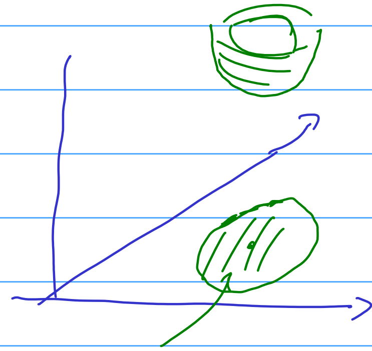
§ 2 Optimalitätsbedingungen für nichtlineare konvexe und diffbare Optimierungsprobleme

Betrachte NLP

$$\begin{cases} \min f(x) & f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1 \\ \text{unter } g_i(x) \le 0 & i \in I \\ f, g_i \text{ konvex, diffbar} & \end{cases}$$



Gebiet durch $g_i(x) \le 0$ beschrieben

Standardvoraussetzung

$\exists\, x \in \mathbb{R}^n$ mit $g_i(x) < 0 \quad \forall i \quad \longrightarrow$ Existenz innerer Punkt

oder $g_i(x)$ linear $\forall i$

Betrachte Lagrangefunktion $\quad L(x, \lambda) := f(x) + \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x) \qquad \lambda_i \ge 0$

2.1 SATZ Unter diesen Voraussetzungen gilt

$\bar{x}$ ist globales Optimum von (NLP)

$\Longleftrightarrow$ die Kuhn-Tucker Bedingungen gelten in $\bar{x}$ [1951]

d.h. $\exists\ \bar{\lambda} \ge 0$ mit $\nabla_x L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0$

$\bar{\lambda}_i \cdot g_i(\bar{x}) = 0 \quad \forall i$

Bei uns: lineare Gleichungen $\sum_{P \in \mathcal{P}_k} f_P = d_k \quad \forall k$

Vorzeichenbedingungen $f_P \ge 0 \quad \forall P$

allgemeine solche Form $\quad \min f(x) \qquad f$ konvex

$\mu_i \qquad h_i(x) = -\sum_j h_{ij} x_j + b_i = 0 \qquad \forall i$

$\lambda_j \qquad g_j(x) = -x_j \le 0 \qquad \forall j$

Kuhn-Tucker Bed. ergeben

x^* optimal $\Longleftrightarrow$ $\exists$ Zahlen $\lambda_j \geq 0$ und μ_i beliebig mit

(1) $$\nabla_x f(x^*) + \sum_j \lambda_j \nabla_x g_j(x^*) + \sum_i \mu_i \nabla_x h_i(x) = 0$$

(2) $$\lambda_j \cdot g_j(x^*) \overset{!}{=} 0 \qquad \forall j$$

Spezialisierung auf partielle Ableitungen und die explizite Form der Nebenbedingungen

(1) $$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) - \lambda_j + \sum_i \mu_i(-h_{ij}) = 0 \qquad \forall j$$

$$\Rightarrow \lambda_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) - \sum_i \mu_i h_{ij}$$

Setze λ_j in (2) ein

(2) $$\lambda_j \cdot g_j(x^*) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) - \sum_i \mu_i h_{ij}\right) x_j = 0} \qquad (2.1)$$

$$\lambda_j \geq 0 \quad \text{ergibt} \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) - \sum_i \mu_i h_{ij} \geq 0} \qquad (2.2)$$

Nebenbedingungen ergeben

$$\sum_i h_{ij} x_j^* = b_i \qquad (2.3)$$

$$x_j^* \geq 0 \qquad (2.4)$$

Also: Notwendige und hinreichende Bedingungen für Optimalität von x^* ist die Existenz von Zahlen μ_i $(i \in I)$ mit (2.1) – (2.4)

Anwenden auf SO als Pfadfluss

$f \mathrel{\hat{=}}$ Pfadfluss $\quad x(f)$ zugehöriger Kantenfluss

$$\min \; C(x(f)) = \sum_{a \in A} x_a(f) \cdot \tau_a(x_a(f))$$

$$\left[\; x_a(f) = \sum_{P \ni a} f_P \qquad \forall a \;\right] \quad \text{implizite Bedingung}$$

$$\sum_{P\in\mathcal{P}_k} f_P = d_k \qquad \forall k$$

$$f_P \geq 0$$

$$\sum_i h_{ij} x_j \mathrel{\hat{=}} \sum_k 1\, \mathbb{1}_{P\in\mathcal{P}_k} f_P = \begin{cases} f_P & \text{wenn } P\in\mathcal{P}_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(2.1) $\Rightarrow$ $f_P \left(\frac{\partial C}{\partial f_P}(x(f)) - \mu_k \right) = 0 \quad \forall k \quad \forall P\in\mathcal{P}_k$

(2.2) $\Rightarrow$ $\frac{\partial C}{\partial f_P}(x(f)) - \mu_k \geq 0 \quad \forall k \quad \forall P\in\mathcal{P}_k$

(2.3) $\Rightarrow$ $\sum_{P\in\mathcal{P}_k} f_P = d_k \quad \forall k$

(2.4) $\Rightarrow$ $f_P \geq 0$

Betrachte $\frac{\partial C}{\partial f_P}(x(f)) = \frac{\partial}{\partial f_P} \sum_{a\in A} \underbrace{x_a(f)\cdot \tau_a(x_a(f))}_{c_a(x_a(f))}$

$$= \sum_{a\in A} \frac{\partial c_a}{\partial x_a}(x_a)\, \frac{\partial x_a}{\partial f_P}(f) \qquad \text{Kettenregel}$$

$$= \sum_{a\in A} \frac{\partial c_a}{\partial x_a}(x_a)\, \mathbb{1}_{a,P}$$

$x_a(f) = \sum_{P\ni a} f_P$ $\qquad$ $\mathbb{1}_{a,P} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } a\in P \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$= \sum_{a\in P} \underbrace{\frac{\partial c_a}{\partial x_a}(x_a)}_{\text{marginale Kosten } \frac{d}{dx_a}(x_a\cdot\tau_a(x_a))}$$

$\Rightarrow$ (2.1) wird zu $f_P \left(\sum_{a\in P} c_a'(x_a) - \mu_k \right) = 0 \quad \forall k,\ P\in\mathcal{P}_k$

(2.2) wird zu $\sum_{a \in P} c_a'(x_a) - \mu_k \geq 0$

(2.1) (2.2) bedeuten:

(1) Fluss führende Wege ($f_P > 0$) zu k haben dieselbe "Länge" μ_k bzgl $c_a'(x_a)$

(2) jeder Weg zu k hat mindestens die Länge μ_k bzgl. $c_a'(x_a)$

$\Rightarrow$ Bestätigung von Lemma 1.1