§5 Verkehrslenkung mit Mautgebühren

5.1 Grundlagen

Congestion pricing

- Marginal cost pricing on all edges leads to the system optimum [Beckmann et al. `56]
  - f is SO w.r.t. $\tau_a(x_a)$ $\Leftrightarrow$ f is UE w.r.t. $\tau_a(x_a) + x_a\tau_a'(x_a)$ §1, §2

- tolls can „in principle" achieve SO
  - need to choose arc cost as $\underbrace{\tau_a(x_a)}_{\text{time}} + \underbrace{x_a\tau_a'(x_a)}_{\text{toll, depends on flow } x_a}$

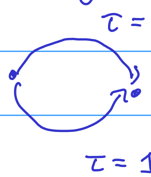
Frage: Gibt es feste Mautgebühren μ_a pro Kante a
so dass sich bzgl. der Kantenkosten $c_a(x_a) := \tau_a(x_a) + \mu_a$
ein SO Fluss f^* als UE bzgl. $c_a(x_a)$ einstellt?

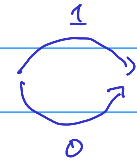
Erweiterte Frage

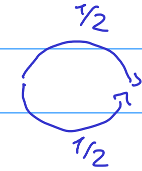
Gibt es ... zu beliebigem Fluss f Mautgebühren μ_a pro Kante
so dass ...
der Fluss f als UE ....
↑ als Kantenfluss

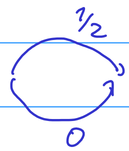
Ist das der Fall, so heißt f erzwingbar und wir sagen, dass $(\mu_a)_{a\in A}$ f erzwingt

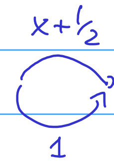
Bsp: Pigou

$d=1$ 

UE: 

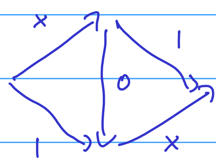
SO 

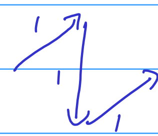
Maut μ 

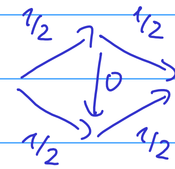
ergibt SO Fluss, denn 

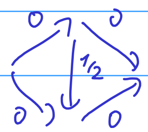
$\Rightarrow$ $x = \frac{1}{2}$

Bsp: Braess Paradox

$d=1$ 

UE 

SO 

Maut 

oder $\downarrow \geq \frac{1}{2}$ erzwingt SO

Bsp zeigt, dass die Maut nicht eindeutig sein muss

Werden sehen: Mautvektoren $(\mu_a)_{a \in A}$, die einen vorgegebenen Fluss kantenweise erzwingen, bilden ein Polyeder

$\Rightarrow$ kann besonderen Mautvektor auswählen, z.B. durch Lineare Optimierung, etwa $\sum_{a \in A} \mu_a$ oder $\max_a \mu_a$ minimieren

5.1 Lemma: Erlaubt man negative Maut, so ist jeder Fluss erzwingbar

Beweis: Sei f der zu erzwingende Fluss. Setze $\mu_a := \begin{cases} -\tau_a(f_a) & f_a > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$\Rightarrow$ alle Fluss führenden Wege bzgl. f haben $c_P(f) = 0$

jeder andere Weg $Q \in \mathcal{P}_k$ hat Kosten

$$c_Q(f) = \sum_{a \in Q:\ f_a > 0} (\tau_a(f_a) + \mu_a) + \sum_{a \in Q:\ f_a = 0} (\tau_a(0) + 0)$$

$$\underbrace{}_{0} \qquad\qquad \underbrace{\overset{\sim}{\geq 0} \quad + 0}_{\geq 0}$$

$$= 0 \qquad\qquad + \qquad\qquad \geq 0$$

$$\geq 0$$

$\Rightarrow f$ ist UE bzgl. der nicht-positiven Mautgebühren und alle Fluss führenden Wege haben Kosten 0 $\square$

Lemma zeigt, dass negative Mautgebühren nicht sinnvoll sind

Daher $\boxed{\text{Beschränkung auf } \mu_a \geq 0}$

5.2 Lemma (Beckmann, McGuire, Winston 56)

Jedes SO ist erzwingbar mit Maut $\mu_a \geq 0$

Beweis: folgt später aus allgemeineren Resultat

5.2 Durch Maut erzwingbare Auslastungen

Betrachte jetzt allgemeinere Frage, wann ein Fluss (genauer: eine Auslastung $g = (g_a)_{a \in A}$ der Kanten) erzwingbar ist.

Betrachte heterogene Nutzer gegeben durch Fahrzeitsensitivitäten $\alpha_i \geq 0$

[O.B.d.A. verträglich mit Commodities,

$\mathcal{P}_k$ sei weiter Pfadmenge bzgl. (s_k, t_k), jetzt teilt sie sich auf in verschiedene Sensitivitäten, erlauben jetzt $(s_i, t_i) = (s_k, t_k)$ und schreibe f_P^i für Pfadfluss auf $P \in \mathcal{P}_i$]

o.B.d.A. sei $\sum_i d_i = 1$ (Skalierung Gesamtdemand)

Nutzung der Kante a von Commodity i (Nutzer Typ i) verursacht Kosten $\underbrace{\alpha_i \cdot \tau_a(f_a)}_{\text{Zeit}} + \underbrace{\mu_a}_{\text{Maut}}$ ausgedrückt in €

Eine Auslastung ist eine Kantenbewertung $g = (g_a)_{a\in A}$

Jeder Fluss f induziert die Auslastung $f_a = \sum_i \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_i \\ P \ni a}} f_P^i$

Auslastung g heißt zulässig, wenn ein zulässiger Fluss f existiert so dass $f_a \le g_a \quad \forall a \in A$

g heißt erzwingbar, wenn es einen Mautvektor $\mu = (\mu_a)_{a\in A}$ gibt so dass das induzierte UE bzgl. Kantenkosten $\alpha_i \tau_a(f_a) + \mu_a$ pro Nutzer Typ i die Auslastung g induziert, also $f_a = g_a \quad \forall a$

Dann heißt auch f erzwingbar

5.2 SATZ [Fleischer et al 2004]: Unter den obigen Annahmen existiert Maut, die eine optimale Auslastung g^* erzwingt

d.h. g^* minimiert $\sum_a \tau_a(g_a) \cdot g_a$ unter allen zulässigen Auslastungen

Beachte: SO Fluss erzeugt eine optimale Auslastung entsprechende Maut erzwingt also kantenweise ein SO

Beweis durch Dualitätstheorie der linearen Optimierung

(1) LP zur Ermittlung eines kostenmin Flusses bzgl. vorgeg. Auslastung g

(P_g) $\min \sum_i \alpha_i \sum_{P \in \mathcal{P}_i} \tau_P(g) \cdot f_P^i$ ← Kosten von f bzgl. Fahrzeit von g

μ_a unter $\sum_i \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_i \\ P \ni a}} f_P^i \le g_a \quad \forall a$ ← f respektiert g d.h. $f_a \le g_a \quad \forall a$

z_i $\sum_{P \in \mathcal{P}_i} f_P^i = d_i \quad \forall i$

$f_P^i \ge 0$ $\Big\}$ f ist zulässiger Fluss

Beachte: g wird als fest angenommen, gesucht ist Fluss f, der zu Fahrzeiten $\alpha_i \tau_a(g_a)$ die gesamten Kosten minimiert
Bisher keine Maut!

(2) Übergang zum dualen LP mit Dualvariablen
z_i für Gleichheitsbed, $i \in I$
μ_a für die $\geq$ Bedingungen nach Mult. mit -1

(D_g) $\quad \max \sum_i d_i \cdot z_i - \sum_a g_a \cdot \mu_a$

unter $z_i - \sum_{a \in P} \mu_a \leq \alpha_i \cdot \tau_P(g) \quad \forall i \quad \forall P \in \mathcal{P}_i \qquad (*)$

$\mu_a \geq 0 \quad z_i$ beliebig

$(*) \Leftrightarrow \quad z_i \leq \underbrace{\sum_{a \in P} \left(\alpha_i \tau_a(g_a) + \mu_a \right)}_{\text{Kosten von } P \text{ bei Interpretation von } \mu_a \text{ als Maut}} \quad \forall i \quad \forall P \in \mathcal{P}_i \qquad (**)$

$\Rightarrow$ $z_i \leq$ Kosten kürzester Weg $P \in \mathcal{P}_i$ bzgl. dieser Kosten
In Zielfkt werden (da maximiert wird) die z_i groß gemacht (bei optimal gewählten μ_a)
$\overset{(**)}{\Rightarrow}$ im Optimum entsprechen die z_i den Kosten eines kürzesten Weges $P \in \mathcal{P}_i$

Beachte: Im primalen LP keine Mautvariablen, die ergeben sich erst im dualen LP

$\boxed{\text{5.4 Proposition: Sind } f \text{ und } (\mu, z) \text{ optimale Lösungen von } (P_g) \text{ und } (D_g), \text{ so ist } f \text{ ein GE bzgl. Maut } \mu \text{ falls } f_a = g_a \ \forall a}$

Beweis: Nutze Bed. vom komplementären Schlupf

$f_P^i > 0 \Rightarrow z_i = \sum_{a \in P} (\mu_a + \alpha_i \tau_a(g_a))$

$=$ Kosten Weg P bzgl. Maut und Fahrzeit bzgl. g

Für nicht genutzte Wege ist $f_P^i = 0$ gilt $(**)$

$\Rightarrow$ Kosten $P \geq z_i$

$\Rightarrow$ f ist UE bzgl. Maut μ $\square$

$\boxed{\text{5.5 Proposition: Ist } g \text{ eine zulässige Auslastung, so haben } (P_g) \text{ und } (D_g) \text{ optimale Lösungen}}$

Beweis: g zulässig $\Rightarrow \exists$ Fluss f mit $f_a \leq g_a \quad \forall a$

$\Rightarrow f$ ist zulässig für (P_g)

Claim: dann ist $\mu_a := 0 \ \forall a$ und $z_i := 0 \ \forall i$ ist zulässige Lösung für (D_g)

Überprüfe $(**)$ $\quad \underbrace{z_i}_{=0} \leq \sum_{a \in P} (\underbrace{\alpha_i}_{\geq 0} \underbrace{\tau_a(g_a)}_{\geq 0} + \underbrace{\mu_a}_{=0})$ ✓

$\Rightarrow (P_g)(D_g)$ haben zulässige Lösungen $\overset{\text{Dualitätstheorie}}{\Rightarrow}$ $(P_g)(D_g)$ haben optimale Lösungen

Die Propositionen zeigen:

g ist zulässige Auslastung

$\Rightarrow (P_g)(D_g)$ haben Optimallösungen f, (μ, z) und

f ist UE bzgl. μ falls $f_a = g_a \ \forall a$

Brauchen zwei weitere Begriffe

- Auslastung g heißt <u>optimal-straff</u>

$:\Leftrightarrow (P_g)$ hat eine Optimallösung, bei der alle Ungleichungen mit Gleichheit erfüllt sind, d.h. $f_a = g_a \quad \forall a$

- Auslastung heißt <u>minimal zulässig</u>
  $\Leftrightarrow$ g kann auf keiner Kante verringert werden ohne Zulässigkeit von g zu verletzen
  d.h. $g' \leq g$ und $g'_a < g_a$ für ein $a \Rightarrow g'$ nicht zulässig

5.6 SATZ: Ein zulässige Auslastung g ist erzwingbar
$\Leftrightarrow$ g ist optimal straff

Beweis "$\Leftarrow$"

g sei optimal straff $\overset{\text{Def}}{\Rightarrow}$ $\exists$ optimale Lösung f von (P_g) mit
$f_a = g_a \quad \forall a$

$\Rightarrow$ f ist UE bzgl. optimaler Dualvariablen μ_a

$\Rightarrow$ g ist UE bzgl. μ $\Rightarrow$ g erzwingbar (und f erzwingbar)

"$\Rightarrow$"

g sei erzwingbar $\overset{\text{Def}}{\Rightarrow}$ $\exists$ Maut μ die Fluss f $\overbrace{\text{erzwingt}}^{\text{als UE bzgl. } \mu}$ mit $f_a = g_a \quad \forall a$

$\Rightarrow$ Ungleichungen in (P_g) sind straff $\forall a$

f ist UE $\Rightarrow$ alle Fluss führenden Wege für i haben dieselben Kosten $\underbrace{\alpha_i \cdot \tau_p(g) + \mu_p}_{=: z_i}$

und (μ, z) ist zulässig für (D_g)

Claim: f und (μ, z) erfüllen die Bed. vom komplementären Schlupf

denn: $f_p^i > 0 \quad P \in \mathcal{P}_i \overset{\text{Def } z_i}{\Rightarrow} (**)$ gilt mit Gleichheit

umgekehrt $(**)$ gilt mit $< \Rightarrow f_p^i = 0$

$\Rightarrow$ f, (μ, z) sind Optimallösungen für $(P_g), (D_g)$

$\Rightarrow$ ($f_a = g_a$) $\quad g$ ist optimal-straff $\square$

Beweis von Satz 5.3: Das SO ist als Auslastung (also als Kantenfluss) erzwingbar

g sei eine optimale Auslastung, d.h. Auslastung eines SO
zeige: g ist optimal-straff $\underset{\text{Satz 5.6}}{\Longrightarrow}$ g ist erzwingbar

Ann. g nicht optimal-straff
Betrachte Nummerierung der Kanten $a_1, a_2, \dots a_m$
Sei $g^{(0)} := g$
Für a_i definiere $g^{(i)}$ durch $g^{(i)}_a := \begin{cases} g^{(i-1)}_a & \forall a \neq a_i \\ \bullet & a = a_i \end{cases}$

minimaler Wert, so dass $g^{(i)}$ und zulässig ist

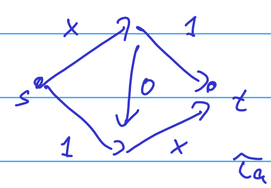
Dies ergibt Folge von zulässigen Auslastungen
$g = g^{(0)} \to g^{(1)} \to g^{(2)} \to \dots \to g^{(m)} =: g^*$
$\Rightarrow$ g^* ist minimal zulässig nach Konstruktion

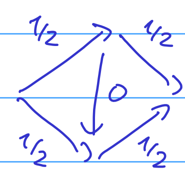
$\Updownarrow$

(P_{g^*}) hat eine zulässige Lösung $f \le g^*$
und damit eine optimale Lösung $f^* \le g^*$

g^* minimal zulässig $\Rightarrow$ $f^* = g^*$
$\Rightarrow$ g^* optimal-straff $\overset{5.6}{\Longrightarrow}$ g^* erzwingbar
$g^* \le g \quad g$ optimal $\Rightarrow$ g^* optimal und erzwingbar $\square$

Aufg. 5.1 Aufgabe 5.1
Berechne Mautgebühren, die das SO für das Braess-Paradox erzwingen

$d=1$ 



$\overset{?}{=}$ SO = Auslastung g

5.3 Charakterisierung erzwingbarer Auslastungen

5.7 Korollar [Fleischer et al 2004]

Sei $w : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$ monoton nicht fallend

$\Rightarrow \exists$ Maut, die eine Auslastung g^* erzwingt, die $w(g)$ minimiert [$w(g)$ allgemeiner als $\sum_i \alpha_i \sum_{P \in \mathcal{P}_i} \tau_P(g) \cdot f_P^i$

$\parallel$

$\sum_i \alpha_i \sum_a \tau_a(g_a) f_a^i$]

Beweis: Anpassung des Beweises von Satz 5.3

Die Optimalität von g wird nur am Ende benutzt und jetzt zu

$g^* \leq g \quad \Rightarrow \quad w(g^*) \leq w(g)$

$\Rightarrow \quad g^*$ ist optimal wenn g optimal ist

Alle anderen Überlegungen (auch die LPs) bleiben gleich $\square$

5.8 Beispiel:

$w(g) := \max_i \min_{P \in \mathcal{P}_i} \tau_P(g) \longrightarrow \min$

minimiert die maximale Fahrzeit bzgl. g über all i

$\Rightarrow$ schnelle Wege für jede Commodity [Feuerwehr!]

So ist ja unfair für einzelne Nutzer. Daher Wege verschieden gewichten bzgl. der Fahrzeitsensitivitäten der Nutzer

$\Rightarrow \quad \min \sum_i \alpha_i \sum_{P \in \mathcal{P}_i} \tau_P(f) \cdot f_P^i \quad \hat{=}$ Zielfkt von (P_g)

gewichtetes System Optimum

Ein Fluss heißt <u>gewichtet optimal</u> wenn er diese Fkt. minimiert

5.9 Korollar [Fleischer et al 2004]

Ein gewichtet optimaler Fluss ist erzwingbar

Beweis: Sei f^* ein gewichtet optimaler Fluss (existiert, wieder konvexes Opt Problem)
mit $\sum_a f_a^*$ minimal

Zeige: die von f^* induzierte Auslastung g^* (also $g_a^* := f_a^*$) ist optimal-straff $\overset{5.6}{\Rightarrow}$ g^* (und damit f^*) ist erzwingbar

Ann. f^* nicht optimal-straff (f^* als Auslastung gesehen)
$\Rightarrow$ das LP (P_{f^*}) hat opt. Lösung $f \leq f^*$
und $\exists$ Kante $\bar{a}$ mit $f_{\bar{a}} < f_{\bar{a}}^*$

$$\Rightarrow \sum_a f_a < \sum_a f_a^*$$

$$\left.\begin{aligned} \text{Außerdem} \quad \sum_i \alpha_i \sum_{P \in \mathcal{P}_i} \tau_P(f)\, f_P^i \quad &\overset{\tau_a \text{ monoton}}{\leq} \quad \sum_i \alpha_i \sum_{P \in \mathcal{P}_i} \tau_P(f^*)\, f_P^i \\ &\underset{f \text{ optimal in } (P_{f^*})}{\leq} \quad \sum_i \alpha_i \sum_{P \in \mathcal{P}_i} \tau_P(f^*)\, f_P^{*i} \end{aligned}\right\} (*)$$

f^* gewichtet optimal $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ f gewichtet optimal

$\Rightarrow \left(\sum_a f_a < \sum_a f_a^*\right)$ Widerspruch zur Wahl von f^*

$\Rightarrow f^*$ ist optimal-straff $\Rightarrow$ erzwingbar $\square$

Jetzt Technik der Reduzierung der Kantenauslastung aus Beweis zu Satz 5.3 allgemeiner nutzen.

Maut μ erzwingt Auslastung g schwach
$:\Longleftrightarrow$ $\exists$ Auslastung $g' \leq g$, die von μ erzwungen wird

$\boxed{\begin{array}{l}\text{5.10 Korollar [Fleischer et al 2004]} \\ \text{Jede zulässige Auslastung ist schwach erzwingbar}\end{array}}$

Beweis: g sei zulässige Auslastung
Nutze Technik aus Beweis von Satz 5.3

$$g = g^0 \to g^{(1)} \to g^{(2)} \to \dots \to g^{(m)} = g' \qquad g' \text{ minimal zulässig}$$

$\Longrightarrow$ $\qquad g'$ ist optimal-straff $\overset{5.6.}{\Longrightarrow}$ g' erzwingbar

wie im Beweis von Satz 5.3

$\overset{g' \leq g}{\Longrightarrow}$ g schwach erzwingbar $\square$

Anwendung Korollar 5.10
Berechnung von Maut um eine vorgegebene Kantenbelastung nicht zu überschreiten
[man will keinen speziellen Fluss erzeugen, sondern auf bestimmten Kanten
die Auslastung klein halten]

LPs (P_g) und (D_g) haben exponentiell viele Variable f_P^i
bzw exponentiell viele Nebenbedingungen
dies möchte man zur Lösung vermeiden

Aufg. 5.2 Aufgabe 5.2:
Eine Maut zur Erzwingung einer Auslastung kann in polynomieller Zeit
berechnet werden
Hinweis: LP "klein" machen durch kantenbasierte Form

Aufg. 5.3

Aufgabe 5.3

Die Menge aller Mautvektoren zur Erzwingung einer festen Auslastung ist ein Polyeder. Dieses kann durch polynomial viele Ungleichungen beschrieben werden

5.4 Das Minimum Toll Booth Problem (MTB)

Bisherige Maut zur Erzwingung eines Flusses nutzt die Möglichkeit auf beliebigen Kanten Maut festzulegen $\rightarrow$ nicht sinnvoll in Praxis

Daher: Minimierung # Kanten mit Maut zur Erzwingung eines vorgegebenen Flusses (z.B. des SO)

(MTB) $\quad \min \underbrace{\sum_a w_a}_{\text{Gewicht} \geq 0} \cdot \underbrace{z_a}_{0,1 \text{ Variable}} =: w(\mu)$

0,1 Variable mit $z_a := \begin{cases} 1 & \mu_a > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Gewicht ≥ 0

5.10 SATZ: Das MTB Problem zur Erzwingung eines vorgegebenen Flusses ist schwach NP-schwer

Beweis: Reduktion von PARTITION

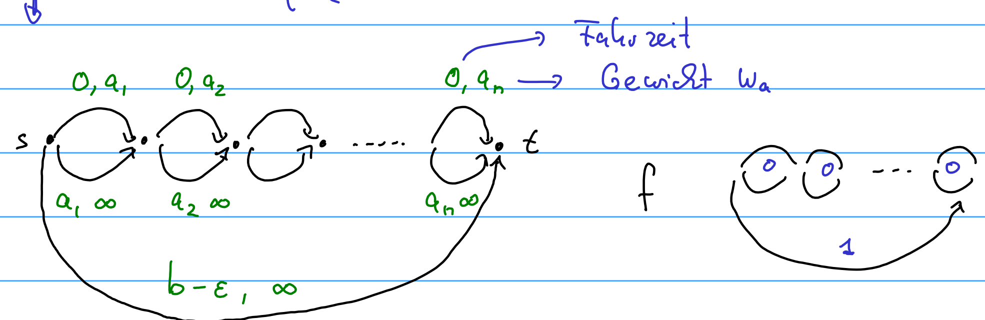
Gegeben $a_1, .., a_n \in \mathbb{N}$ $\quad \sum a_i = 2b$

Frage: $\exists ?\ J \subseteq \{1, .., n\}$ mit $\sum_{j \in J} a_j = b$

$\downarrow$ Reduktion auf (MTB)

Graph

$d = 1$



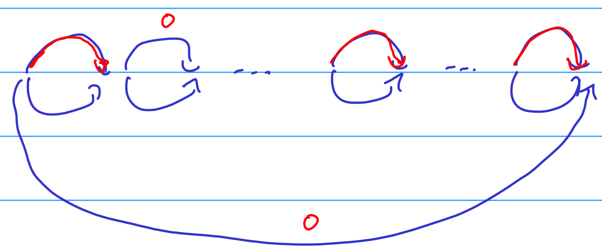
$\varepsilon < \min_i a_i \qquad \varepsilon \in \mathbb{Z}$

Zeige: I Ja Instanz von PARTITION $\iff$ $\exists$ Fluss μ die f erzwingt und $w(\mu) \le b$

"$\Rightarrow$" Sei I Ja-Instanz von PARTITION mit Indexmenge J, $\sum_{j \in J} a_j = b$

Definiere μ als

$$\mu_a := \begin{cases} a_j & a \text{ obere Kante im Parallelenpaar und } j \in J \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



$\Rightarrow w(\mu) = b$

μ erzwingt f denn: $s \curvearrowright t$ hat Kosten $b - \varepsilon$

$\curvearrowright\curvearrowright \dots \curvearrowright$ hat Kosten b (von Fluss)

ersetzen von oberen Kanten durch untere erhöht höchstens die Kosten

$\Rightarrow$ μ erzwingt f und hat Gewicht $w(\mu) \le b$

"$\Leftarrow$" μ erzwinge f und habe Gewicht $w(\mu) \le b$

$\Rightarrow$ (Transformation) $\mu_a > 0$ nur auf oberen Kanten in $\circlearrowright$

alle anderen Kanten haben $w_a = \infty$

Beh: $w(\mu) = b$ [$\Rightarrow$ a_j auf Kanten a mit $\mu_a > 0$ bilden Lösung von PARTITION $\Rightarrow$ Ja Instanz von PARTITION]

Ann. $w(\mu) < b$ mit J = Indexmenge der zugehörigen a_j

$\Rightarrow$ Weg $\curvearrowright\curvearrowright \dots \curvearrowright$ hat Gewicht $\sum_{j \in J} a_j < b \underset{\text{Voraus}}{\Rightarrow} \le b - \varepsilon$

und Fahrzeit 0

$\Rightarrow$ μ erzwingt f nicht

[Ann. $w(\mu) > b$ $\Rightarrow$ nutze Weg mit 0-Kant Kanten oben ↻ und Kanten ↻ unten

a_j $j \in J$

dieser Weg hat Kosten $< b$ $\Rightarrow$ $\leq b - \varepsilon$]

wichtig da $w(\mu) \leq b$ vorausgesetzt

Problem (MTB) hat starke Verwandschaft mit

MIN LENGTH BOUNDED CUT Problem (MLBC)

Gegeben: Digraph $D = (V, A)$

Kantenlängen l_a, Längenschranke L, alle aus $\mathbb{Z}$

Kapazitäten u_a

Knoten s, t

Gesucht: Schnitt $C \subseteq A$ (als Kantenmenge) so dass

$(V, A \setminus C)$ hat keine s,t Wege der Länge $\leq L$

C hat minimale Kapazität $u(C) = \sum_{a \in C} u_a$

5.11 SATZ [Baier et al 06] Für $\varepsilon > 0$ und $L \in \{4, \dots \lfloor n^{1-\varepsilon} \rfloor\}$ ist es NP-schwer, das MLBC Problem mit $l_a \equiv 1$ $u_a \equiv 1$ besser als 1.1377 zu approximieren

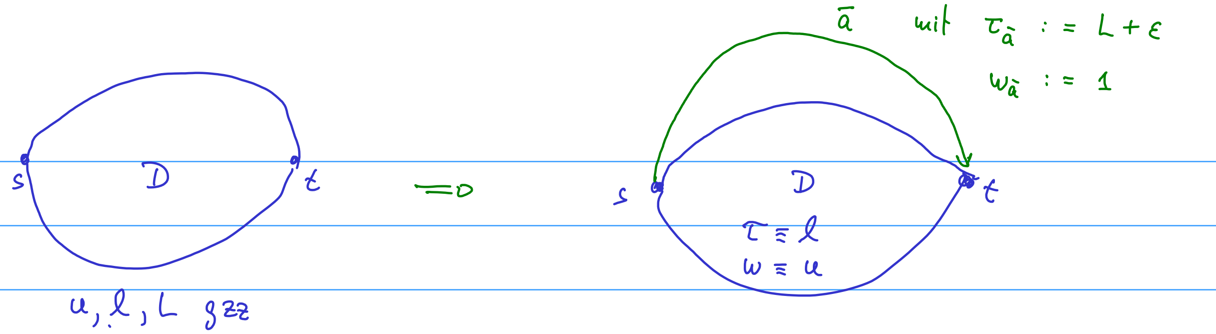
ohne Beweis

Fluss nur auf einer Kante positiv

5.12 SATZ: MLBC-Problem und SINGLE-ARC-MTB sind polynomial äquivalent mit gleichem Zielfunktionswert

Beweis: Transformation von MLBC-Problem auf MTB-Problem

Sei I Instanz von MLBC



ε so klein, dass alle $L+\varepsilon$-beschränkten s,t-Wege bereits L-längenbeschränkt sind

Könnte $f_a := \begin{cases} 1 & a = \tilde{a} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ erzwingen

Sei C ein L-bounded Schnitt für I, o.B.d.A. mit min $u(C)$

$\Rightarrow \mu_a := \begin{cases} M \text{ groß} & \text{falls } a \in C \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ ist Mautvektor mit $w(\mu) = u(C)$

und μ erzwingt f

Für jeden Mautvektor, der f erzwingt gilt $\{a \in A \mid \mu_a > 0\}$ ist ein L-beschränkter Schnitt

$\Rightarrow w(\mu) \geq u(C)$

5.4 Aufgabe 5.4 Zeige die umgekehrte Transformation

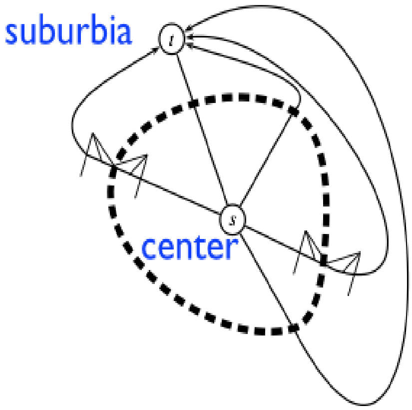
Offen: Komplexität von MTB für das SO

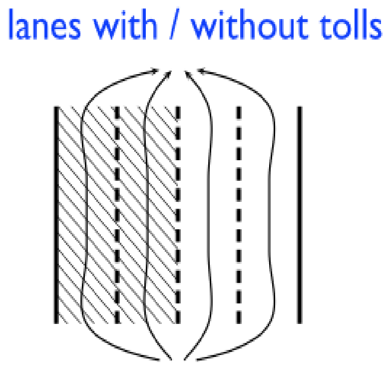
5.5 Beste Maut auf beschränkter Anzahl von Kanten

realistischer für Anwendungen (London, Stockholm, Singapur)

i.A. NP-schwer (schon für lineare $\tau_a(x_a)$, Hoefer et al 2008)

lösbar für Netze der Form





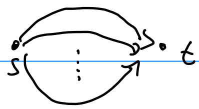
Approximation von – Brücken über einen Fluss

– Zugang zur Innenstadt

Exakt für mehrspurige Autobahnen (Israel)

Beste Maut $\hat{=}$ induzierten UE Fluss f mit $\sum_{a \in A} \tau_a(f_a) \cdot f_a$ minimal

5.5 Aufgabe 5.5

$D \hat{=}$  Sei $N :=$ Menge der Kanten ohne Maut

$M :=$ ..... mit Maut

$d :=$ Gesamtdemand

$N \cup M = A$

Zeige, dass der Optimalwert $\sum_a \tau_a(f_a) f_a$ nur von der Aufteilung d_N, d_M des Demands auf die Mengen N, M abhängt, d.h. $OPT = \max_{d_N} F(d_N)$

d.h. Optimalwert von $\sum_a \tau_a(f_a) \cdot f_a$ hängt nur von d_N ab

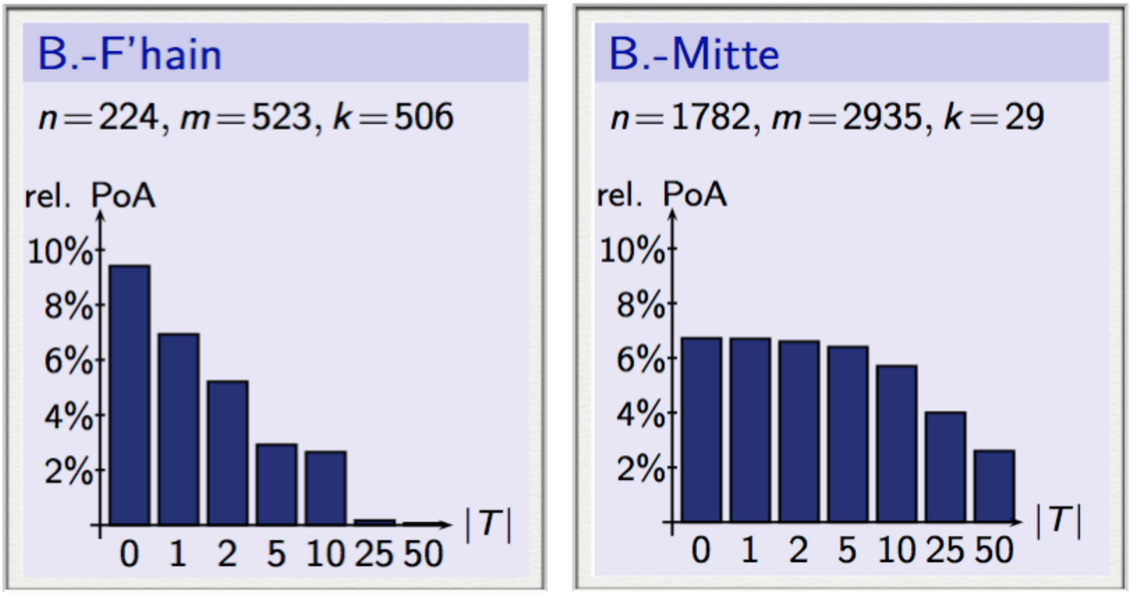
(f der durch Maut erzwungene Fluss)

[Harks, Klimm M 2002]

Für allgemeine Graphen nur heuristische Ansätze bekannt

zeigen, dass PoA schon signifikant reduziert werden kann wenn nur ein Bruchteil aller Kanten bemautet wird

Few tollable edges suffice to reduce congestion



5.6 Aufgabe 5.6: Entwerfen Sie für allgemeine Graphen und mehrere (s_i, t_i) einen heuristischen Algo zur "Minimierung" von $\sum_a \tau_a(f_a) \cdot f_a$ unter Maut auf beschränkter (aber beliebiger) Menge von Kanten