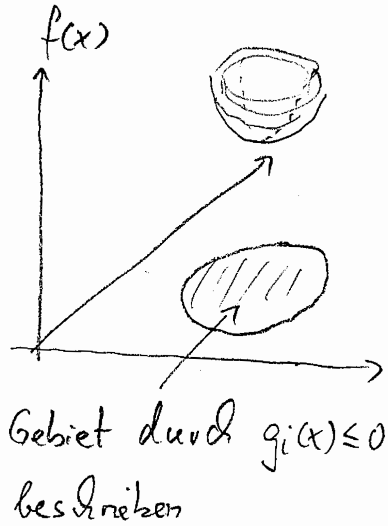
§2 Optimalitätsbedingungen für nichtlineare konvexe und differenzierbare Optimierungsprobleme

Betrachte



$$(NLP) \begin{cases} \min f(x) & x \in \mathbb{R}^n \\ \text{unter } g_i(x) \le 0 & i \in I \\ f, g_i \text{ konvex und diffbar} \end{cases}$$

Standardvoraussetzung:

$\exists\, x \in \mathbb{R}^n$ mit $g_i(x) < 0 \quad \forall i$

oder g_i linear $\forall i$

Existenz inneres Punkt

Betrachte Lagrange fkt

$$L(x, \lambda) := f(x) + \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x) \qquad \lambda_i \ge 0$$

2.1 SATZ: Unter diesen Voraussetzungen gilt:

$\bar{x}$ ist globales Optimum von (NLP)

$\Longleftrightarrow$ die Kuhn-Tucker Bedingungen gelten in $\bar{x}$ [1951]

d.h. $\exists\, \bar{\lambda} \geq 0$ mit $\nabla_x L(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0$

$$\bar{\lambda}_i \cdot g_i(\bar{x}) = 0 \quad \forall i$$

Bei uns: lineare Gleichungen $\sum_{p \in P_k} x_p = d_k \quad \forall k$

Vorzeichenbedingungen $x_p \geq 0 \quad \forall p$

allgemeine solche Form

$$\min f(x) \qquad f \text{ konvex}$$

$$\begin{array}{ll} \mu_i & \text{unter } h_i(x) = -\sum_j h_{ij} x_j + b_i = 0 \qquad i \in I \\ \lambda_j & g_j(x) = -x_j \leq 0 \qquad j \in J \end{array}$$

$\Downarrow$

Kuhn Tucker Bedingungen ergeben: x^* optimal $\Leftrightarrow$

$\exists$ Zahlen $\lambda_j \geq 0$ und μ_i beliebig mit

$$\nabla_x f(x^*) + \sum_j \lambda_j \nabla_x g_j(x^*) + \sum_i \mu_i \nabla_x h_i(x^*) = 0 \qquad (1)$$

$$\lambda_j \cdot g_j(x^*) = 0 \qquad \forall j \qquad (2)$$

Spezialisierung auf partielle Ableitungen

$$(1) \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) - \lambda_j + \sum_i \mu_i (-h_{ij}) = 0 \qquad \forall j = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \lambda_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) - \sum_i \mu_i h_{ij}$$

Setze λ_j in (2) ein

$$(2) \quad \lambda_j \cdot g_j(x^*) = 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) - \sum_i \mu_i h_{ij}\right)(-x_j) = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^*) - \sum_i \mu_i h_{ij}\right) x_j = 0 \qquad (2.1)$$

$\lambda_j \geq 0$ ergibt $$\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_i \mu_i h_{ij} \geq 0 \qquad (2.2)$$

Nebenbedingungen ergeben $\sum_i h_{ij} x_j^* = b_i$ (2.3)

$$x_j^* \geq 0 \qquad (2.4)$$

Also: $\boxed{\text{Notwendige (und hinreichende) Bedingungen für Optimalität von } x^* \text{ ist die Existenz von Zahlen } \mu_i \ (i \in I) \text{ mit (2.1)–(2.4)}}$

Anwenden auf SO als Wegfluss

$f =$ Wegfluss $\quad x(f)$ zugehöriger Kantenfluss

$$\min \quad C(x(f)) = \sum_{a \in A} x_a(f) \cdot \tau_a(x_a(f))$$

$$x_a(f) = \sum_{P \ni a} f_P \qquad \forall a$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_k} f_P = d_k \qquad \forall k$$

$$f_P \geq 0$$

$$\Rightarrow \sum_i h_{ij} x_j \ \hat{=} \ \sum_k 1 \cdot \mathbb{1}_{P \in \mathcal{P}_k} f_P$$

$$= \begin{cases} f_P & \text{wenn } P \in \mathcal{P}_k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Kuhn - Tucker Bedingungen:

$$f_P \cdot \left(\frac{\partial C}{\partial f_P}(x(f)) - \mu_k \cdot 1 \right) = 0 \qquad \forall\, k \in C,\ P \in \mathcal{P}_k \qquad (1)$$

$$\frac{\partial C}{\partial f_P}\, x(f) - \mu_k \geq 0 \qquad \forall\, k \in C,\ P \in \mathcal{P}_k \qquad (2)$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_k} f_P = d_k \qquad \forall\, k \qquad (3)$$

$$f_P \geq 0 \qquad \forall\, k,\ P \in \mathcal{P}_k \qquad (4)$$

Betrachte zunächst $\frac{\partial C}{\partial f_P}(x(f))$ für festen Weg P

$$= \frac{\partial}{\partial f_P} \sum_{a \in A} \underbrace{x_a(f) \cdot \tau_a(x_a(f))}_{=:\, c_a(x_a(f))}$$

$$= \sum_{a \in A} \frac{\partial c_a}{\partial x_a}(x_a) \frac{\partial x_a}{\partial f_P}(f) \qquad \text{Kettenregel}$$

$$= \sum_{a \in A} \frac{\partial c_a}{\partial x_a}(x_a) \cdot \delta_{a,P} \qquad \text{mit } \delta_{a,P} = \begin{cases} 1 & a \in P \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

da $x_a = \sum_{P' \ni a} f_{P'}$

$$= \sum_{P \ni a} \frac{\partial C_a}{\partial x_a}(x_a) = \sum_{P \ni a} \underbrace{\left(x_a \cdot \frac{d}{dx_a} \tau_a(x_a) + \tau_a(x_a) \right)}_{= c_a'(x_a) \text{ aus § 1}}$$

"modifizierte Fahrzeitfkt",
"marginale Kosten"

$\Rightarrow$ (1) wird zu $f_P \cdot \left(\sum_{a \in P} c_a'(x_a) - \mu_k \right) = 0 \quad \forall k, P \in \mathcal{P}_k$

(2) wird zu $\sum_{a \in P} c_a'(x_a) \geq \mu_k \quad \forall k, P \in \mathcal{P}_k$

(1), (2) bedeuten

(1): Fluss führende Wege zu k haben dieselbe Länge μ_k bzgl. $c'(x_a)$

(2) jeder Weg zu k hat mindestens die Länge μ_k bzgl. $c'(x_a)$ als Fahrzeitfkt

$\Rightarrow$ $\boxed{SO = UE \text{ bzgl. } c_a'(x_a)}$