

III Periodic Event Scheduling und Taktfaktoroptimierung

§9 Das Periodic Event Scheduling Problem (PESP)

Motivation aus Taktfaktorplanung

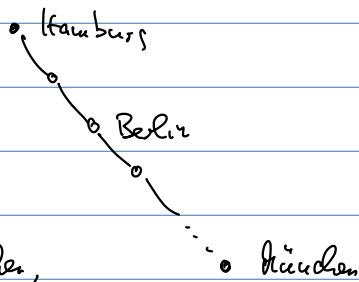
- haben Linien

≙ Folge von Stationen

(+ technisch wichtige

Punkte, wie Weiden,

Kreuzungen--)

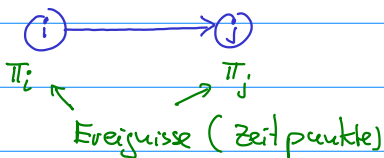


sind gegeben

- Suchen: Ankomst- und Abfahrzeiten an - Bahnhöfen
- anderen wichtigen Punkten
- so dass zeitliche Nebenbedingungen eingehalten werden
- der Fahrplan sich periodisch wiederholt
- und eine Zielfunktion minimiert (z.B. gesamte Anstiegszeit)

9.1 Kern des mathematischen Modells = PESP

Abschnitte entlang einer gerichteten Linie = Kanten eines Digraphen



zeitliche Bedingung an Zeitspanne

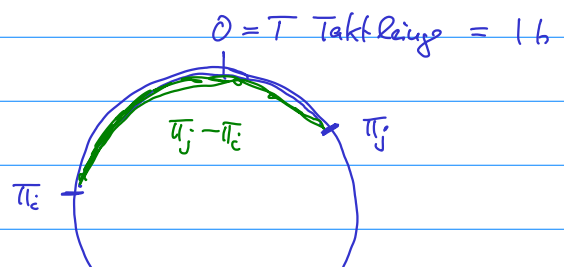
zwischen π_i und π_j :

$$l_{ij} \leq \pi_j - \pi_i + p_{ij}T \leq u_{ij}$$

soll in Taktintervall $[0, T]$

fallen

wird durch ganzzahliges Vielfaches der Taktzeit T modelliert



Zeitable ist Kreis, führt auf Modulo-Rechnung
in IP dann zu ganzzahligen Variablen p_{ij}

Graphentheoretisch

zulässiges Potenzialproblem, aperiodischer Fall

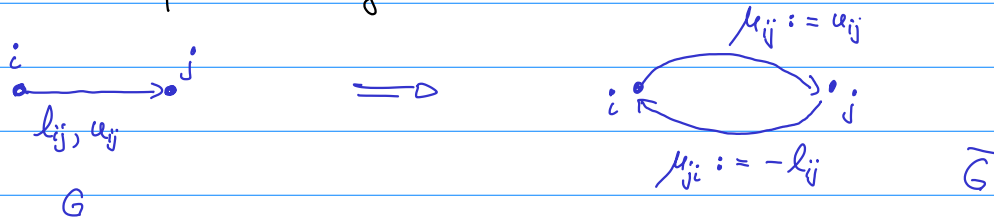
Gegeben: Digraph G

Schranken $l_{ij} \leq u_{ij}$ für jede Kante (i,j)

Gesucht: Potenzial π mit $\pi_j - \pi_i \in [l_{ij}, u_{ij}]$ "zulässiges Potenzial"

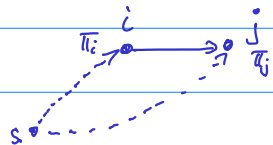
↓

reduzierbar auf kürzeste Wege Problem



Claim: π ist zulässig in $G \iff \pi_j - \pi_i \leq \mu_{ij}$ für alle Kanten (i,j) in \bar{G} (*)

↑
"kürzeste Wege Ungleichung"



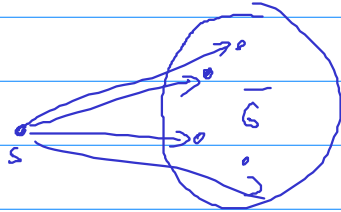
π zulässig in $G \iff l_{ij} \leq \pi_j - \pi_i \leq u_{ij} \quad \forall (i,j)$

$\iff \pi_j - \pi_i \leq u_{ij} \quad \text{und} \quad \pi_i - \pi_j \leq -l_{ij}$



$\iff \pi$ erfüllt (*)

9.1 SATZ: (1) (*) ist erfüllt $\Leftrightarrow \bar{G}$ hat keine Zykkel negativer Länge
 (2) Ist (*) erfüllt, so erhält man ein zulässiges Potenzial π auf folgende Weise:



- a) führe Kanten s mit Kanten zu jedem Knoten v in \bar{G} ein mit Länge 0
- b) $\pi(v) :=$ kürzeste Weglänge von s zu v

9.1 Beweis = Aufgabe 9.1

zulässiges Potenzialproblem, periodischer Fall mit Taktzeit T

periodisches Potenzial mit Taktzeit T

ist eine Zahl π_i für jeden Knoten i

mit $\pi_i \in \{\pi_i^0, \pi_i^0 \pm T, \pi_i^0 \pm 2T, \dots\}$ und $\pi_i^0 \in \{0, 1, \dots, T-1\}$

zulässiges periodisches Potenzial bzgl. T, l_{ij}, u_{ij}

ist ein periodisches Potenzial mit

$$l_{ij} \leq \pi_j - \pi_i \leq u_{ij} \quad \forall \text{ Kanten } (i,j)$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \swarrow \\ \pi_j^0 + k_j \cdot T & \pi_i^0 + k_i \cdot T \end{matrix} \quad k_i, k_j \text{ geeignet gewählt}$$

\Rightarrow Bedingung äquivalent zu

$$l_{ij} \leq \pi_j^0 - \pi_i^0 + p_{ij} \cdot T \leq u_{ij} \quad \text{mit } p_{ij} \text{ ganzzahlig } \forall (i,j)$$

Wir schreiben auch $\pi_j - \pi_i \in [l_{ij}, u_{ij}]_T$ "modulo Rechnung"

Periodic Event Scheduling Problem (PESP)

Gegeben: Digraph G mit Kantenrestriktionen $[l_{ij}, u_{ij}]$, Taktzeit T

Gesucht: zulässiges periodisches Potenzial bzgl. $[l_{ij}, u_{ij}]$, T

Beobachtung:

(1) jedes zulässige (aperiodische) Potenzial ist auch periodisch zulässig

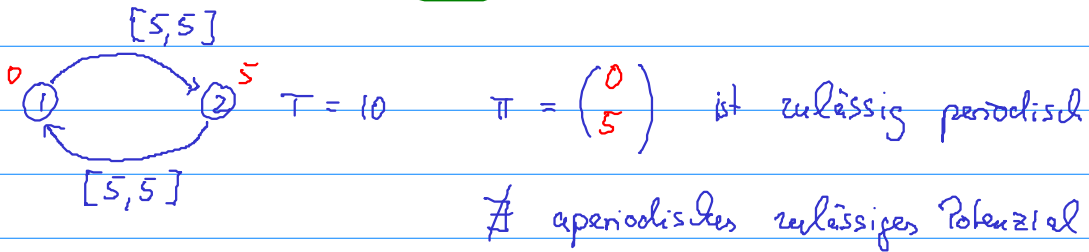
denn: π zulässig bzgl. $[l_{ij}, u_{ij}]$

$$\Rightarrow l_{ij} \leq \pi_j - \pi_i \leq u_{ij} \quad \forall \text{ Kanten } (i, j)$$

$$\Rightarrow l_{ij} \leq \pi_j^0 - \pi_i^0 + p_{ij} \cdot T \leq u_{ij} \quad \text{für } p_{ij} = 0$$

$\Rightarrow \pi$ ist zul. periodisches Potenzial

(2) Die Umkehrung gilt nicht



(3) zulässiges periodisches Potenzial = zulässiges Potenzial + "Periodenoffsets" p_{ij}

↑
einfach, wenn die p_{ij} gegeben sind

$$l_{ij} \leq \pi_j - \pi_i + p_{ij} T \leq u_{ij} \Leftrightarrow l_{ij} - p_{ij} T \leq \pi_j - \pi_i \leq u_{ij} - p_{ij} T$$

↑
feste Zahl
da p_{ij} gegeben

aperiodisches Potenzialproblem

Alternative Formulierung des FESP über

Spannungen $x_{ij} = \text{Potentialdifferenzen } \pi_j - \pi_i$

↑
Kantenvariable

↑
Knotenvariable

periodische Spannung = Spannung erzeugt als Potentialdifferenzen eines periodischen Potenzial

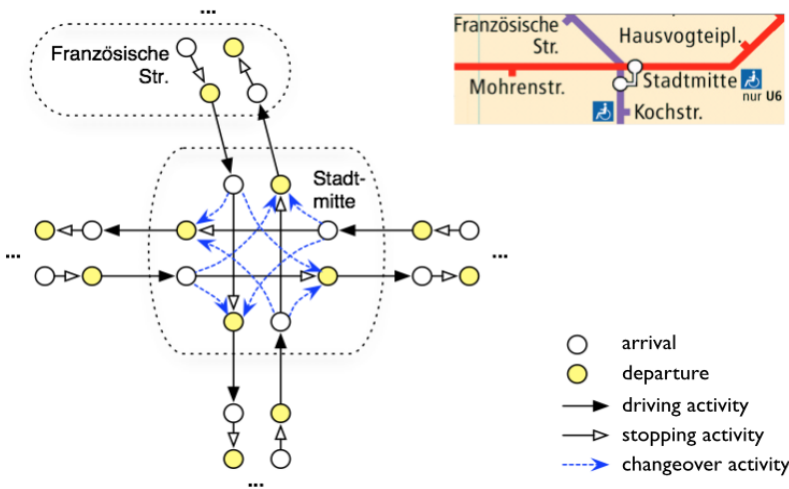
zulässige periodische Spannung x erfüllt

$$l_a \leq x_a + p_a T \leq u_a \quad \forall \text{ Kanten } a$$

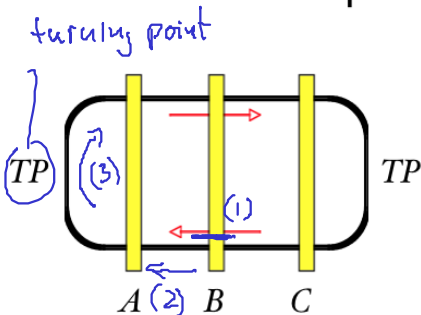
Später mehr dazu, wie man (ohne Knotenvariable π_i) einem Vektor x ansieht ob er eine periodische (und zulässige) Spannung ist

9.2 Modellierungsmöglichkeiten mit dem PESD

From the line plan to the graph model



Example: a single line



stopping condition in B (1)

$$\pi_{\text{dep in B}} - \pi_{\text{arr in B}} \in [2, 4]_T$$

xx:59 arr in B

xx:02 dep in B

$$T = 60$$

(2) travel condition

$$\pi_{\text{arr in A}} - \pi_{\text{dep in B}} \in [11, 11]_T$$

xx:48 dep in B

xx:59 arr in A

turning condition at TP (3)

$$\pi_{\text{arr in A}} - \pi_{\text{dep in A}} \in [5, 10]_T$$

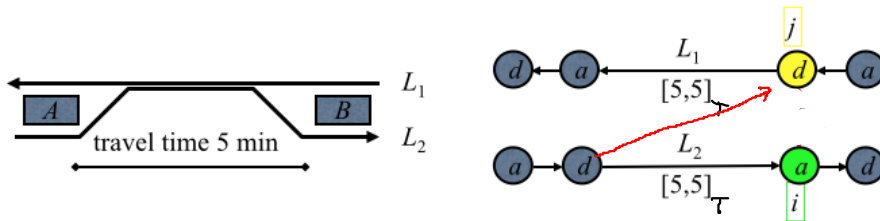
xx:02 dep in A

xx:10 arr in A

Eingleisige Streckenabschnitte

Example: Temporal conditions on a single track

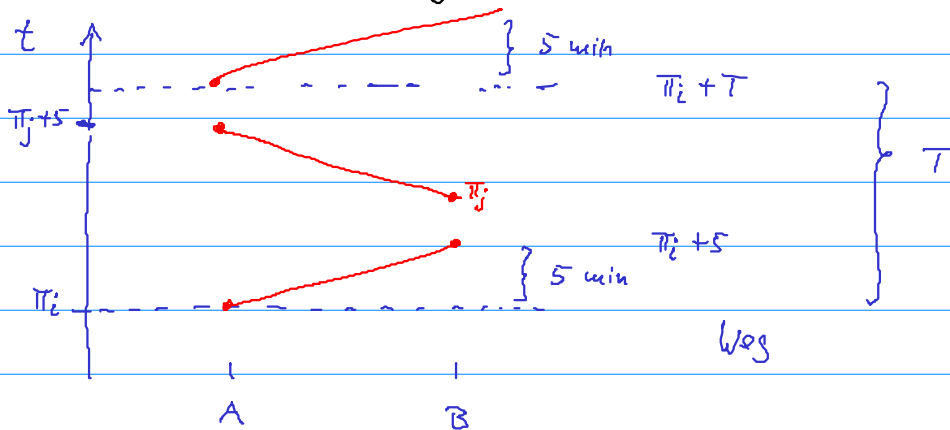
$$T \geq 10$$



$[5, T-5]$ models one-track conditions:

Begründung:

Betrachte Weg-Zeit-Diagramm

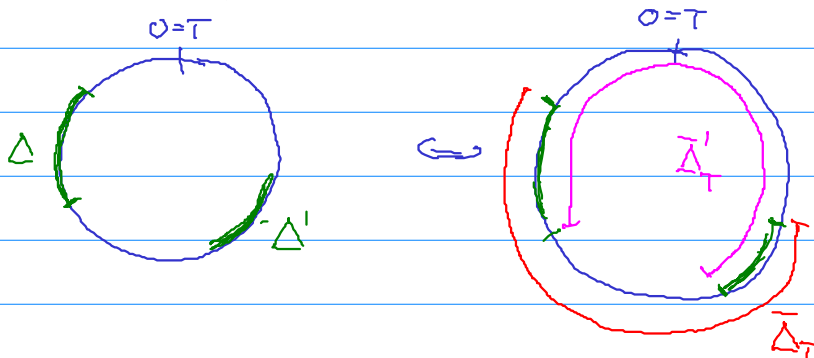


$$\begin{aligned} \pi_j &\geq \pi_i + 5 & \pi_i + T &\geq \pi_j + 5 & \geq \pi_i + 10 \\ \Rightarrow \pi_j - \pi_i &\geq 5 & , & \pi_j - \pi_i &\leq T - 5 & \Rightarrow \pi_j - \pi_i \in [5, T-5]_T \end{aligned}$$

Umkehrung entsprechend

Disjunktive Bedingungen

$$\pi_j - \pi_i \in \Delta_T \text{ oder } \pi_j - \pi_i \in \Delta'_T \quad \Delta, \Delta' \text{ verschiedene Intervalle}$$



$$\text{hier } \pi_j - \pi_i \in \bar{\Delta}_T \cap \bar{\Delta}'_T$$

$$\Leftrightarrow \pi_j - \pi_i \text{ in } \bar{\Delta}_T \text{ und in } \bar{\Delta}'_T$$

starke Modellierungsmöglichkeit durch Disjunktionen
 → deutet auf NP-Vollständigkeit

More complex conditions

- ▶ Single tracks used in both directions
- ▶ Safety distance between successive trains (headway)
- ▶ Coupling to other traffic systems
- ▶ Coordinated servicing of central transfer points
- ▶ ...

all can be modeled by a digraph with conditions

$$x_{ij} \in [\ell_{ij}, u_{ij}]_T \text{ at the arcs } (i, j)$$

Modeling the PESP as MIP

Linear objective $\sum w_{ij} x_{ij}$

- ▶ Sum of changeover times
- ▶ Time spent at turning points (rolling stock)
- ▶ Routing of rolling stock (line changes at endpoints)
- ▶ Penalties for weak side constraints

Have side constraints for every arc $a = (i, j)$

$$x_a = \pi_j - \pi_i$$

$$\ell_a \leq x_a + p_a \cdot T \leq u_a$$

$$0 \leq x_a \leq T - 1$$

$$p_a \text{ integer}$$

Integer LP in
 variables x_a and p_a

Long distance trains in Germany

- ▶ Extremely difficult for CPLEX without “enhancements”
- ▶ 10 pairs of ICE/IC trains, 40 most important connections
- ▶ Led to addition of 2 new instances to MIPLIB

- timetab1
- timetab2

Quantity	timetab1	timetab2
Original Digraph		
Nodes	4604	5344
Arcs	5053	5859
Run/stop arcs	4582	5318
safety arcs	225	265
Contracted Digraph		
Nodes	56	88
Arcs	226	381
- with $d_{ij} = T - 1$	72	164
- with $d_{ij} \geq 0.9 \cdot T$	153	253
- with $d_{ij} \leq 0.1 \cdot T$	41	70
average span	77.76%	79.19%

erst 2009 in Diplomarbeit in ≤ 24 h gelöst unter Verwendung von zusätzlichen problemspezifischen Schrittebenen
erst 2012 in CPLEX lösbar mit sehr großer Rechenzeit

9.3 Komplexität des PESP

Das aperiodische zulässige Potenzialproblem ist in P
(folgt aus Satz 9.1)

9.2 SATZ: Das periodische zulässige Potenzialproblem ist stark NP-schwer, selbst für festes $T \geq 3$

Nachtrag 96

Beweis: Reduktion von k -Färbbarkeit von Graphen $k \geq 3$

Gegeben: ungerichteter Graph $G = (V, E)$

Frage: kann G mit k Farben gefärbt werden

Betrachte Instanz von k -Färbbarkeit: Graph G

Konstruiere PESP-Instanz wie folgt:

$D = \text{Digraph}$, der aus G durch beliebige Orientierung der Kanten entsteht
 $a \in A(D) \rightarrow [l_a, u_a] := [1, T-1]$ mit $T := k$

Dann gilt:

π ist zulässiges periodisches Potenzial

$$\Leftrightarrow 1 \leq \pi_j - \pi_i + p_a T \leq T-1 \quad \forall \text{ Kanten } a = (i, j)$$

$$\Leftrightarrow \pi_i \not\equiv \pi_j \pmod{T} \quad -4-$$

$\Leftrightarrow \pi_i \pmod{T}$ definiert eine Färbung von G \square

Der Kern der NP-Vollständigkeit ist das Finden der Periodenoffsets p_a
Bei gegebenem p_a reduziert es sich auf ein aperiodisches Potenzialproblem.

Dann ist auch das MIP leicht und kann als LP gelöst werden

Ebenso gilt für MAX-T-PESP ein entsprechendes Komplexitätsergebnis

Gegeben: Digraph G mit l_a, u_a für jede Kante, $T \in \mathbb{N}$

Gesucht: Potenzial π mit

$$l_a \leq \pi_j - \pi_i + p_a \cdot T \leq u_a \quad \forall a \in A' \subseteq A$$

mit $|A'|$ so groß wie möglich

9.3 SATZ: MAX-T-PESP ist für jedes $T \geq 2$
MAXSNP-vollständig

Beweis: Durch L-Reduktion von MAX-2-COLORING \square