§ 10 Charakterisierung periodischer Potenziale

Bisher: $\min \sum w_a x_a$

unter $x_a = \pi_j - \pi_i \quad \forall a = (i,j)$

$l_a \leq x_a + p_a T \leq u_a \quad \forall a$

$0 \leq x_a \leq T-1$

p_a ganzzahlig x_a, π_i reell

Formulierung in Knotenvariablen π_i und Periodenoffsets p_a mit Kantenvariablen x_a als Hilfsgrößen

= $\boxed{\text{Formulierung im Potenzialraum}}$

diese ist schlecht für Lösbarkeit mit MIP-Solver

10.1 $\boxed{\text{Formulierung im Spannungsraum}}$

↑

genauer: Raum der periodischen Spannungen

Frage: wie kann man periodische Spannungen unabhängig von periodischen Potenzialdifferenzen charakterisieren?

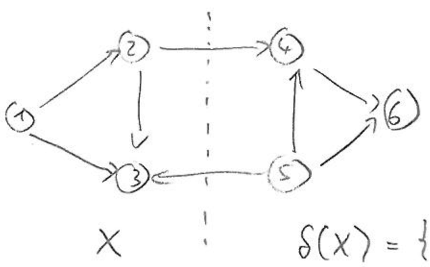
zunächst: aperiodische Spannung = Potenzialdifferenzen

> **10.1 LEMMA:** Die Menge der aperiodischen Spannungen eines Digraphen G ist gleich dem Kozykelraum von G

Zur Erinnerung an ADM I

Zykelraum = der von den Inzidenzvektoren elementarer Kreise aufgespannte Untervektorraum von $\mathbb{R}^{E(G)}$

Kozykelraum = der von den Inzidenzvektoren von Schnitten $\delta(X)$ aufgespannte Untervektorraum von $\mathbb{R}^{E(G)}$



X

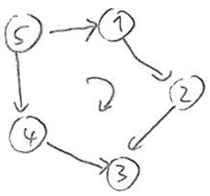
$$\delta(X) = \{(2,4),\ (5,3)\} \rightarrow \xi(\delta(X)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow (\\ \leftarrow (5,3) \\ \\ \\ \end{array}$$

Zykelraum und Kozykelraum sind orthogonal zueinander und $\dim(\text{Zykelraum}) + \dim(\text{Kozykelraum}) = \dim(\mathbb{R}^E)$

Beweis Lemma 10.1:

(1): C ungerichteter Kreis mit VK C^+, RK C^-, π Potential $\Big\} \Rightarrow \sum_{(i,j)\in C^+} (\pi_j - \pi_i) - \sum_{(i,j)\in C^-} (\pi_j - \pi_i) = 0$

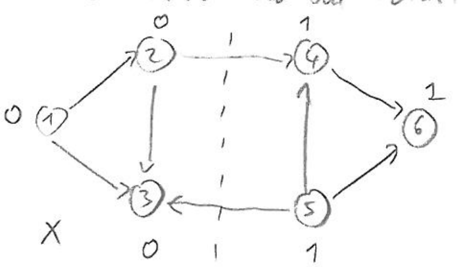
Klar:



$$\Rightarrow (\pi_2 - \pi_1) + (\pi_3 - \pi_2) - (\pi_3 - \pi_4) - (\pi_4 - \pi_5) + (\pi_1 - \pi_5) = 0$$

(1) $\Rightarrow$ Vektoren von Potenzialdifferenzen sind orthogonal zum Zykelraum

(2): Inzidenzvektoren von Schnitten sind Potenzialdifferenzen



X

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow (2,4) \\ \\ \leftarrow (5,3) \\ \\ \\ \end{array}$$

(3): Potenzialdifferenzen bilden einen Vektorraum

Sei x Potenzialdifferenz zu π und y Potenzialdifferenz zu σ

$$\Rightarrow (x+y)_{ij} = x_{ij} + y_{ij} = (\pi_j - \pi_i) + (\sigma_j - \sigma_i) = (\pi+\sigma)_j - (\pi+\sigma)_i$$

$\Rightarrow$ $x+y$ ist Potenzialdifferenz zu $\pi+\sigma$

entsprechend: λx ist Potenzialdifferenz zu $\lambda\pi$

da $(\lambda x)_{ij} = \lambda x_{ij} = \lambda(\pi_j - \pi_i) = (\lambda\pi)_j - (\lambda\pi)_i$

(1), (2), (3) $\Rightarrow$ Menge der Potenzialdifferenzen = Kozykelraum von G

T spannender Baum von G $\Rightarrow$ Fundamentalkreise bilden Basis des Zykelraums
Fundamentalschnitte -"- Kozykelraums

da dim(Zykelraum) + dim(Kozykelraum) = dim($\mathbb{R}^E$) $\square$

jetzt periodische Spannungen (=: Potenzialdifferenzen periodische Potenziale)
erweisen sich als "nahezu" orthogonal zum Zykelraum

10.2 SATZ (Serafini & Ukovich 89): Sei G ein Digraph. Für $x \in \mathbb{R}^{E(G)}$ sind folgende Bedingungen äquivalent.

(1) x ist eine periodische Spannung zu T

(2) $x^T \cdot \xi(C)$ ist ganzzahliges Vielfaches der Taktzeit T für jeden Kreis C von G

(3) $x^T \xi(C)$ ist ganzzahliges Vielfaches der Taktzeit T für jeden Kreis C aus einer "Baum-Basis" des Zykelraums

Fundamentalkreise eines spannenden Baumes von G

Beweis:

(1) $\Rightarrow$ (2): Sei π das periodische Potenzial zu x

$$\Rightarrow x^T \cdot \xi(C) = \sum_{a=(i,j)\in C^+} (\pi_j - \pi_i + p_a \cdot T) - \sum_{a=(i,j)\in C^-} (\pi_j - \pi_i + p_a \cdot T) = \bar{x}^T \cdot \xi(C) + zT$$

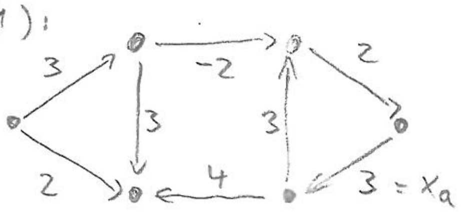
mit $\bar{x}$ = Potenzialdifferenz zu π und $z = \sum_{a \in C^+} p_a - \sum_{a \in C^-} p_a$

$$\Rightarrow \quad x^T \cdot \varrho(C) = \underbrace{\bar{x}^T \cdot \varrho(C)}_{0} + z \cdot T$$

0, da Potenzialdifferenzen orthogonal zu Zykeln sind

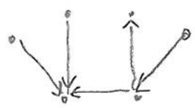
(2) $\Rightarrow$ (3): trivial

(3) $\Rightarrow$ (1):

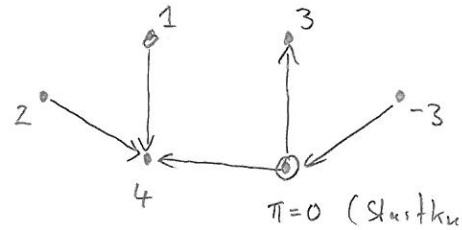


x erfüllt (3) bzgl $T = 4$

und Baum



Nutze Baum T zur Definition eines Potenzials π auf V, so dass $\pi_j - \pi_i = x_{ij}$ auf Baumkanten gilt (π ist nach Wahl von π_s in Startknoten s eindeutig bestimmt)



Für Nichtbaumkanten (u,v) gilt

$$\sum_{a \in C^+} (\pi_j - \pi_i) - \sum_{a \in C^-} (\pi_j - \pi_i) = 0$$

für den von (u,v) erzeugten Fundamentalkreis C (Orthogonalität)

$$\Rightarrow \quad 0 = \sum_{\substack{a \in C^+ \\ a \neq (u,v)}} (\pi_j - \pi_i) - \sum_{a \in C^-} \pi_j - \pi_i + (\pi_v - \pi_u) =$$

$$= \sum_{\substack{a \in C^+ \\ a \neq (u,v)}} x_a - \sum_{a \in C^-} x_a + \pi_v - \pi_u$$

$$\overset{(3)}{=} \underset{\uparrow}{y_C} \cdot T - x_{uv} + \pi_v - \pi_u$$

Vielfaches für den Fundamentalkreis C laut (3)

$\Rightarrow \quad x_{uv} = \pi_v - \pi_u + y_c T$

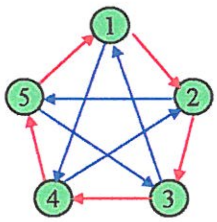
$\Rightarrow$ x ist periodisches Potenzial □

10.1 Aufgabe 10.1: Zu einer zulässigen periodischen Spannung x mit Periodenoffsets p_a gibt es eine zulässige periodische Spannung y mit Periodenoffsets q_a und $q_a = 0$ für alle Baumkanten

$\Rightarrow$ Reduktion der Suche von Periodenoffsets auf die $m - n + 1$ Nichtbaumkanten!

Die Charakterisierung in (3) gilt nicht für beliebige Basen

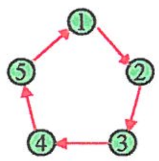
Characterization is not true for arbitrary basis



Outer 3-cycles and inner 5-cycle form a basis
Matrix Γ of incidence vectors is

	(1,2)	(2,3)	(3,4)	(4,5)	(5,1)	(3,1)	(4,2)	(5,3)	(1,4)	(2,5)
C_1	1	1				1				
C_2		1	1				1			
C_3			1	1				1		
C_4				1	1				1	
C_5	1				1					1
C_6						1	1	1	1	1

$= \Gamma^T$



$$= \frac{1}{2}C_1 + \frac{1}{2}C_2 + \frac{1}{2}C_3 + \frac{1}{2}C_4 + \frac{1}{2}C_5 - \frac{1}{2}C_6$$

Example by B. Gerards

Beispiel zeigt, dass (3) $\Rightarrow$ (2) verloren geht

$\Rightarrow$ man braucht (3) für <u>ganzzahlige Basis</u>

= Basis des Zykelraums aus Kreisen, so dass jeder Kreis als ganzzahlige Linearkombination von Basiskreisen darstellbar ist

10.3 FOLGERUNG (Liebchen & Peeters 03): Satz 10.2 bleibt gültig, wenn Eigenschaft (3) für Kreise einer ganzzahligen Basis erfüllt ist

Beweis: (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) wie bisher

(3) für gzz. Basis $\Rightarrow$ (3) für Baum Basis $\overset{\text{wie bisher}}{\Rightarrow}$ (1)

denn: sei C Kreis aus Baumbasis

$$\Rightarrow C = \sum_k \lambda_k \, \xi(C_k)$$

Kreise aus gzz Basis

gzz Koeffizienten

$$\Rightarrow x^T \xi(C) = \sum_k \lambda_k \underbrace{x^T \xi(C_k)}_{= z_k \cdot T} \qquad z_k \text{ gzz wegen (3)}$$

$$= \underbrace{\left(\sum \lambda_k z_k\right)}_{\text{gzz}} T \qquad \square$$

Frage: Kann man ganzzahlige Basen charakterisieren?

Dazu: Definition der <u>Zykelmatrix Γ</u> einer Basis des Zykelraums

= Kanten-Basiskreise Inzidenzmatrix

$$\begin{array}{c|ccc} & C_1 & \dots & C_\nu \\ \hline a_1 & & & \\ \vdots & & \xi(C_j) & \\ a_m & & & \end{array} \qquad \nu = m - n + 1$$

10.4 LEMMA: Seien Γ_1, Γ_2 zwei nichtsinguläre $\nu \times \nu$ Teilmatrizen von Γ. Dann gilt $\det \Gamma_1 = \pm \det \Gamma_2$

Beweis:

(1) $\boxed{\text{Eine Teilmenge } \Gamma' \text{ von } \nu \text{ Zeilen von } \Gamma \text{ ist maximal \underline{linear unabhängig}} \iff \text{die entsprechenden Kanten sind \underline{Nichtbaumkanten} eines spannenden Baumes}}$

$\Leftarrow$ Sei T ein spannender Baum und $a_1, \dots, a_\nu$ die Nichtbaumkanten.

Sei Φ die Kanten – Fundamentalkreis Matrix bzgl. T

$\Rightarrow \exists$ $\nu \times \nu$ - Matrix R mit $\Gamma R = \Phi$ (Linearkomb. der Kreise in Φ aus Kreisen in Γ)

Teilmatrix von Φ zu $a_1, \dots, a_\nu$ ist Einheitsmatrix (nach geeigneter Permutation)

d.h.

$$\begin{array}{c c} & \Gamma \\ \Gamma' := \begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_\nu \end{array} & \begin{pmatrix} \equiv \\ \equiv \\ \equiv \end{pmatrix} \end{array} R = \begin{array}{c c} \Phi & \\ \begin{pmatrix} \equiv \\ 1 \\ \quad 1 \\ \quad\quad \ddots \\ \quad\quad\quad 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} a_1 \\ \vdots \\ a_\nu \end{array} \end{array}$$

$\Rightarrow \Gamma' R = I \quad \Rightarrow R = (\Gamma')^{-1} \quad \Rightarrow \Gamma'$ nicht singulär

$\Rightarrow$ ν Zeilen von Γ' sind (maximal) lin. unabhängig

$\Rightarrow$ Ann. die $n-1$ Zeilen nicht in Γ' enthalten einen Kreis C

$\Rightarrow \varsigma(C)$ eindeutig als $\underbrace{\text{LK}}_{\text{nichttriviale}}$ der Kreise aus Γ darstellbar

$\Rightarrow \exists$ Vektor λ_C mit $\Gamma \cdot \lambda_C = \varsigma(C)$

Streiche in Γ und $\varsigma(C)$ die Kanten aus C $\to \Gamma^0, \varsigma(C)^0$

$\Rightarrow \Gamma \cdot \lambda_C = \varsigma(C)$ wird zu $\Gamma^0 \cdot \lambda_C = \varsigma(C)^0 = 0$

$\Gamma^0 \supseteq \Gamma'$

$\Rightarrow \lambda_C$ kombiniert die Spalten aus Γ' zu 0

Widerspruch zu lin. Unabh. von Γ'

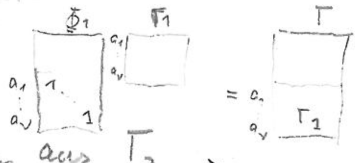
(2) $\boxed{\det \Gamma_1 = \pm \det \Gamma_2}$ für 2 maximal lin. unabh. Kantenwahlen Γ_1, Γ_2

(1) $\Rightarrow$ Zeilen aus $\Gamma_1 \stackrel{\wedge}{=}$ Nichtbaumkanten eines spann. Baumes T_1

Sei Φ_1 <u>Kanten-Fundamentalkreis-Matrix</u> bzgl T_1

> diese Matrizen sind vollständig unimodular
>
> ADM II neu

10.2 $\Phi_1 \cdot \Gamma_1 = \Gamma$ Aufgabe 10.2



Betrachte in Φ_1 und Γ nur die Zeilen aus T_2 $\rightarrow \Phi_1^0$

$\Rightarrow \Phi_1^0 \, \Gamma_1 = \Gamma_2$

$\det \Phi_1^0 = \pm 1$ da Φ_1 vollst. unimod $\underbrace{}_{\text{und } \Gamma_1, \Gamma_2 \text{ nichtsingulär}}$ $\Rightarrow \det \Gamma_2 = \pm \det \Gamma_1$ □

wegen Lemma 10.4 ist folgende Definition sinnvoll

Sei $\mathcal{C}$ eine Menge von ν Kreisen von G und sei $\Gamma_{\mathcal{C}}$ die Kanten-Kreis-Inzidenzmatrix zu $\mathcal{C}$. Dann heißt

$\det \mathcal{C} := |\det \Gamma'|$ und Γ' entsteht aus Γ durch Streichen von Zeilen zu einem (beliebigen) spannenden Baum von G

die <u>Determinante von $\mathcal{C}$</u>

> **10.5 FOLGERUNG:** $\mathcal{C}$ ist eine Basis des Zyklenraums
> $\iff \det \mathcal{C} \in \mathbb{Z}_+$

Beweis "$\Leftarrow$" $\det \mathcal{C} \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow \det \mathcal{C} \neq 0 \Rightarrow \Gamma'$ nicht singulär

$\Rightarrow$ Spalten von Γ' lin unabh

$\Rightarrow$ Spalten von Γ = Kreise lin. unabh. □

"$\Rightarrow$" Umkehrung der obigen Schlüsse $\Rightarrow \det \mathcal{C} \neq 0$

Γ' gzz $\Rightarrow |\det \Gamma'| \in \mathbb{Z}_+$ □

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{10.6 SATZ (Liebchen 03):} \\ \mathcal{C} \text{ ist eine ganzzahlige Basis} \iff \det \mathcal{C} = 1\end{array}}$$

Beweis:

Aus LinA bekannt: $\boxed{|\det B| = 1 \text{ für gzz Matrix } B \iff B^{-1} \text{ gzz}}$ (1)

$\uparrow$

unimodulare Matrizen

Sei C ein beliebiger Kreis von G, sei λ_C der Vektor der Koeffiziente in der Lin.komb. bzgl. Basis $\mathcal{C}$, d.h. $\Gamma_{\mathcal{C}} \cdot \lambda_C = \gamma(C)$

$\nearrow$

überbestimmtes Gleichungssystem
m Zeilen, ν Spalten u. Variablen

Reicht zu lösen für ν lin. unabh. Zeilen

Nehme dafür die Nichtbaumkanten $a_1, \ldots, a_\nu$ bzgl. spann. Baum T

$$\Rightarrow \quad \Gamma_{\mathcal{C}}^0 \lambda_C = \gamma(C)^0 \qquad (2)$$

"$\Rightarrow$" Sei $\mathcal{C}$ gzz $\overset{10.5}{\Rightarrow} |\det \Gamma_{\mathcal{C}}^0| \in \mathbb{Z}_+$ und λ_C gzz

Betrachte Kreis C der durch (Nichtbaumkante) a_j erzeugt wird $\Rightarrow \gamma(C)^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow a_j$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{gzz}}}{\lambda_C} = \Gamma_{\mathcal{C}^0}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left(\Gamma_{\mathcal{C}}^{-1}\right)_{\text{Spalte } j} \text{ ist gzz}$$

dies gilt für alle j $\Rightarrow \Gamma_{\mathcal{C}}^{-1}$ gzz $\overset{(1)}{\Rightarrow} |\det \Gamma_{\mathcal{C}}| = 1$

$$\Rightarrow \det \mathcal{C} = 1$$

"$\Leftarrow$" Sei $\det \mathcal{C} = 1$ $\Rightarrow$ (Cramersche Regel) $(\lambda_C)_j = \dfrac{\det (\Gamma_{\mathcal{C}}^0)^j}{\det \Gamma_{\mathcal{C}}^0}$ gzz $\square$

Diese Erkenntnisse führen zu neuer MIP-Formulierung

Basiert auf Zusammenhang

$$\Gamma^T x = T \cdot q$$

Matrix der Basis transponiert

$x \in \mathbb{R}^E$

Taktfahrzeit

gzz Vielfache für jeden Kreis der Basis d.h. $q \in \mathbb{Z}^\nu$

$$\begin{array}{cc} & \text{Kanten} \\ \begin{array}{c}\text{Basis} \\ \text{Kreise}\end{array} & \boxed{\quad \Gamma \quad} \end{array} \begin{pmatrix} \\ \text{Kanten} \\ \\ \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} \vdots \\ q_c \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Vielfache der Basiskreise, q_c sind gzz. Variable

brauchen gzz Basis

Gleichung entspricht Bed (3) aus Satz 10.2 und garantiert, dass x eine periodische Spannung ist

MIP auf Basis von Kreisvariablen q_c:

$$\min \sum_a w_a \cdot x_a$$

unter
$$\Gamma^T x = T \cdot q$$
$$l \leq x \leq u$$
$$q \text{ gzz}$$

10.7 LEMMA Ist q bekannt, so ergibt sich x hieraus in polynomialer Zeit und x ist ebenfalls gzz.

Beweis: Sei q gzz und fest

$\Rightarrow$ x wird bestimmt durch Lösung des LP $\min \sum_a w_a x_a$ unter

$\Gamma^T x = T \cdot q$, $\quad l_a \leq x_a \leq u_a$

$\Rightarrow$ polynomial (z.B. innere Punkte Methode oder einfache Methode bei speziellen Basen)

$$\left.\begin{array}{l} \det T = 1 \\ T, q \text{ gzz} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{(Cramer)} \quad x \text{ gzz} \qquad \square$$

Fragen:

1. Was sind "gute" Basen für dieses MIP $\rightarrow$ §11

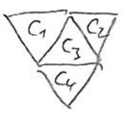
2. Wie sieht die Landschaft der gzz. Basen aus?

10.8 SATZ Die folgenden Kreismengen sind gzz. Basen:

(1) die Fundamentalkreise bzgl. eines spannenden Baumes
"<u>Fundamentale Kreisbasen</u>"

(2) Jede Menge von ν Kreisen $C_1, C_2, \ldots, C_\nu$ mit der Eigenschaft $C_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} C_i \neq \emptyset$
"<u>schwache Fundamentale Kreisbasen</u>"

(3) Die Menge der Facetten (außer der äußeren) eines planaren Graphen
"<u>2-Basis</u>"



Beweis + Überlegung wie man für diese Basen das Gleichungssystem $\Gamma^T x = Tq$ nach x löst

10.3 = $\boxed{\text{Aufgabe 10.3}}$