nicht-singuläre $\nu \times \nu$ Teilmatrizen von Γ.
Dann gilt $\det \Gamma_1 = \pm \det \Gamma_2$

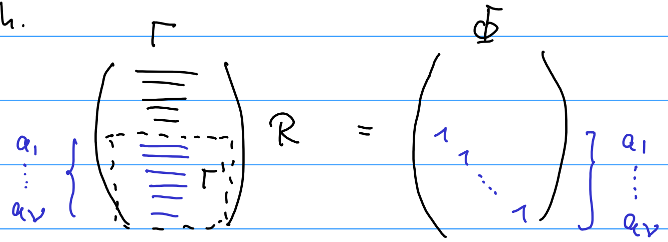
d.h. Zykelmatrix ist unimodular

Beweis:

(1) Eine Teilmenge Γ' von ν Zeilen von Γ ist (maximal) linear unabhängig
$\Longleftrightarrow$ die entsprechenden Kanten sind Nichtbaumkanten eines spannenden Baumes

"$\Leftarrow$" Sei T spann. Baum von G und seien $a_1, \ldots, a_\nu$ die Nichtbaumkanten.
Sei Φ die Kanten-Fundamentalkreis-Matrix bzgl. T
$\Rightarrow$ Φ ist Zykelmatrix der Baum Basis
Γ is Zykelmatrix der gegebenen Basis
$\Rightarrow$ $\exists$ $\nu \times \nu$ Matrix R mit $\Gamma R = \Phi$ (R nicht-singulär)
$\uparrow$
beschreibt Linkomb der Kreise aus Φ durch Kreise aus Γ

Teilmatrix von Φ zu $a_1, \ldots, a_\nu$ ist Einheitsvektor (nach geeigneter Permution)
d.h.



$\Rightarrow$ $\Gamma' R = I$ $\Rightarrow$ $\Gamma' = R^{-1}$ $\Rightarrow$ Γ' nicht singular
nicht singular

"$\Rightarrow$" Ann. die $n-1$ Zeilen nicht in Γ' enthalten einen Kreis C

$\Rightarrow$ $\varrho(C)$ eindeutig als LK der Kreise aus Γ darstellbar

$\Rightarrow$ $\exists$ Vektor λ_C mit $\Gamma \cdot \lambda_C = \varrho(C)$

Streiche in Γ und $\varrho(C)$ die Kanten aus C $\longrightarrow$ Γ^0, $\varrho(C)^0$

$\Rightarrow$ $\Gamma \cdot \lambda_C = \varrho(C)$ wird zu $\Gamma^0 \cdot \lambda_C = \varrho(C)^0 = \mathcal{O}$

$\Gamma^0 \supseteq \Gamma'$ $\Rightarrow$ λ_C kombiniert die Spalten aus Γ' zu $\mathcal{O}$

Widerspruch zur lin. Unab. der Zeilen von Γ'

(2) $\boxed{\det \Gamma_1 = \pm \det \Gamma_2 \text{ für 2 maximal linear unabh. Kantenwahlen } \Gamma_1, \Gamma_2}$

(1) $\Rightarrow$ Zeilen aus $\Gamma_1 \stackrel{\wedge}{=}$ Nichtbaumkanten eines spannenden Baumes T_1

Sei $\underline{\Phi}_1$ $\underbrace{\text{Kanten-Fundamentalkreis-Matrix}}_{\text{sind vollst. unimodular nach Satz aus ADM II (neu)}}$ von T_1

10.2 und $\boxed{\underline{\Phi}_1 \cdot \Gamma_1 = \Gamma}$ Aufgabe 10.2

Betrachte in $\underline{\Phi}_1$ und Γ nur die Zeilen aus Γ_2 $\longrightarrow$ $\underline{\Phi}_1^0$, Γ^0

$\Rightarrow$ $\underline{\Phi}_1^0 \cdot \Gamma_1 = \Gamma^0 = \Gamma_2$

$\det \underline{\Phi}_1^0 = \pm 1$, Γ_1, Γ_2 nicht singulär $\Rightarrow$ $\det \Gamma_1 = \pm \det \Gamma_2$ $\square$

$\uparrow$

Zeilenwahl lin. ubh.

$\underline{\Phi}_1$ vollst. unimodular

Wegen Lemma 10.4 ist folgende Definition sinnvoll:

Sei $\mathcal{C}$ eine Menge von ν Kreisen von G

Sei $\Gamma_{\mathcal{C}}$ die Kanten-Kreis-Inzidenzmatrix von $\mathcal{C}$

Dann heißt $\underline{\det \mathcal{C}} := |\det \Gamma'|$ mit Γ' entsteht aus Γ durch Streichen von Baumkanten eines bel. spann. Baumes von G

die **Determinante** von $\mathcal{C}$

10.5 Folgerung: $\mathcal{C}$ ist Basis des Zykelraums
$\iff \det \mathcal{C} \in \mathbb{Z}_+$

Beweis:

$\det \mathcal{C} \in \mathbb{Z}_+ \iff \det \mathcal{C} \neq 0 \iff \Gamma'$ ist nicht-singulär
$\iff$ Spalten von Γ' sind lin. unabh.
$\iff \underbrace{\text{Spalten von } \Gamma}$ sind lin. unabh.
$\iff$ Kreise von $\mathcal{C}$ lin. abh.

$\Leftarrow$ nutzt dass alle Einträge von Γ' aus $\{0,1,-1\}$ sind $\square$

10.6 SATZ (Liebchen 2003)
$\mathcal{C}$ ist eine ganzzahlige Basis des Zykelraums $\iff \det \mathcal{C} = 1$

Beweis:

aus LinA ist bekannt $\boxed{\det(B) = 1 \text{ für gzz Matrix } B \iff B^{-1} \text{ gzz}}$ (1)

Sei C ein beliebiger Kreis von G,
sei λ_C der Vektor der Koeffizienten in der Lin. komb. bzgl. Basis $\mathcal{C}$
d.h. $\Gamma_{\mathcal{C}} \cdot \lambda_C = \varphi(C)$

überbestimmtes Gleichungssystem zur Bestimmung von λ_C

Reicht zu lösen für ν lin unabhängige Zeilen $\to \Gamma_{\mathcal{C}}^{\circ}$
Nehme dazu die Nichtbaumkanten eines spannenden Baumes T
$\Rightarrow \Gamma_{\mathcal{C}}^{\circ} \lambda_C = \varphi(C)^{\circ}$ (2)

"$\Rightarrow$" Sei $\mathcal{C}$ gzz Basis $\overset{10.5}{\Rightarrow} |\det \Gamma_{\mathcal{C}}^{\circ}| \in \mathbb{Z}_+$ und λ_C gzz
Betrachte Kreis C der durch eine Nichtbaumkante a_j von T erzeugt wird

$\overset{(2)}{\Rightarrow}$ $\lambda_c = (\Gamma_\varphi^0)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ← Zeile j für Kante a_j

⇒ Spalte $(\Gamma_\varphi^{-1})_{\text{Spalte}_j}$ ist gzz, da λ_c gzz

⇒ (gilt für alle j) ⇒ Γ_φ^{-1} gzz

$\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $\det \varphi = 1$

"⇐" Sei $\det \varphi = 1$ ⇒ (Cramersche Regel) $(\lambda_c)_j = \dfrac{\det(\Gamma_\varphi^0)^j}{\det \Gamma_\varphi^0}$ gzz

ganz.

± 1

⇒ λ_c ist ganzzahlig □

Diese Erkenntnisse führen zu neuer MIP-Formulierung für das PESP basierend auf

$$\Gamma^T x = T \cdot q$$

Zykelmatrix der Basis transponiert

$x \in \mathbb{R}^m$

Taktzeit

gzz. Vielfachen der Basiskreise q_C sind gzz. Werte

Gleichung entspricht Bed (3)$^{\text{neu}}$ aus Satz 10.2 und garantiert dass x eine periodische Spannung ist

Kanten

Basiskreise C $\quad \boxed{\quad \Gamma^T \quad}$ $\begin{pmatrix} \text{Kanten} \end{pmatrix}_x = T \cdot \begin{pmatrix} q_C \end{pmatrix}$ ganze Zahl für jeden Kreis C der Basis

MIP auf Basis der Kreisvariablen q_C

$$\min \sum_a w_a x_a$$

unter $\Gamma^T x = T \cdot q$ ← sichert, dass x periodische Spannung ist

$l \leq x \leq u$ ← sichert Zulässigkeit von x

q gzz

10.7 Lemma: Ist q bekannt, so ergibt sich x hieraus in polynomialer Zeit und x ist ebenfalls ganzzahlig

Beweis: Sei q gzz und bekannt

$\Rightarrow$ x wird bestimmt durch Lösung des LP

$$\min \sum_a w_a x_a$$
$$\text{unter } \Gamma^T x = T \cdot q$$
$$l_a \leq x_a \leq u_a \quad \forall a$$

polynomial (z.B. innere Punkte Methode oder einfachere Methoden bei speziellen Basen)

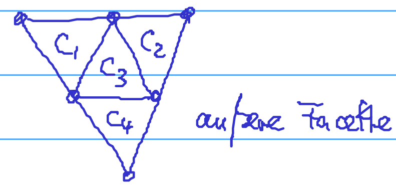
$\left.\begin{array}{l} \det \Gamma = 1 \\ T, q \text{ gzz} \end{array}\right\} \Rightarrow$ (Cramer) x gzz $\square$

10.8 SATZ: Die folgenden Kreismengen sind gzz. Basen

(1) die Fundamentalkreise bzgl. eines spannenden Baumes "Fundamentale Kreisbasen"

(2) jede Menge von ν Kreisen $C_1, C_2, \ldots, C_\nu$ mit der Eigenschaft $C_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} C_i \neq \emptyset$ "schwach fundamentale Kreisbasen"

(3) Die Menge der Facetten (außer der äußeren) eines planaren Graphen "2-Basis"



10.3 Aufgabe 10.3

Beweis Satz 10.8 + Überlegung wie man für diese Basen das Gleichungssystem $\Gamma^T x = \Gamma q$ nach x löst (wenn q bekannt)