II Dynamische Flüsse

§6 Dynamische s,t-Flüsse mit konstanten Fahrzeiten

bisher: Rush Hour ≙ statischer Fluss

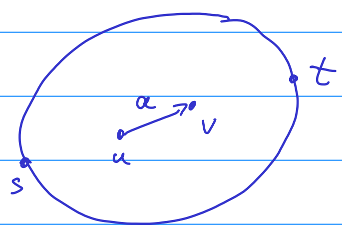
d.h. auf ganzem Weg konstante Flussrate f_P

für einen gewissen Zeitraum

Modell nicht mehr zutreffend außerhalb der Rush Hour

$\Rightarrow$ müssen zeitliche Verhalten von Flüssen mit modellieren

6.1 Maximale s,t Flüsse bei konstanten Fahrzeiten



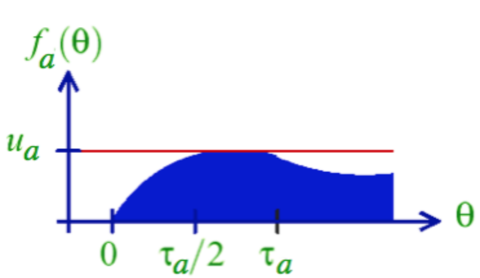
Kante a hat Kapazität $u_a \in \mathbb{N}$

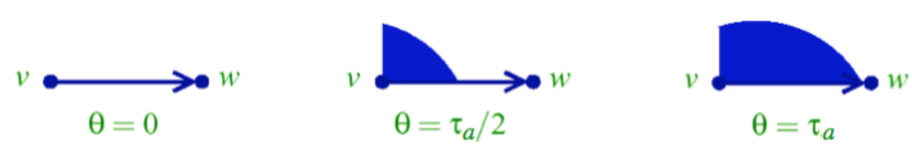
Zeit $\tau_a \in \mathbb{N}$

↑ Zeit um Kante a zu durchfahren

zusätzlich Zeithorizont T gegeben

- A *flow over time* f with *time horizon* T is given by functions $f_a : [0,T) \to \mathbb{R}_+$ for all arcs $a \in A$
  - f_a is the flow rate into arc a
  - it is bounded by the capacity u_a of arc a



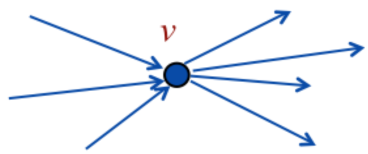


umgekehrtes Bild des Einflusses

zur Zeit $\Theta \geq \tau_a$ kommt $f_a(\Theta - \tau_a)$ am Kopf der Kante a an

- flow conservation holds strictly/weakly at any time θ

$$\sum_{a\in\delta^-(v)} \int_{\tau_a}^{\theta} f_a(\xi - \tau_a)d\xi \;\geq\; \sum_{a\in\delta^+(v)} \int_0^{\theta} f_a(\xi)d\xi$$



Einfluss bis Θ

$\geq$ Ausfluss bis Θ

in jedem Knoten v

If ">" holds at some time, flow is *stored* at node v

- Objective: send as much flow as possible within time horizon T

= Nettoausfluss aus s = Nettoeinfluss in t

$$\text{value}(f) := \underbrace{\sum_{a\in\delta^+(s)} \int_0^T f_a(\xi)\,d\xi - \sum_{a\in\delta^-(s)} \int_{\tau_a}^T f_a(\xi - \tau_a)\,d\xi}_{\text{Nettoausfluss aus } s \text{ über } [0,T]}$$

$\Downarrow$

<u>Maximales dynamisches s,t-Fluss Problem</u>

Gegeben: Digraph $G = (V,A)$, $s,t \in V$, u_a, τ_a, Zeithorizont T

Gesucht: dynamischer s,t-Fluss f in $[0,T]$ mit maximalem Flusswert value(f)

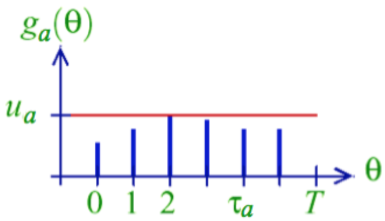
6.2 Diskrete vs. stetige Zeit

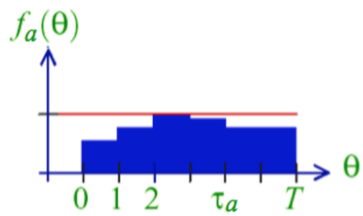
bisherige Def. nutzt stetige Zeit

diskrete Zeit $\hat{=}$ sende Fluss nur zu Zeitpunkten $0,1,2,3,\ldots$

Observation [Fleischer & Tardos 1998]

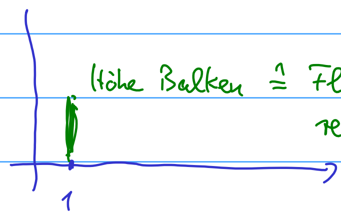
Every discrete flow over time g can be interpreted as a continuous flow over time f and vice versa



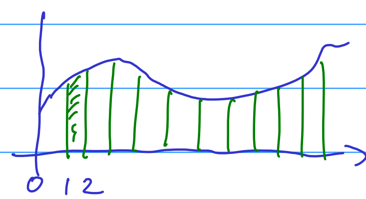


Balken ≙ Flussmenge zu Zeitpkt 0,1,2 $\Rightarrow$ stetiger Fluss

$\Leftarrow$ Umkehrung geht auch



Höhe Balken ≙ Fläche rechts

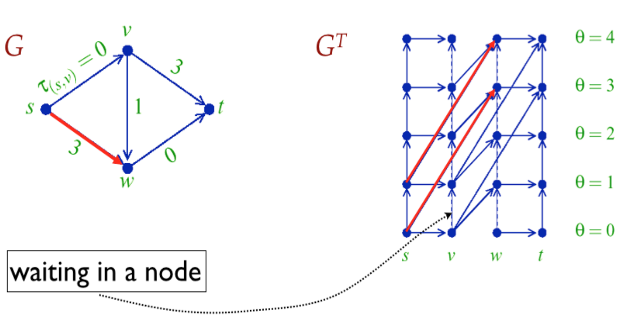


Beobachtung: Bei hinreichend feiner Diskretisierung der Zeit kann jeder diskrete dyn. Fluss als stetiger dyn Fluss interpretiert werden und umgekehrt (genau bis auf beliebig kleinen Approximationsfehler bei vernünftigen f_a)

↳ z.B. stetig oder Lebesgue messbar

Diskretisierung hilft mittels Zeitexpansion

Observation. Discrete flows over time in G correspond to static flows in *time-expanded* networks G^T (for *constant* τ_a)

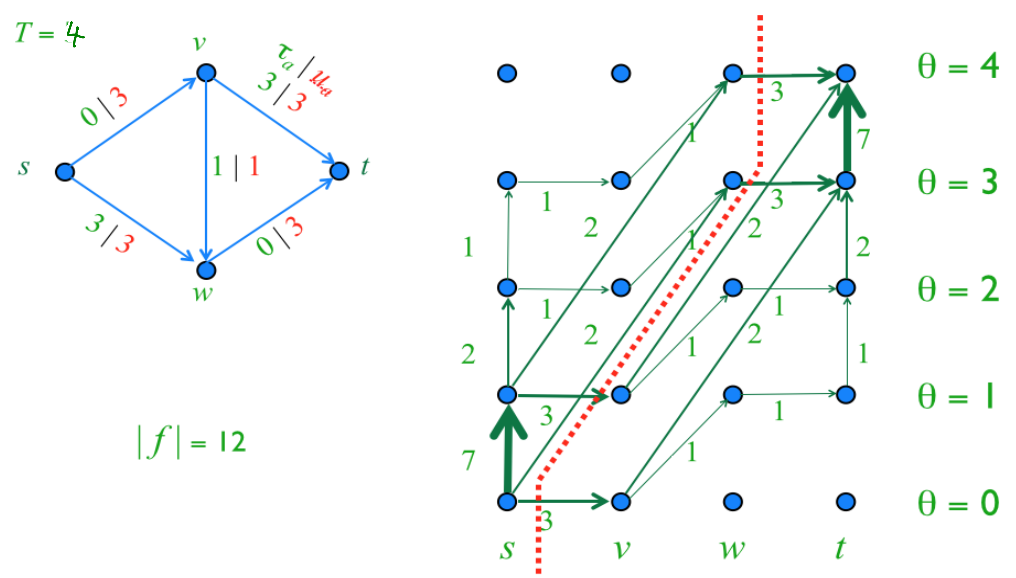


Kopie von G für jede Zeitschicht θ

Kanten zwischen den Zeitschichten modellieren die Durchfahrzeit τ_a

($\tau_a = 0 \Rightarrow$ in derselben Schicht)

An example (discrete dynamic) flow in the time expanded network



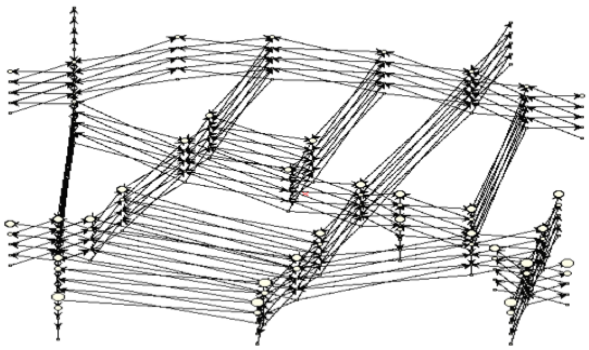
Zeitexpansion ergibt

- max s,t dyn. (diskreter) Fluss mit Zeithorizont T
  ≙ max statischen s,t-Fluss in G^T
- statische Flusstheorie ist anwendbar (z.B. Max Fluss - Min Cut)
- ABER: G^T riesig bei feiner Zeitskala
  polyn. Algos in G^T sind in G nur pseudopolynomial

Pros and cons of time expanded networks

- can use algorithmic toolbox for static flows
- also for more involved problems

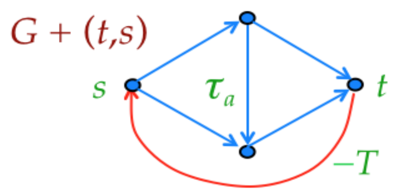
- in practice: huge memory requirements
- in theory: only pseudo-polynomial runtime, G^T has size $\Theta(|A|T)$



6.3 Algorithmus von Ford-Fulkerson für max. dyn. s,t-Flüsse [1958]

Ford & Fulkerson's algorithm

- Compute a static flow x in $G+(t,s)$ minimizing $\sum_{a \in A} \tau_a x_a - T|x|$ exist!



min-cost circulation problem on $G+(t,s)$

- Decompose x into flows x_P on s-t-paths $P \in \mathcal{P}$ (delete cycles in G with positive flow if necessary)

Geht polynomiell maximal m Pfade

- Use paths $P \in \mathcal{P}$ to construct a *temporally repeated* flow f
  - f sends flow at constant rate x_P into paths $P \in \mathcal{P}$, as long as there is enough time left to arrive at the sink before time T

alle $P \in \mathcal{P}$ haben $x_P > 0$ und haben $\tau_P \leq T$

nur solche konstruiert die Pfaddekomposition

Annahme $\tau_P > T$

$\Downarrow$

im Residualgraph $(G+(t,s))_x$ existiert dann der Zykel

$\overleftarrow{P} + (s,t)$ mit Kosten $-\underbrace{\text{kosten}(P)}_{=\tau(P)} + T < 0$

$\Rightarrow$ Widerspruch zur Optimalität von x

Der zeitlich wiederholte Fluss f schickt Fluss mit konstanter Rate x_P entlang P im Zeitintervall $[0, T-\tau_P]$

letzter Zeitpkt zum Senden bei s

so dass der Fluss in der Senke t
zur Zeit T ankommt

Die Flussraten $f_a : [0, T[\to \mathbb{R}$ ergeben sich polynomial aus den maximal m Wegraten x_p und den Zeiten τ_a

$\Rightarrow$ f_a sind stückweise konstant mit maximal $2m$ Sprüngen

$\Rightarrow$ polynomiale Outputgröße

<u>Zulässigkeit des zeitlich wiederholten Flusses</u>

- Flusserhaltung trivial, f erfüllt sie mit "="
  d.h. keine Speicherung von Fluss in Knoten
- Kapazitätserhaltung:
  $$f_a(\theta) \leq \sum_{P \ni a} x_p = x_a \leq u_a$$
- Nach Zeit T ist das Netzwerk leer, da auf P der letzte Fluss zur Zeit $T - \tau_p$ geschickt wird

<u>Wert des zeitlich wiederholten Flusses f</u>

$$\text{value}(f) = \sum_{P \in \mathcal{P}} (T - \tau_p) x_p = T \sum_{P \in \mathcal{P}} x_p - \sum_{P \in \mathcal{P}} \tau_p x_p$$

$$= T \cdot \text{value}(x) - \sum_{P \in \mathcal{P}} \Big(\sum_{a \in P} \tau_a \Big) x_p$$

$$= \quad \text{-"-} \quad - \sum_{a \in A} \Big(\sum_{P \ni a} x_p \Big) \tau_a$$

$$= \quad \text{-"-} \quad - \sum_{a \in A} x_a \cdot \tau_a$$

$$= T \cdot \text{value}(x) - \sum_a \tau_a \cdot x_a \quad = \text{ negative der Zielfkt}$$

$\sum_{a \in A} \tau_a \cdot x_a - T\,\text{value}(x)$ des min-cost Fluss Problems

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{f maximiert den Flusswert über alle zeitlich wiederholten dyn. s,t Flüsse mit Zeithorizont T}}$

Tatsächlich ist f schon maximal bzgl. <u>aller</u> dyn. s,t Flüsse bzgl. T

↳ Beweis mit max-flow min cut im dynamischen Fall

Def. dynamischer s,t-Schnitt mit Zeithorizont T

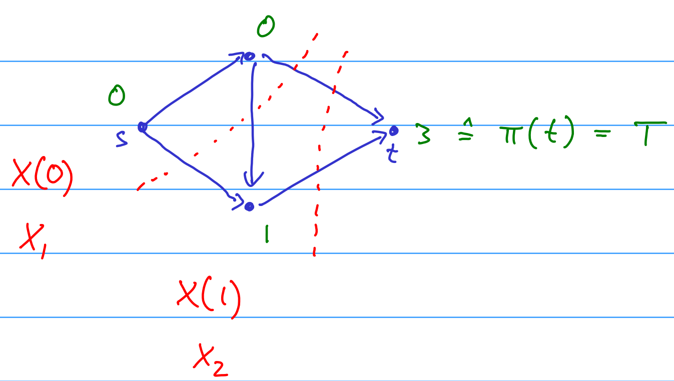
ist gegeben durch Werte $\pi(v) \in [0, \infty[$ für $v \in V$ mit $\pi(s) = 0$, $\pi(t) \geq T$

Diese Werte definieren eine aufsteigende Folge $\mathcal{C}$ von Mengen

$$X(\Theta) := \{ v \in V \mid \pi(v) \leq \Theta \}$$

so dass für $\Theta \in [0, T[$ $X(\Theta), V - X(\Theta)$ einen s,t-Schnitt definieren

Die Folge hat nur endlich viele verschiedene Mengen $X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_k$



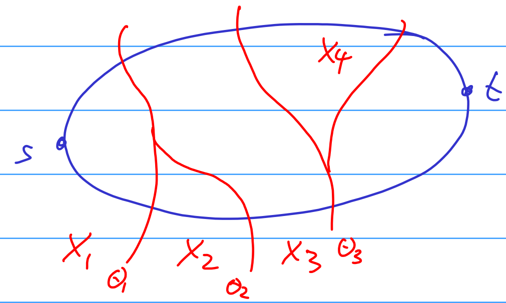
Die <u>Kapazität</u> eines solchen Schnittes $\mathcal{C}$ ist definiert als

$$\mathrm{cap}(\mathcal{C}) := \sum_{\substack{a \in A \\ a = (v,w)}} \underbrace{\max\{ \underbrace{\pi(w) - \pi(v) - \tau_a}_{\substack{\text{Zeit, die} \\ a \text{ im dyn.} \\ \text{Schnitt ist}}}, 0 \}}_{\text{max Zeitspanne, mit der Fluss aus Kante a rausfließen kann, während die Kante a im dyn. Schnitt ist}} \cdot u_a$$

6.1 Lemma: Für jeden dyn. s,t Fluss f und jeden dyn s,t Schnitt $\mathcal{C}$ zum selben Zeithorizont T gilt

$$\mathrm{value}(f) \le \mathrm{cap}(\mathcal{C})$$

Beweis: Betrachte die Folge der Schnitte $X_1, X_2, \dots, X_k \in \mathcal{C}$



Jeder Schnitt X_i erzeugt Kantenmenge $\delta^+(X_i)$ (Kanten raus aus X_i)
Das Zeitintervall $[0, T[$ wird durch die "Gültigkeit" der $\delta^+(X_i)$ überdeckt

$\delta^+(X_1)$ $\delta^+(X_2)$ ...

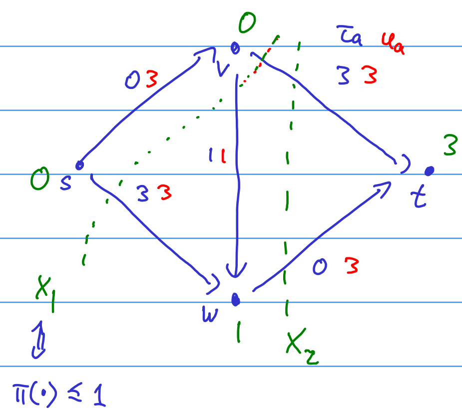
0 Θ_1 Θ_2 T

d.h. $\Theta_i := \min\{\pi(w) \mid (v,w) \in \delta^+(X_i)\}$

$\Downarrow$

$\mathrm{value}(f) \le \sum_i$ Flussmenge über Kanten $\delta^+(X_i)$ die im Zeitintervall $[\Theta_{i-1}, \Theta_i]$ fließen kann

$$\le \sum_{\substack{a \in A \\ a=(v,w)}} \max\{\pi(w) - \pi(v) - \tau_a, 0\} \cdot u_a = \mathrm{cap}(\mathcal{C}) \qquad \square$$



(v,t)
(s,w) (v,t)
(v,w) (w,t)

0 1 3

$\delta(X_1)$ $\delta(X_2)$

Kanten in $\delta^+(X_i)$

$(s,w) \to \pi(w) - \pi(s) - \tau_{(s,w)} = 1 - 0 - 3 \to 0$ Fluss

$(v,w) \to \pi(w) - \pi(v) - \tau_{(v,w)} = 1 - 0 - 1 \to 0$ Fluss

$(v,t) \qquad = 3 - 0 - 3 \to 0$ Fluss

bzgl X_1

$(v,t) \to 3 - 1 - 3 \to 0$ Fluss

$(w,t) \to 3 - 1 - 0 = 2 \to 2$ Zeiteinheiten $\cdot$ Kap 3

≤ 6 Flusseinheiten

$\Rightarrow \operatorname{cap}(\mathcal{C}) = 6$

Hier ein weiterer, formalerer Beweis

Sei f ein dyn. Fluss. Für $v \in V$ und Zeitpunkt Θ definiere

$ex_f(v,\Theta)$ = Einfluss − Ausfluss von v im Intervall $[0,\Theta]$

also

$$ex_f(v,\Theta) = \sum_{a \in \delta^-(v)} \int_0^{\Theta - \tau_a} f(\xi)\, d\xi - \sum_{a \in \delta^+(v)} \int_0^{\Theta} f(\xi)\, d\xi \geq 0$$

Dann gilt $\operatorname{value}(f) = ex_f(t,T)$

Sei nun $\mathcal{C}$ ein dynamischer Schnitt mit Werten $\pi(v)$

Dann gilt

$$\operatorname{value}(f) = ex_f(t,T) \leq \sum_v ex_f(v,\pi(v)) \qquad \text{da } \pi(t) \geq T$$

$$= \sum_v \left(\sum_{a \in \delta^-(v)} \int_0^{\Theta - \tau_a} f(\xi)\, d\xi - \sum_{a \in \delta^+(v)} \int_0^{\Theta} f(\xi)\, d\xi \right)$$

$$= \sum_{a=(v,w)} \left(\int_0^{\pi(w)-\tau_a} f(\xi)\, d\xi - \int_0^{\pi(v)} f(\xi)\, d\xi \right)$$

Kantenweise am Ende der Kante betrachtet

$$= \sum_{a=(v,w)} \int_{\pi(v)}^{\pi(w)-\tau_a} f(\xi)\, d\xi \qquad \text{falls } \pi(v) \leq \pi(w) - \tau_a$$

(sonst 0)

$$\leq \sum_{a=(v,w)} \max\{\pi(w) - \tau_a - \pi(v), 0\} \cdot u_a = cap(\mathcal{C}) \qquad \square$$

Zeige: zeitlich wiederholte Fluss f ist maximal

Dazu: Konstruiere dynamischen Schnitt $\mathcal{C}$ mit $value(f) = cap(\mathcal{C})$

$\downarrow$

konstruiere ihn aus der Abbruchsituation des Algorithmus

d.h. unter Residualgraph von $(G + (t,s))_x =: \bar{G}_x$

bzgl. der kostenminimalen Zirkulation x

Setze $\pi(v) :=$ Länge eines kürzesten Weges von s nach v in $\bar{G}_x$

bzgl. Kosten τ_a und $-T$

(wohldef., da $\bar{G}_x$ keine negativen Zykel enthält)

$\pi(s) = 0$

$\pi(t) \geq T$ sonst gibt es in $\bar{G}_x$ einen s,t-Weg P mit Länge (= Kosten) $< T$

$\Rightarrow$ $P + (t,s)$ ist negativer Zykel Widerspruch

Beachte: Da (im Fall $f \equiv 0$) Kante $(s,t) \in \bar{G}_x$ folgt $\pi(t) = T$

sonst wäre negativer Zykel $\overleftarrow{P} + (s,t)$

Beweis: $value(f) = cap(\mathcal{C})$

Betrachte Kante $a = (v,w)$

Claim 1: $\boxed{[\pi(v), \pi(w) - \tau_a[\; \neq \emptyset \;\Rightarrow\; x_a = u_a, \; f(\Theta) = u_a \quad \forall\, \Theta \in [\pi(v), \pi(w) - \tau_a[}$

a) Annahme $x_a < u_a$

$\Rightarrow (v,w) \in \bar{G}_x \Rightarrow \pi(w) \leq \pi(v) + \tau_a \Rightarrow$ Intervall leer

$\uparrow$ $\Rightarrow$ Widerspruch

kürzeste Weglängen

b) Annahme $\exists\; \Theta \in [\pi(v), \pi(w) - \tau_a[$ mit $f(\Theta) < u_a$ $(= x_a)$

$\Rightarrow$ zwei Fälle möglich: $\exists$ Weg P_0 in Pfadzerlegung von x mit $a \in P_0$ und

(i) der Fluss entlang P_0 kommt in v nach der Zeit $\pi(v)$ an

(wenn auf allen Wegen durch a der Fluss in v bereits zum Zeitpunkt $\pi(v)$ ankommt, so ist

$$f_a(\pi(v)) = \sum_{P \ni a} x_P = x_a = u_a \quad)$$

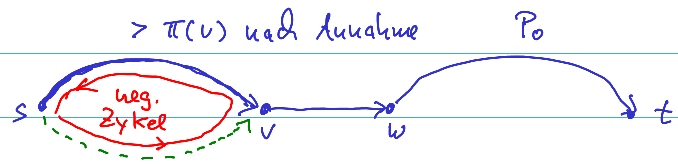
oder

(ii) der letzte Fluss durch P_0 verlässt w vor $\pi(w)$

$$(\text{sonst } f_a(\pi(w)) = \sum_{P \ni a} x_P = x_a = u_a \quad)$$

Da f zeitlich wiederholt ist, muss (i) oder (ii) gelten

zu (i)



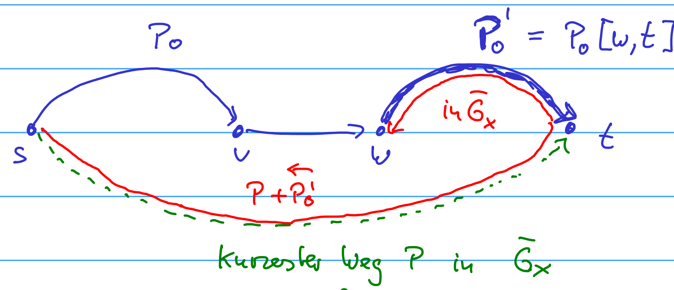
Weg P in $\bar{G}_x$ mit Länge $\pi(v)$, exist. wegen Def von $\pi(v)$

Entlang von P_0 fließt Fluss $\Rightarrow$ $\overleftarrow{P_0}$ in $\bar{G}_x$ enthalten

$\Rightarrow$ $\overleftarrow{P_0}[s,v] + P$ ist Zykel negativer Länge in $\bar{G}_x$

$\Rightarrow$ Widerspruch zur Optimalität von x

zu (ii)



kürzester Weg P in $\bar{G}_x$ von s nach t mit Länge T

Entlang von P_0 fließt Fluss $\Rightarrow$ Rückwärtskanten in $\bar{G}_x$

Fluss entlang P_0 verlässt w vor $\pi(w)$

$\Rightarrow$ $\pi(w) + \tau(P_0') > T = \pi(t)$

$\Rightarrow$ $-\tau(P_0') < \pi(w) - \pi(t)$ $\quad (*)$

Betrachte Weg $P + \overleftarrow{P_0'}$, dies ist Weg von s zu w in $\bar{G}_x$

mit Länge $\pi(t) - \tau(P_0') \overset{(*)}{<} \pi(t) + \pi(w) - \pi(t) = \pi(w)$,
Widerspruch dazu, dass $\pi(w)$ Länge eines kürzesten s,w-Weges in $\bar{G}_x$ ist.

Müssen noch verhindern, dass auf (v,w) etwas zurückfließt, wenn (w,v) Rückwärtskante im dyn. Schnitt ist

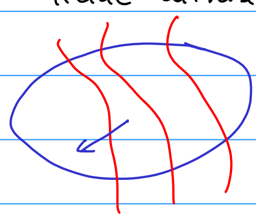
Claim 2 $\boxed{[\pi(w) - \tau(a), \pi(v)[\neq \emptyset \Rightarrow x_a = 0, \; f(\theta) = 0 \;\; \forall \theta}$

Beweis: Falls $x_a > 0 \Rightarrow$ Kante (w,v) ist in $\bar{G}_x$

$\Rightarrow \underbrace{\pi(v) \le \pi(w) - \tau_a}_{\text{wegen kürzeste Weglänge}} \Rightarrow$ Intervall ist leer

$\Rightarrow x_a = 0 \Rightarrow f(\theta) = 0 \;\; \forall \theta$ □

Claim 2 $\Rightarrow$ f kreuzt keinen Schnitt auf Rückwärtskanten
$\Rightarrow$ "keine Zeitreise in die Vergangenheit"



nicht möglich

Claim 1, Claim 2 $\Rightarrow$ value(f) = cap$(\mathcal{C})$ □

6.2 SATZ: (Ford Fulkerson '58)

(1) der Algorithmus konstruiert einen optimalen dynamischen Fluss zum Zeithorizont T

(2) Die Laufzeit wird dominiert durch die Berechnung des statischen kostenminimalen Flusses

(3) Der konstruierte optimale dynamische Fluss ist zeitlich wiederholt und kommt ohne Speicherung in Knoten aus

Aufgabe 6.1

6.1 alternativer Beweis für Optimalität über Dualitätstheorie (Schrijver)

min-cost-flow Problem als LP formulieren (P)

duales dazu formulieren $\hat{=}$ Schnitt (D)

zeige: $\text{value}(f) \geq \text{OPT}(P)$

$\text{value}(f) \leq \text{OPT}(D)$