§7 Dynamische Multicommodity-Fluss-Probleme mit konstanten Fahrzeiten und Kantenkosten

Komplexitätslandschaft von statischen/dynamischen Flussproblemen

	s,t Fluss	transshipment	min-cost	schnellster Mehrgüterfluss
statisch	polynomiell		poly	poly (LP)
dynamisch	polyn. statischer min cost flow	poly min. submodular Fkt	pseudopol. NP-schwer	pseudopolyn. (LP) NP-schwer

Ford-Fulkerson 1958

Hoppe & Tardos 2000

Klinz & Woeginger 1995

FPTAS Fleischer & Skutella 2002/3

Hier nur: 2-Approximation für quickest multi-commodity

Gegeben: Digraph G mit Quelle-Senke Paaren (s_i, t_i), Demand d_i
Kantenzeiten τ_a Kantenkosten c_a Kantenkapazitäten u_a, Kostenschranke c

Gesucht: beste Zeit T in der aller Demand durch einen dyn. Fluss von den s_i zu den t_i geroutet werden kann und Kosten $\leq c$ hat

Pseudopolynomial lösbar durch Zeitexpansion

Für Approximation betrachte <u>statischen Durchschnittsfluss</u> x zu dynamischen Fluss f mit Zeithorizont T
def. durch $\quad x_a := \frac{1}{T} \int_0^T f_a(\theta)\, d(\theta)$

7.1 LEMMA: x erfüllt die Kapazitätsbedingungen und Flusserhaltung (d.h. x ist statischer Fluss)

Ferner gilt: $\text{value}(x) = \frac{1}{T}\,\text{value}(f) \qquad c(x) = \frac{1}{T}\,c(f)$

Beweis: $f_a(\theta) \leq u_a \quad \forall\, \theta$

$$\Rightarrow \quad x_a \overset{\text{Def}}{=} \frac{1}{T}\int_0^T f_a(\theta)\,d\theta \leq \frac{1}{T}\int_0^T u_a\,d\theta = \frac{1}{T}\cdot T\cdot u_a = u_a$$

$\Rightarrow$ x_a respektiert die Kantenkapazität

Flusserhaltung: Am Ende von T muss Flusserhaltung bei f mit "=" erfüllt sein

$$\Rightarrow \sum_{a\in\delta^-(v)} \underbrace{\int_0^T f(\theta-\tau_a)\,d\theta}_{T\cdot x_a} = \sum_{a\in\delta^+(v)} \underbrace{\int_0^T f(\theta)\,d\theta}_{T\cdot x_a}$$

Flusswert: analog zur Flusserhaltung: $\text{value}(f) = T\cdot\text{value}(x)$

Kosten: $$c(f) \overset{\text{Def}}{=} \sum_{a\in A}\int_0^T f_a(\theta)\cdot c_a\,d\theta = \sum_{a\in A} c_a\,T\,x_a = T\cdot c(x) \qquad \square$$

7.2 LEMMA: Der statische Durchschnittsfluss x zu f mit Zeithorizont T ist längenbeschränkt mit Schranke T, d.h. es gibt eine Pfadzerlegung von x für jedes (s_i, t_i) mit $\tau_p \leq T$ für alle Pfade der Zerlegung

Beweis: Nutze die Wege bzgl. f, diese erfüllen $\tau_p \leq T$ $\square$

Algorithmus zur Approximation eines <u>schnellsten</u> Multi-Commodity Flusses, der die Demands erfüllt und die Kostenschranke einhält

hier wird approximiert,
Approx. Güte für Zeithorizont, hier 2

(1) Errate den optimalen Zeithorizont T^* für (2) [Binäre Suche]

(2) Berechne einen T^*-längenbeschränkten statischen Multicommodity Fluss $(x_p)_{p\in\mathcal{P}}$ mit $\text{value}_i(x) = \frac{1}{T^*}\,d_i \qquad c(x) \leq \frac{1}{T^*}\,c$

(später, wie)

(3) Konstruiere aus x einen dynamischen Fluss f
indem entlang $P \in \mathcal{P}$ ein zeitlich wiederholter Fluss mit
Rate x_P im Zeitraum $[0, T^*[$ losgeschickt wird

(4) Warte, bis aller Fluss von f in den Senken angekommen ist
($\Rightarrow$ Zeithorizont $\leq 2T^*$)

7.3 SATZ Fleischer & Skutella '02
f ist ein dynamischer (zeitlich wiederholter) Fluss mit Zeithorizont $\leq 2 \cdot T^*$,
der alle Demands erfüllt und Kosten $\leq c$ hat

Beweis: Flusserhaltung, Kapazitätsbed klar (wie in §6)
Keine Speicherung von Fluss in Knoten

$$\text{value}_i(f) = \sum_{P \in \mathcal{P}_i} T^* \cdot x_P = T^* \cdot \sum_{P \in \mathcal{P}_i} x_P = T^* \,\text{value}_i(x) = d_i$$

für Knotenpaar (s_i, t_i)

$$c(f) = \sum_{P \in \mathcal{P}} c_P \, x_P \, T^* = \sum_{P \in \mathcal{P}} \Big(\sum_{a \in P} c_a \Big) T^* \cdot x_P$$

$$= T^* \sum_{a \in A} c_a \underbrace{\sum_{P \ni a} x_P}_{x_a} = T^* \cdot \sum_{a \in A} c_a \, x_a = T^* \cdot c(x) \leq c \qquad \square$$

Offener Punkt: Konstruktion des T^*-längenbeschränkten Flusses $\overbrace{\text{in}}^{\text{mit Kosten } \leq c}$ Schritt (2)
bzw. Feststellung, dass keiner existiert (vgl. der binären Suche
nach T^*)

ist schwach NP-vollständig, enthält CSP als Spezialfall

ABER: es gibt ein FPTAS wie für CSP

d.h. Falls es einen T-längenbeschränkten statischen Fluss x mit Kosten $c(x)$ gibt, so kann man einen $(T+\varepsilon)$-längenbeschränkten statischen Fluss x' konstruieren mit Kosten $c(x') \leq c(x)$ in polynomieller Zeit in der Inputgröße und $\frac{1}{\varepsilon}$

Idee: Formuliere das Finden eines T-längenbeschränkten Flusses x als LP in Pfadvariablen

$\Rightarrow$ das duale Separierungsproblem ist ein CSP

nutze Äquivalenz zwischen Separierung und Optimierung aus ADM II

7.1 AUFGABE 7.1

Volles PTAS für das Ausgangsproblem durch Kondensation des zeitexpandierten Netzwerkes, d.h. Skalierung, so dass T/Δ polynomial ist, Fahrzeiten τ_a/Δ werden gerundet.

Löse statisches Flussproblem im kondensierten Graphen (polynomial).

Konstruiere aus dem statischen Fluss so wie oben einen dynamischen Fluss mit ursprünglichen Fahrzeiten

schwierig, da gerundete Fahrzeiten beim statischen Fluss verwendet wurden

muss "glätten" um Kapazitäten einzuhalten

7.4 SATZ (Fleischer & Skutella 03)

Wählt man $\Delta := \varepsilon^2 T/n$, so erhält man ein kondensiertes zeitexpandiertes Netzwerk mit n/ε^2 Zeitscheiben, das $(1+\varepsilon)$-approximative schnellste Mehrgüterflüsse mit beschränkten Kosten liefert

Quintessenz: Dynamik kostet den Faktor $|V|/\varepsilon^2$ bzgl. Netzwerkgröße bei der Berechnung