§5 Verkehrslenkung mit Mautgebühren

5.1 Grundlagen

§1,2 zeigen: SO ist UE bzgl. $c_a(x_a) = \underbrace{\tau_a(x_a)}_{\text{Fahrzeit}} + \underbrace{x_a \tau_a'(x_a)}_{\text{"Maut"}}$

bei homogenen Nutzern

$\Downarrow$

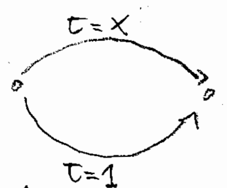
Frage: Gibt es feste Mautgebühren μ_a pro Kante a
so dass sich bzgl. $c_a(x_a) := \tau_a(x_a) + \mu_a$
ein SO Fluss f^* als UE bzgl. $c_a(x_a)$ einstellt?

Erweiterte Frage:

Gibt es zu beliebigem Fluss f feste Mautgebühren
μ_a pro Kante a, so dass sich bzgl. $c_a(x_a) := \tau_a(x_a) + \mu_a$
der Fluss f als UE bzgl. $c_a(x_a)$ einstellt?

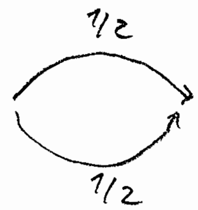
Ist dies der Fall, so sagen wir, dass $\mu = (\mu_a)_{a \in A}$ den Fluss f
<u>nashifiziert</u> bzw. dass f (durch Maut) <u>erzwingbar</u> ist

Beispiel: Pigou:

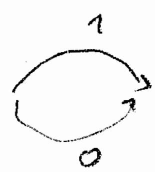


$d = 1$

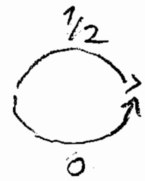
$\Rightarrow$ SO ist



, UE ist

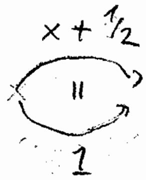


Maut μ:



ergibt SO-Fluss

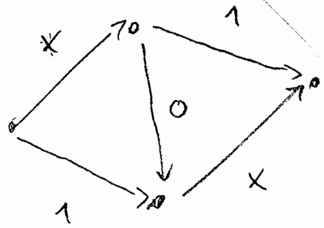
denn: UE bzgl. c_a $\Leftrightarrow$



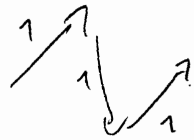
$\Rightarrow x = 1/2$

Bsp: Braess Paradox

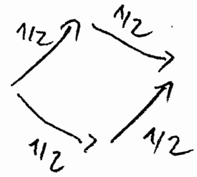
$d=1$



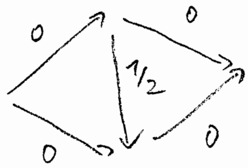
UE



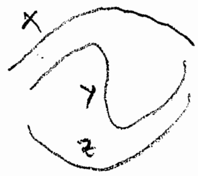
SO



Maut



ergibt SO, denn:



müssen gleiche Fahrzeit + Maut erzielen

$$\Rightarrow \underset{(1)}{x+y+1} = \underset{(2)}{x+y+\tfrac{1}{2}+y+z} = \underset{(3)}{1+z+y}$$

$(1)=(3) \Rightarrow z = x$

$(4)\ x+y+z=1 \Rightarrow y = 1-2x \Rightarrow$ (2) wird zu $2x+2(1-2x)+\tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{2}-2x$

$\Downarrow$

(1) wird zu $x+1-2x+1 = 2-x$

$(1)=(2) \Rightarrow \tfrac{5}{2}-2x = 2-x \Rightarrow x = \tfrac{1}{2} \overset{x=z}{\Rightarrow} z = \tfrac{1}{2} \overset{(4)}{\Rightarrow} y = 0$

zeigt, dass SO nashifizierbar, aber neue Straße $\downarrow 0$ wird nicht benutzt.

5.1 LEMMA: Erlaubt man negative Zölle, so ist jeder Fluss f erzwingbar.

Beweis: Setze $\mu_a := \begin{cases} -\tau_a(f_a) & \text{falls } f_a > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$\Rightarrow$ alle Fluss führenden Wege bzgl f haben $c_p(f) = 0$.

Zeige: jede andere s_k, t_k-Weg Q hat Kosten $c_Q(f) \geq 0$

$$c_Q(f) = \sum_{a \in Q:\, f_a > 0} \underbrace{(\tau_a(f_a) + \mu_a)}_{0} + \sum_{a \in Q:\, f_a = 0} (\underbrace{\tau_a(0)}_{\geq 0} + 0) \geq 0$$

$\Rightarrow$ f ist UE bzgl der (negativen) Mautgebühren und alle Fluss-führenden Wege haben "Länge" 0 $\square$

Lemma zeigt, dass negative Mautgebühren nicht sinnvoll sind

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Beschränkung auf } \mu_a \geq 0}$ im Weiteren

5.2 LEMMA (Beckmann, McGuire, Winsten 56).
Das SO (jedes SO) ist erzwingbar mit Maut $\mu \geq 0$

Beweis: folgt später aus allgemeineren Sätzen $\square$

5.2 Durch Maut erzwingbare Auslastungen

Betrachte jetzt allgemeinere Frage, wann ein Fluss f (oder genauer: eine Auslastung g der Kanten) erzwingbar ist.

Betrachten dazu <u>heterogene Nutzer</u> gegeben durch Fahrzeitsensitivitäten $\alpha_i \geq 0$ bzgl. Commodity i
[o.B.d.A. mit Commodity verträglich, $\mathcal{P}_i$ sei weiter Pfadmenge bzgl. i, erlauben jetzt $(s_i, t_i) = (s_j, t_j)$ und $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_j$, schreiben f_P^i für Pfadfluss auf $P \in \mathcal{P}_i$]
o.B.d.A. $\sum_i d_i = 1$ (Skalierung Gesamtdemand)
Nutzung Kante a von Commodity i (Nutzer Typ i) verursacht Kosten $\underbrace{\alpha_i \cdot \tau_a(f_a)}_{\text{Zeit}} + \underbrace{\mu_a}_{\text{Maut}}$ ausgedrückt in €

Eine <u>Auslastung</u> ist eine Kantenbewertung $g = (g_a)_{a \in A}$
Jeder Fluss f induziert die Auslastung $f_a = \sum_i \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_i \\ P \ni a}} f_P^i$.

Auslastung g heißt <u>zulässig</u>, wenn ein zulässiger Fluss f existiert, so dass für die induzierte Auslastung f_a gilt:

$$f_a \leq g_a \quad \forall a$$

g heißt <u>erzwingbar</u>, wenn es einen Mautvektor μ gibt, so dass das induzierte UE f bzgl. der Kosten $\alpha_i \tau_a(f_a) + \mu_a$ die Auslastung g induziert, also $f_a = g_a \;\; \forall a$. Dann heißt auch f <u>erzwingbar</u> als Kantenfluss

Eine Auslastung g heißt <u>optimal</u>, wenn g $\sum_a \tau_a(g_a) g_a$ über alle zulässigen Auslastungen minimiert

> 5.3 SATZ [Fleischer et al 2004]: Unter den obigen Annahmen existiert Maut, die eine optimale Auslastung g^* erzwingt.

Beachte: SO Fluss erzeugt eine optimale Auslastung

Beweis durch Dualitätstheorie der linearen Optimierung

(1) LP zur Ermittlung eines kostenmin. Flusses f bzgl. Auslastung g

$$(P_g) \quad \min \sum_i \alpha_i \sum_{P \in \mathcal{P}_i} \tau_P(g) f_P^i \qquad \leftarrow \text{Kosten } f \text{ bzgl. } g$$

$$\text{unter} \sum_i \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_i \\ P \ni a}} f_a^i \le g_a \quad \forall a \qquad \leftarrow f_a \le g_a, \text{ d.h. } g \text{ ist zulässig}$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{P \in \mathcal{P}_i} f_P^i = d_i \\ f_P^i \ge 0 \end{array}\right\} \qquad \leftarrow f \text{ ist zulässiger Fluss}$$

Beachte: g wird als fest angenommen, gesucht ist Fluss f, der zu Fahrzeiten $\alpha_i \cdot \tau_a(g_a)$ die gesamten Kosten von f minimiert (bisher keine Maut)

(2) $\boxed{\text{Übergang zum dualen LP mit Dualvariablen}}$

z_i für die Gleichheitsbedingungen, $i \in I$

μ_a für die $\geq$ Bedingungen, $a \in A$, nach Mult. mit -1

(D_g) $\quad \max \sum_i d_i z_i - \sum_a g_a \mu_a$

aus Multiplikation der $\leq$ - Bed mit -1

$$z_i - \sum_{a \in P} \mu_a \leq \alpha_i \tau_p(g) \quad \forall i, \forall P \in \mathcal{P}_i \qquad (*)$$

$\mu_a \geq 0$, z_i arbitrary

$$(*) \iff z_i \leq \underbrace{\sum_{a \in P} (\alpha_i \tau_a(g_a) + \mu_a)}_{\text{Kosten von } P \text{ bei Interpretation von } \mu \text{ als Maut}} \qquad \forall i \ \forall P \in \mathcal{P}_i \quad (**)$$

$\Rightarrow z_i \leq$ Kosten kürzester Weg in $\mathcal{P}_i$ bzgl. dieser Kosten

Betrachte Zielfkt. Für optimal gewählte μ_a werden (da maximiert wird) die z_i so groß wie möglich $\overset{(**)}{\Rightarrow}$ entsprechen Länge kürzester Weg bzgl. Kosten

Beachte: im primalen keine Maut

Maut μ_a ergibt sich als Dualvariable

5.4 PROPOSITION: Sind f und (μ, z) optimale Lösungen von (P_g) und (D_g), so ist f ein UE bzgl. der Maut μ falls $f_a = g_a \ \forall a$ ist

Beweis: Nutze Bed. vom Komplementären Schlupf:

$$f_P^i > 0 \Rightarrow z_i = \sum_{a \in P} (\mu_a + \alpha_i \tau_a(g))$$

$$= \text{Kosten des Weges } P \in \mathcal{P}_i$$

Für nicht genutzte Wege $(f_P^i = 0)$ gilt $(**)$

$\Rightarrow$ Kosten $P \geq z_i$

$\Rightarrow f$ ist UE bzgl der Maut μ falls $f_a = g_a \ \forall a$

5.5 PROPOSITION. Ist g eine zulässige Auslastung, so haben (P_g) und (D_g) optimale Lösungen

Beweis: g zulässig $\Rightarrow \exists$ Fluss f mit Auslastung $f_a \leq g_a \ \forall a$

$\Rightarrow f$ ist zulässig für (P_g)

Claim: dann ist $\mu_a := 0 \ \forall a$ und $z_i := 0 \ \forall i$ eine zulässige Lösung für (D_g)

Überprüfe $(**)$: $$\underbrace{\alpha_i}_{\geq 0} \underbrace{\tau_P(g)}_{\geq 0} + \underbrace{\sum_{a \in P} \mu_a}_{= 0} \geq 0 = z_i$$

$\Rightarrow (P_g)$ und (D_g) haben zulässige und damit auch optimale Lösungen $\square$

Die Propositionen zeigen:

$$\boxed{\begin{array}{l} g \text{ ist zulässige Auslastung} \\ \Rightarrow (P_g), (D_g) \text{ haben Optimallösungen } f, (\mu, z) \\ \qquad \text{und } f \text{ ist UE bzgl. } \mu \text{ falls } f_a = g_a \ \forall a \end{array}}$$

Brauchen zwei weitere Begriffe:

- Auslastung g heißt <u>optimal-straff</u>
  $:\Leftrightarrow$ (P_g) hat optimale Lösung, bei der alle Ungleichungen mit Gleichheit gelten (d.h. $f_a = g_a \ \forall a$)
- Auslastung g heißt <u>minimal zulässig</u>
  $:\Leftrightarrow$ kann auf keiner Kante verringert werden ohne Zulässigkeit zu verletzen
  d.h. $g' \leq g$ und $g'_a < g_a$ für ein $a \Rightarrow g'$ nicht zulässig

$$\boxed{\begin{array}{l} \textbf{5.6 SATZ:} \text{ Eine zulässige Auslastung } g \text{ ist erzwingbar} \\ \Leftrightarrow g \text{ ist optimal-straff} \end{array}}$$

Beweis: "$\Leftarrow$"

g sei optimal-straff $\overset{\text{Def}}{\Rightarrow}$ die zugehörige optimale Lösung f von (P_g) induziert g
und f ist UE bzgl. dual opt Lösung
$\Rightarrow g$ wird von UE bzgl μ induziert $\Rightarrow$ erzwingbar

"$\Rightarrow$"

g sei erzwingbar $\overset{\text{Def}}{\Rightarrow}$ $\exists$ Maut μ mit $f_a = g_a \quad \forall a$

$$= \sum_i \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}_i \\ P \ni a}} f_a^i \quad \text{und } f \text{ ist UE bzgl } \mu$$

$\Rightarrow$ Ungleichung in (P_g) ist straff $\forall a$ für f

f ist UE $\Rightarrow$ alle Fluss führenden Wege für i haben

dieselben Kosten $\underbrace{\alpha_i \tau_P(g) + \mu_P}_{=: z_i}$

und (μ, z) ist zulässig für (D_g)

Claim: f und (μ, z) erfüllen Bed. vom komplementären Schlupf

denn: $f_P > 0 \quad P \in \mathcal{P}_i \overset{\text{Def } z_i}{\Rightarrow}$ (**) gilt mit Gleichheit

umgekehrt: (**) gilt mit $<$ $\overset{\text{Def } z_i}{\Rightarrow}$ $f_P^i = 0$

$\Rightarrow$ f und (μ, z) sind Optimallösungen für (P_g) und (D)

$\Rightarrow$ $(f_a = g_a)$ g ist optimal-straff $\square$

$\boxed{\text{Beweis von Satz 5.3: Das SO ist erzwingbar (als Auslastung und Kantenfluss)}}$

g sei optimale Auslastung, d.h. Auslastung im SO

Zeige: g ist optimal-straff $\overset{\text{Satz 5.6.}}{\Rightarrow}$ g ist erzwingbar

Ann. g nicht optimal-straff

Betrachte Nummerierung der Kanten $a_1, a_2, \dots, a_m$

Sei $g^{(0)} := g$

Für a_i definiere $g^{(i)}$ durch $g_a^{(i)} := \begin{cases} g_a^{(i-1)} & \forall a \neq a_i \\ \bullet & a = a_i \end{cases}$

minimaler Wert, so dass $g^{(i)}$ noch zulässig ist

Dies ergibt Folge von zulässigen Auslastungen

$$g = g^{(0)} \to g^{(1)} \to g^{(2)} \to \dots \to g^{(m)} =: g^*$$

$\Rightarrow$ g^* ist $\underbrace{\text{minimal zulässig}}$ nach Konstruktion

$\Rightarrow$ (P_{g^*}) hat optimale Lösung $f^* \leq g^*$

g^* minimal zulässig $\Rightarrow$ $f^* = g^*$

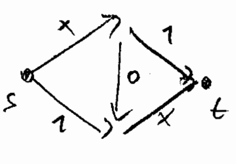
$\Rightarrow$ g^* optimal-straff $\overset{5.6}{\Rightarrow}$ g^* erzwingbar

$g^* \leq g$, g optimal $\Rightarrow$ g^* optimal und erzwingbar $\square$

5.1 <u>Aufgabe 5.1</u>

Berechne Maut für das Braess Paradox über (D_g)

mit g = Auslastung des SO



τ_a

$d = 1$

SO

5.3 Charakterisierung erzwingbarer Auslastungen

5.7 KOROLLAR [Fleischer et al 2004]

Sei $w: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ eine monoton nicht fallende Fkt.

$\Rightarrow$ $\exists$ Maut, die eine Auslastung g^* erzwingt, die $w(g)$ minimiert [$w(g)$ allgemeiner als $\sum_i \alpha_i \sum_a \tau_a(g_a^i) \cdot g_a^i$]

Beweis: Anpassung des Beweises von Satz 5.3

Die Optimalität von g wird nur am Ende genutzt und jetzt zu $\boxed{g^* \leq g \Rightarrow w(g^*) \leq w(g) \overset{g \text{ opt.}}{\Rightarrow} g^* \text{ optimal.}}$

Alle anderen Überlegungen (auch die LPs) bleiben gleich □

5.8 BEISPIEL: $w(g) := \max_i \min_{P \in \mathcal{P}_i} \tau_P(g) \to \min$

minimiert die maximale Fahrzeit bzgl. g über alle i

$\Rightarrow$ schnelle Wege für jede Commodity [Feuerwehr!]

so ist ja unfair für einzelne Nutzer. Daher Wege verschieden gewichten bzgl. der Fahrzeitsensitivitäten der Nutzer, $\Rightarrow$ $\min \sum_i \alpha_i \sum_{P \in \mathcal{P}_i} \tau_P(f) f_P^i$

weighted system optimum

Ein Fluss heißt <u>gewichtet optimal</u>, wenn er diese Fkt. minimiert.

$\hat{=}$ Minimierung der Gesamt Fahrzeit in € $\hat{=}$ Zielfkt von (P_g)

5.9 KOROLLAR [Fleischer et al 2004]

Ein gewichtet optimaler Fluss ist erzwingbar

exists, again a convex opt. problem

Beweis: Sei f^* ein gewichtet optimaler Fluss mit $\sum_a f_a^*$ minimal

Zeige: von f^* induzierte Auslastung $g^*(=f_i^*)$ is optimal straff

$\overset{\text{Satz 5.6}}{\Rightarrow}$ f^* ist erzwingbar

Ann. f^* nicht optimal-straff (f^* gesehen als Auslastung)

$\Rightarrow$ das LP (P_{f^*}) hat eine optimale Lösung $f \leq f^*$

und $\exists$ Kante $\bar{a}$ mit $f_{\bar{a}} < f^*_{\bar{a}}$

$\Rightarrow \sum_a f_a < \sum_a f_a^*$

Außerdem

$$(*)\quad \sum_i \alpha_i \sum_{P\in\mathcal{P}_i} \tau_P(f) f_P^i \overset{\tau_a \text{ monoton}}{\leq} \sum_i \alpha_i \sum_{P\in\mathcal{P}_i} \tau_P(f^*) f_P^i \overset{f \text{ optimal in } (P_{f^*})}{\leq} \sum_i \alpha_i \sum_{P\in\mathcal{P}_i} \overbrace{\tau_P(f^*)}^{\text{fixed}} f_P^{*i}$$

f^* gewichtet optimal $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ f gewichtet optimal

$\Rightarrow \left(\sum_a f_a < \sum_a f_a^*\right)$ Widerspruch zu Wahl von f^* □

Beweis von Satz 5.3 (S_0 ist erzwingbar) zeigte Technik zur Reduzierung der Kantenauslastungen.

Jetzt: diese Technik allgemeiner nutzen.

Die Kante μ erzwingt Auslastung g <u>schwach</u>

$:\Longleftrightarrow \exists$ Auslastung $g' \leq g$, die von μ erzwungen wird

> 5.10 KOROLLAR [Fleischer et al 2004]
>
> Jede zulässige Auslastung ist schwach erzwingbar

Beweis: g sei zulässige Auslastung.

Betrachte wie im Beweis zu Satz 5.3

- Nummerierung der Kanten $a_1 \dots a_m$
- $g^{(0)} := g$

  zu a_i $\quad g^{(i)}$ mit $g^{(i)} := \begin{cases} g_a^{(i-1)} & \forall a \neq a_i \\ \bullet & \end{cases}$

minimaler Wert, so dass $g^{(i)}$ noch zulässig ist

Sei g' die resultierende minimal zulässige Auslastung

$\Rightarrow$ g' ist optimal-straff $\overset{\text{Satz 5.6}}{\Longrightarrow}$ g' ist erzwingbar

$g' \leq g$

$\left.\begin{matrix} g' \text{ ist erzwingbar} \\ g' \leq g \end{matrix}\right\}$ g schwach erzwingbar □

wie im Beweis Satz 5.3

Anwendung Korollar 5.10:
Berechnung Kauf um eine festgelegte maximale Kantenbelastung nicht zu überschreiten
[will keinen speziellen Fluss erzwingen!]

$\boxed{\text{Aufgabe 5.2}}$: Eine Kauf zur Erzwingung einer Auslastung kann in polynomieller Zeit berechnet werden

Hinweis: LP "klein" machen durch Kantenbasierte Form

$\boxed{\text{Aufgabe 5.3}}$: Charakterisieren Sie das Polyeder aller Kaufvektoren zur Erzwingung einer festen Auslastung

Hinweis: Nutze (P_g) und (D_g) in Kantenform

5.4 Das Minimum Toll Booth Problem (MTB)

Bisherige Maut zur Erzwingung des SO (marginal cost pricing) kann Maut auf jede Kante festlegen

$\Rightarrow$ nicht sinnvoll in Praxis

Daher: min # Kanten mit Maut zur Erzwingung des SO

(MTB) $\min \sum w_a z_a =: w(\mu)$

Gewicht ≥ 0

0,1 Variable mit $z_a = \begin{cases} 1 & \mu_a > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Menge $M(SO)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{so dass } \mu \text{ existiert auf Kanten mit } z_a = 1 \\ \text{und } \mu \text{ erzwingt ein SO} \end{array} \right.$

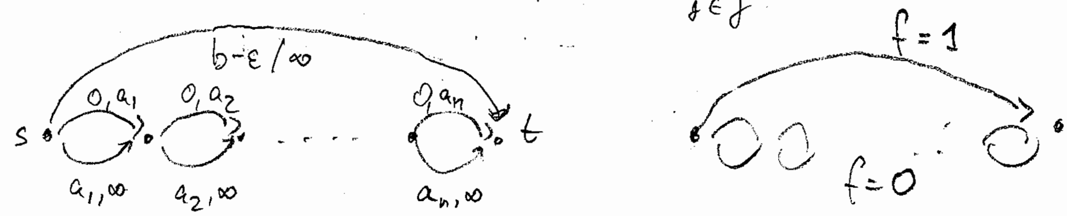
5.10 SATZ Das MTB Problem zur Erzwingung eines vorgegebenen Flusses f ist (schwach) NP-schwer [f i.A. $\neq$ SO]

Beweis: Reduktion von PARTITION:

Gegeben: $a_1 \dots a_n$ mit $\sum a_i = 2b$

Frage: $\exists ?$ $J \subseteq \{1,..,n\}$ mit $\sum_{j \in J} a_j = b$

Graph:



Fahrzeit Gewichte w_a, $\varepsilon < \min_i a_i$

Zeige: I JA-Instanz von PARTITION $\Leftrightarrow$ $\exists$ $\mu \in M(f)$ mit $w(\mu) \leq b$

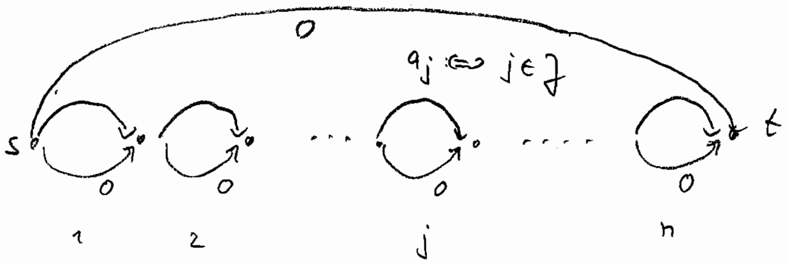
↑ erzwingt f

"$\Rightarrow$"

Sei I eine JA-Instanz von PARTITION mit Indexmenge J,

also $\sum_{j\in J} a_j = b$.

Definiere dazu den Mautvektor μ als

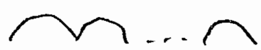


d.h. $\mu(\text{obere Kante in Parallelenpaar } j) := \begin{cases} a_j & j \in J \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

und $\mu \equiv 0$ sonst

$$\Rightarrow \quad w(\mu) = \sum_{j\in J} w_j \underset{\text{Konstruktion}}{=} \sum_{j\in J} a_j = b$$

μ erzwingt f, denn $s \frown t$ hat Länge $b-\varepsilon$

 hat Länge b

Ersetzen von oberen Kanten durch die unteren Kanten verlängert höchstens den Weg

$\Rightarrow$ μ erzwingt f und hat Gewicht $w(\mu) \leq b$

"$\Leftarrow$" Sei $\mu \in M(f)$ mit $w(\mu) \leq b$

Konstruktion $\Rightarrow$ $\mu_a > 0$ kann nur auf oberen Kanten

in  sein

(andere Kanten haben Gewicht ∞)

Beh.: $w(\mu) = b$

denn: Ann. $w(\mu) < b$

$\Vert$

$$\sum_{a:\, \mu_a > 0} w_a \underset{\uparrow}{=} \sum_{j \in J} a_j$$

Konstruktion

mit J = zugehörige Indexmenge der Parallelenpaare in denen $\mu_a > 0$

$\Rightarrow$ Weg $\frown\frown \ldots \frown$ hat Kosten $\sum_{j \in J} a_j < b - \varepsilon$ und Fahrzeit 0

$\Rightarrow \mu \notin M(f)$

Also: $w(\mu) = b$ und $\sum_{j \in J} a_j = b$

$\Rightarrow$ I ist JA-Instanz von Partition $\square$

$w(\mu) > b \Rightarrow$ use 0-Kanten oben $\overset{0\text{-Kant}}{\frown}$ und $\underset{a_j\ j \notin J}{\smile}$ unten

this path has travel time $< b - \varepsilon$

and no toll

Problem MTB hat starke Verwandschaft mit

MIN LENGTH BOUNDED CUT

Gegeben: Digraph $D = (V, A)$
Kantenlängen l_a, Längenschranke L
Kapazitäten u_a
Knoten s, t

Gesucht Schnitt $C \subseteq A$ (als Kantenmenge)

so daß
$(V, A-C)$ keine s,t-Wege der Länge $\leq L$ enthält,
C minimale Kapazität $u(C) := \sum_{a \in C} u_a$ hat

length bounded cut

5.11 SATZ [Baier et al 06] Für $\varepsilon > 0$ und $L \in \{4, \dots, \lfloor n^{1-\varepsilon} \rfloor\}$ ist es NP-schwer das MIN L-BOUNDED CUT Problem mit $l_a \equiv 1$, $u_a \equiv 1$ besser als 1.1377 zu approximieren

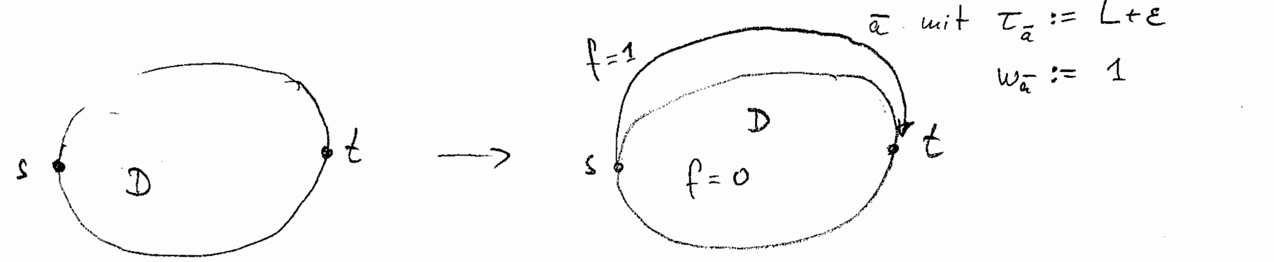
(ohne Beweis $\square$

5.12 SATZ: MIN-L-BOUNDED CUT und single arc MTB sind polynomial äquivalent und gleichen Zielfunktionswert

Fluss nur auf eine Kante

Beweis: Transformation MIN L-BOUNDED CUT → MTB:

Sei I Instanz von MIN-L-BOUNDED CUT



u, ℓ, L ganz $\qquad \tau := \ell \quad w := u$

ε so klein dass
alle $L+\varepsilon$ längenbeschränkten Wege in D
bereits L-längenbeschränkt sind

Sei C ein L-bounded Schnitt für I, o.B.d.A. mit min. $u(C)$

$$\Rightarrow \mu_a := \begin{cases} M \text{ groß} & \text{falls } a \in C \\ 0 & \text{falls } a \notin C \end{cases} \quad \text{ist Kantvektor mit } w(\mu) = u(C)$$

und μ erzwingt f

Für jeden zulässigen Kantvektor μ für f gilt

$\{a \in A \mid \mu_a > 0\}$ ist ein L-bounded Schnitt

$\Rightarrow w(\mu) \geq u(C)$

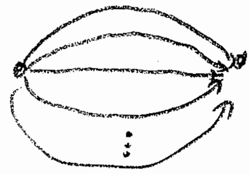
5.4 Umgekehrte Transformation $\boxed{\text{AUFGABE 5.4}}$

5.5 Beste Maut auf beschränkte Anzahl von Kanten

realistischer für Anwendungen (London, Stockholm, Singapur)

i.A. NP-schwer (schon für lineare $\tau_a(x_a)$) Hoefer et al 2008

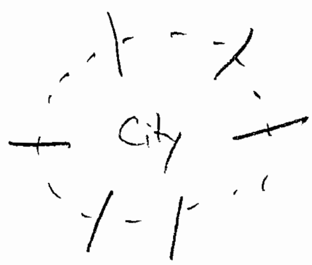
lösbar für Netze der Form



m parallele Kanten

[Harks, Klimm, M. 2002]

Approximation von
- Brücken über einen Fluss
- Zugang zu Innenstadt



Exakt für mehrspurige Autobahnen (Israel)

Beste Maut $\hat{=}$ induzierter UE Fluss f minimiert $\sum_a \tau_a(f_a) \cdot f_a$

5.5 $\boxed{\text{Aufgabe 5.5}}$ Sei N = Menge der Kanten ohne Maut

M = —"— mit Maut μ_a

d = Gesamtdemand

G 

Zeige, dass der Optimalwert $\sum_a \tau_a(f_a) f_a$ nur von der Aufteilung d_N, d_M des Demands auf die Mengen N und M abhängt, d.h. $\text{OPT} = \max_{d_N} F(d_N)$

5.6 $\boxed{\text{Aufgabe 5.6}}$ Entwerfen Sie für allgemeine Graphen und mehrere (s_i, t_i) einen heuristischen Algorithmus zur "Minimierung" von $\sum_a \tau_a(f_a) \cdot f_a$ unter Maut auf beschränkter (aber beliebiger) Menge von Kanten.

Hinweis: orientieren Sie sich an Abstiegsverfahren